

INTRODUCTION

χαίνω : **s'entrouvrir...**

« Lorsque le poète Hésiode entreprit de raconter la genèse des dieux, il s'arrêta à une sorte d'être abstrait et indéterminé, personnification de l'espace vide, antérieur à tous les autres dieux ; cet être est Chaos (de χαίνω : s'entrouvrir). Le Chaos est cependant rempli de ténèbres et de nuages ; et lorsque de son sein sort la terre, il persiste dans les régions innommées qui sont au-dessous de la terre. Celle-ci n'en sort pas immédiatement ; la première génération est celle de l'Erèbe et de la Nuit qui engendre Aether et Hemera (le Jour). Dans la théogonie Orphique, à l'origine est Cronos qui procrée l'Aether et le Chaos. Aristophane a parodié ces doctrines en faisant naître les Oiseaux de l'Union d'Eros avec le Chaos. Plus tard le Chaos devient la matière informe et indistincte où l'architecte éternel met l'ordre et l'harmonie (*rudis indigestaque moles*) »

Cette définition est extraite de « La Grande Encyclopédie » Larousse, bien antérieure aux débuts de la théorie du chaos. Peut-on dire, après 3 années de travail sur une application de cette théorie, que le nom de « chaos » est effectivement bien adapté au domaine des dynamiques non linéaires ? Il a été donné à une science en plein développement par un de ses découvreurs, un chaoticien théoricien, David Ruelle, en 1975. Du point de vue du sens antique originel, ce nom semble bien adapté, car il porte en lui de nombreuses significations que l'on retrouve dans les manifestations physiques de la théorie du chaos : un mélange d'ordre et de désordre, une dimension mystique et mystérieuse qui peut traduire la fatale imprédictibilité, ou encore la richesse des comportements, ou bien encore la beauté et la complexité des graphes qui peuvent être tirés de phénomènes apparemment dépourvus de toute signification. Toutes ces évocations, imagées, poétiques ou encore philosophiques, ont sûrement été pour beaucoup dans le succès populaire de la toute nouvelle discipline.

Mais qu'en est-il du succès de ce domaine auprès de la communauté scientifique ? Le livre de rétrospective du journaliste scientifique James Gleick dévoile que cette théorie a eu du mal à se faire adopter par le monde de la recherche. Le chaos a bouleversé la pensée scientifique officiellement admise et enseignée, parce qu'il étudie des phénomènes purement non linéaires, alors qu'en général les autres théories sont linéaires, ou bien rapportent les problèmes non linéaires à des situations linéaires connues. La science, à juste titre, se méfie des nouveautés spectaculaires et révolutionnaires, il s'agit souvent plus de charlatanisme que de réel progrès de la connaissance. En ce sens, le terme « chaos » a plus fait pencher le « jugement a priori » de certains scientifiques du côté du charlatanisme que de celui du nouveau domaine digne d'intérêt. Le développement de la théorie du chaos aurait été plus rapide si un plus grand nombre de chercheurs avait été séduit par le domaine.

La théorie du chaos s'impose tout de même de plus en plus, parce qu'elle porte ses fruits, c'est-à-dire parce qu'elle décrit correctement un très grand nombre de phénomènes physiques, jusque là ignorés ou laissés de côté. Même si son cadre théorique reste très complexe et encore incomplet, les succès expérimentaux sont les plus parlants et les plus incontestables. Il ne s'agit plus maintenant d'observer uniquement les nombreux phénomènes chaotiques de la nature, le stade de

l'application et des inventions s'appuyant sur le chaos déterministe a commencé. C'est dans ce cadre que s'inscrit le thème de ce travail. Sans avoir besoin de dominer les propriétés topologiques complexes des attracteurs étranges à plusieurs dizaines de dimension, quelques notions relativement simples de la théorie du chaos ont suffi pour mener à bien une application sur le codage d'information par porteuse chaotique. Cette étude comporte sans aucun doute de nombreux points à éclaircir, mais la réalisation expérimentale a fourni ses résultats. Nous espérons que ceux-ci seront, comme dans d'autres cas plus célèbres dans l'histoire de la théorie du chaos, des moteurs suffisants pour la poursuite de ce travail aux potentialités scientifiques et techniques nombreuses, et ceci malgré le côté mystique injustifié du chaos déterministe.

L'origine du « Chaos » remonte ainsi aux temps grecs anciens, mais le domaine scientifique du même nom n'est âgé que d'une trentaine d'année environ. Un bref récit de son histoire permettra d'introduire ce travail, et de mieux le situer. Une énumération succincte de quelques recherches qui ont accompagné le développement de la théorie du chaos, aura pour but de montrer la variété, et le nombre, des domaines concernés par les dynamiques non linéaires.

I. Historique

Les recherches théoriques de Henri Poincaré à la fin du XIX^{ème} siècle sur les systèmes dynamiques non linéaires n'ont hélas pas eu de suite directe. Les raisons sont sûrement liées à l'absence de moyens de calcul informatique, à des difficultés au niveau de la diffusion scientifique, et aussi à la complexité du domaine. H. Poincaré a su poser des bases théoriques dans l'étude des systèmes différentiels à plusieurs variables, dont une des principales applications concernait à l'époque l'étude de la stabilité du système solaire (problème général à N corps). Un des résultats de ses travaux expliquait qu'il n'est pas possible de donner une réponse certaine au problème de la stabilité de notre système solaire.

Il fallut attendre presque un siècle pour que paraisse un article, passé inaperçu au départ, de Edouard Lorenz dans une revue de météorologie (1963). L'auteur y avait établi un modèle non linéaire relativement simple de l'atmosphère terrestre, à 3 variables dynamiques. Il y rapportait les résultats surprenants d'une série d'intégrations numériques de ce système dynamique. Les différentes solutions calculées exhibaient une sensibilité très forte aux petites différences de conditions initiales, l'« effet papillon » était observé pour la première fois sur des simulations, et n'était plus considéré comme un résultat erroné ou aberrant, mais comme la conséquence de propriétés physiques intrinsèques au système dynamique. L'imprévisibilité trouvait ici une autre explication que l'insuffisance de moyens de calcul pour intégrer les lois physiques régissant l'évolution de chaque particule de l'univers.

Un peu plus tard, Mitchell Feigenbaum étudia un système itératif non linéaire du 1^{er} ordre à une variable (1976). Il s'agit d'une dynamique à temps discret, a priori très différente du modèle continu à 3 variables de Lorenz, alors inconnu de Feigenbaum.

Ce type de suite quadratique avait déjà été étudié par Myrberg, quelques années auparavant, sous une expression légèrement différente : $x_{n+1} = x_n^2 - \lambda$. Les comportements asymptotiques de cette suite très simple, pour différentes valeurs de λ , sont riches et variés. Une petite calculatrice programmable suffit à mettre en évidence les différentes solutions possibles qui apparaissent lors d'une évolution continue du paramètre. Pour des faibles valeurs, on trouve un point fixe, puis un cycle de période 2 devient la solution asymptotique, puis apparaît la période 4, 8, 16, etc... Jusqu'à un point dit d'accumulation, où la solution asymptotique n'est plus cyclique, et présente une forte sensibilité par rapport à la donnée de la valeur initiale x_0 . L'itération de Feigenbaum ($x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot [1 - x_n]$), appelée « application logistique », présente les mêmes caractéristiques. Ce modèle a été utilisé par des biologistes pour traduire simplement l'évolution d'une population animale. Feigenbaum a eu le mérite d'explorer l'ensemble de la cascade par dédoublement avec les régimes chaotiques, et d'en reconnaître le caractère universel. De nombreux travaux sur l'application logistique ont eu lieu en fait à la même époque et de manière indépendante. Feigenbaum a été le plus médiatisé, mais il convient de citer d'autres noms dont les travaux analogues semblent antérieurs, tels que Tresser et Coulet [i.5].

Des travaux plus proches de systèmes physiques expérimentaux devaient ensuite renforcer l'intérêt de la recherche sur les systèmes dynamiques non linéaires. Les phénomènes de turbulence et d'instabilité dans les fluides posent de nombreux problèmes de description théorique, dont beaucoup sont restés sans solution jusqu'au développement des dynamiques chaotiques. L'expérience de Rayleigh-Bénard, datant du début du siècle, est un système physique simple et réalisable, qui permet d'observer des phénomènes d'instabilité spatio-temporelles dans un fluide. Il s'agit d'un volume de fluide dans un champ de pesanteur, enfermé dans une boîte dont les parois supérieure et inférieure sont maintenues à une différence de température constante. Cette différence, le paramètre de l'expérience, tend à créer un gradient de température dans le liquide, dont l'effet sur des volumes élémentaires de fluide s'oppose à celui du champ de pesanteur. Selon l'importance du paramètre, le système passe d'un régime de diffusion thermique (état fixe stable), à un régime de convection (apparition de rouleaux de fluide en mouvement, structure spatiale et temporelle périodique, bi-périodique, ou encore instable). Une conjecture (Landau) prétendait que l'apparition de l'instabilité était due à l'accumulation d'un nombre infini de modes instables. Or l'expérience (Libchaber, 1977) montrait qu'un nombre fini de ces modes suffisait à créer l'instabilité. Une autre expérience, celle de Couette-Taylor, tendait à montrer les mêmes résultats sur les mécanismes de la turbulence. Gollub et Swinney en 1975 mesurèrent ces instabilités apparaissant dans un fluide enfermé entre 2 cylindres concentriques en rotation. D'un point de vue théorique, les travaux de Ruelle et Takens ont permis de construire des bases pour interpréter ces constatations expérimentales, notamment en introduisant la notion d'attracteur étrange (1971). Grassberger et Proccacia développèrent ensuite une méthode pour l'identification des dynamiques chaotiques à partir de résultats expérimentaux. Berger et Pomeau ont appliqué cette méthode en premier avec succès dans le cas d'un régime turbulent de la convection de Rayleigh-Bénard (1983).

Tous ces premiers travaux expérimentaux se sont faits plus ou moins indépendamment, la théorie du chaos n'étant pas encore un champ d'intérêt à part entière. Cela a également été le cas pour Benoît Mandelbrot et sa théorie des

géométries fractales (1979), intimement liés à la structure topologiques des attracteurs étranges.

L'école russe est loin d'avoir contribué de manière négligeable aux développements de la théorie. Mais son influence, ou plutôt sa notoriété, est hélas restée assez discrète. Citons, en exemple, des chercheurs de Kiev, Bogoliubov et Mikropolski, qui ont développé des méthodes mathématiques. Sharkovski et Andronov se sont eux plutôt orientés vers des méthodes qualitatives d'étude des dynamiques non linéaires. L'exemple expérimental le plus connu de l'école russe concerne la réaction chimique de Belousov-Zhabotinsky. Enfin n'oublions tout de même pas Lyapounov, un mathématicien russe contemporain de Poincaré, qui est à l'origine de critères de stabilité très importants, et entre autres des fameux exposants de Lyapounov.

Bien d'autres travaux ont eu lieu, tant théoriques qu'expérimentaux, les quelques-uns évoqués ci dessus n'en sont que des exemples plus ou moins subjectifs. Dans les dix dernières années, le domaine des dynamiques non linéaires, ou systèmes chaotiques, a pu bénéficier d'un statut de science à part entière dans la plupart des revues scientifiques. Les recherches se sont multipliées et ont pu se faire connaître beaucoup plus facilement. L'isolement et l'éparpillement des premiers travaux n'existent heureusement plus. Certaines revues, hélas encore difficilement accessibles, sont même spécialement dédiées aux recherches sur le chaos (*International Journal of Bifurcation and Chaos, Bifurcation and Chaos in Applied Sciences*, World Scientific, éd. L.O. Chua, Berkeley). La théorie des dynamiques non linéaires ne fait par contre pas encore partie des programmes d'enseignement universitaire de base, elle est présente tout au plus au niveau troisième cycle. Cette lacune dans l'enseignement général reste un frein, car comme nous allons brièvement le voir, les dynamiques non linéaires concernent des domaines extrêmement variés, qui profiteraient à avoir de jeunes chercheurs déjà formés dans ce domaine.

II. Exemples de systèmes chaotiques

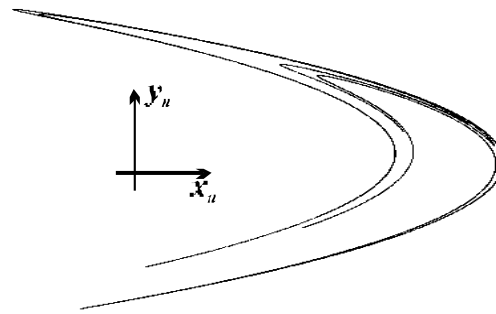
L'application logistique ($x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot [1 - x_n]$) a servi de modèle très simple de l'évolution d'une population. Des données expérimentales sur des crevettes, ou encore des animaux à fourrure au Canada (d'après le nombre de peaux vendues chaque année) ont confirmé en partie la validité de ce modèle. L'évolution d'une espèce sans aucun frein (prédateur, quantité de nourriture disponible, maladie) est a priori linéaire. La prise en compte de tous les facteurs de l'environnement biologique de l'animal conduit à limiter la croissance lorsque la population est trop importante.

Un autre modèle très connu et également discret, mais à 2 dimensions, est celui que l'astrophysicien M. Hénon s'est « amusé » à construire, à partir de principes topologiques énoncés par le mathématicien Smale (construction en fer à cheval). Le tracé dans le plan des 2 variables fait apparaître très clairement une des caractéristiques des attracteurs étranges, le phénomène d'étirement-repliement, et la structure fractale en lignes imbriquées (ou feuilletts imbriquées dans le cas de la dimension 3). Ces fonctions d'étirement et de repliement (un segment étiré et replié ressemble à un fer à cheval) sont en fait à la base de l'établissement de la transformation géométrique discrète de Hénon dans un plan.

Système de Hénon :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -1.4 \cdot x_n^2 + y_n + 1 \\y_{n+1} &= 0.3 \cdot x_n\end{aligned}$$

Attracteur de Hénon :



Dans un cadre proche, des recherches sans modèle mathématique, uniquement à partir de données expérimentales d'évolution, ont permis de reconnaître certaines propriétés de systèmes dynamiques chaotiques dans l'évolution du nombre de cas de varicelles et de rougeoles en Grande Bretagne. Cette étude a même permis de prévoir les conséquences a priori surprenantes sur l'évolution de la maladie à la suite d'une campagne de vaccination.

Les données géologiques relatives à l'oscillation et à l'inversion du champ magnétique terrestre font apparaître certaines propriétés semblables à celles des dynamiques chaotiques. Cette nouvelle perspective pousse à rechercher l'origine de ces fluctuations radicales (inversion du champ au cours de l'histoire) dans des mécanismes dynamiques naturels du coeur de la planète, et non plus dans un scénario type « collision de météorites ».

La météorologie, que certains auteurs de science fiction pensaient pouvoir maîtriser un jour pour pouvoir imposer le temps que l'on veut, a été fondamentalement bouleversée par la découverte de Lorenz. Son modèle simple a montré le caractère intrinsèquement imprévisible de certains modèles déterministes.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10 \cdot (y - x) \\ \text{Modèle de Lorenz : } \dot{y} &= -x \cdot z + r \cdot x - y \\ \dot{z} &= x \cdot y - 8/3 \cdot z\end{aligned}$$

r est un paramètre variable (solution chaotique pour $r \sim 28$). Les termes non linéaires sont bien sûr les termes produits $x \cdot z$ et $x \cdot y$.

La cinétique chimique fait également intervenir dans ces descriptions dynamiques des termes produits entre les variables concentrations molaires :

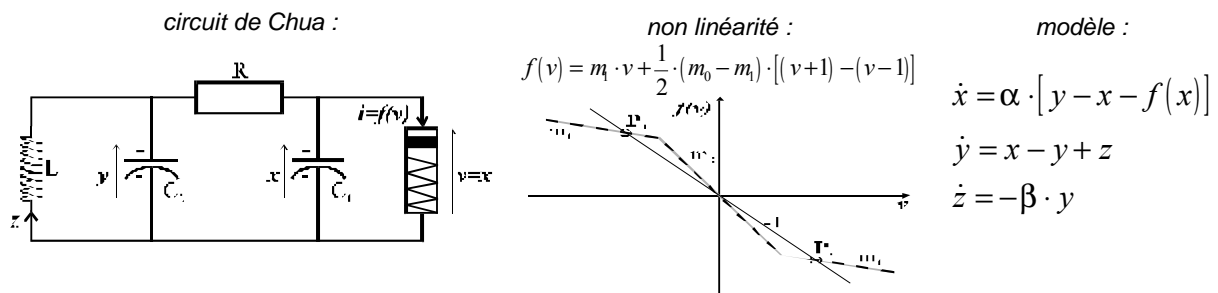
$$v_{ir} X_i \xrightarrow{k_r} v'_{jr} X'_j, \quad \frac{d[X_l]}{dt} = \sum_{r=1}^R (v'_{mr} - v_{lr}) \cdot k_r \cdot \prod_i [X_i]^{v_{lr}}$$

Les cinétiques sont en général monotones dans leur comportement, mais il existe de rares instabilités connues telles que la réaction de Belousov-Zhabotinsky. Son comportement oscillant et apparemment erratique a été décrite en 1958-60 par des chimistes russes, mais cette réaction n'a été clairement identifiée comme chaotique dans sa dynamique que bien plus tard.

L'économie est concernée de manière empirique par les dynamiques non linéaires. L'aspect fractal dans le temps de certaines fluctuations des cours boursiers a été étudié par B. Mandelbrot. La théorie des géométries fractales s'applique à de nombreux autres exemples, tels que les profils côtiers, les chaînes montagneuses, la croissance des plantes en formes arborescentes, les flocons de neige, la forme des

nuages, la subdivision « à l'infini » en petites branches des poumons et des vaisseaux sanguins, etc...

La médecine a également déjà profité des progrès de la théorie des dynamiques chaotiques. L'analyse des électrocardiogrammes a permis de reconstituer l'attracteur étrange auquel appartient l'oscillateur cardiaque. Il a ensuite été possible de trouver une origine précise, dans l'espace des phases de cet oscillateur, à certaines maladies cardiaques telle que la fibrillation. Des méthodes d'électrochocs très faibles permettent de rétablir en douceur l'oscillation du coeur sur un attracteur « sain ». Les électroencéphalogrammes, donc l'activité cérébrale et le système de communication neuronale, pourraient être décrits par des attracteurs étranges. L.O. Chua, l'inventeur d'un oscillateur chaotique électronique très simple qui porte son nom, travaille actuellement sur une tentative de modélisation expérimentale des interconnexions neuronales.



Son circuit chaotique possède un point d'entrée et un point de sortie qui permettent un couplage avec d'autres circuits voisins identiques, à l'image des interconnexions neuronales. La micro-électronique a permis la réalisation de plusieurs milliers de ces circuits, avec leurs interconnexions. Des points d'entrée et de sortie de l'ensemble servent à observer le comportement complexe pour diverses stimuli. Il s'agit ensuite de faire le rapprochement avec le fonctionnement d'un système neuronal réel.

Il n'y a pas que les systèmes naturels qui présentent des dynamiques non linéaires à caractère chaotique. A l'image du circuit de Chua, de nombreux systèmes conçus par l'Homme contiennent des éléments suffisants pour donner lieu à une dynamique chaotique. Citons à titre d'exemples certains systèmes asservis non linéaires, appartenant au domaine de l'automatique, tels que les systèmes bouclés pour commande par impulsion de moteur, les robots manipulateurs exerçant des tâches périodiques, les réseaux de générateurs interconnectés à plusieurs degrés de liberté (réseau E.D.F.), les ensembles à commande numérique non linéaire où les erreurs d'arrondi font apparaître une certaine sensibilité aux conditions initiales ... Dans certains domaines, des propriétés chaotiques ont été utilisées sans même savoir qu'il s'agissait de chaos : l'algorithme récursif unidimensionnel de Lehmer, souvent utilisé en informatique pour générer des nombres aléatoires, est en fait une suite mathématique au comportement fortement chaotique.

C'est dans ce cadre de recherche que s'inscrit le présent travail. L'aspect aléatoire d'une dynamique chaotique sera mis à profit pour effectuer un masquage d'information dans un système de télécommunication. L'aspect déterministe permettra d'extraire à la réception la partie informative du signal codé, à condition de connaître les éléments « clé » de l'oscillateur chaotique qui a servi au masquage.

Nous définirons dans un premier temps certaines bases théoriques concernant les dynamiques non linéaires à caractère chaotique. Le type particulier de la dynamique utilisée sera décrit au chapitre II (système d'Ikeda), ainsi que le montage expérimental et le modèle correspondant. Les différents principes du cryptage par chaos seront détaillés dans le chapitre III. Une série de simulations numériques nous montrera le fonctionnement dynamique et les caractéristiques de notre oscillateur chaotique au chapitre IV. Nous finirons dans le chapitre V, par une description du montage complet mis en oeuvre, et par la présentation des résultats expérimentaux obtenus.

CHAPITRE I :
DYNAMIQUES CHAOTIQUES,
GÉNÉRALITÉS

Les équations différentielles *linéaires* sont relativement bien connues. Il est en général possible de résoudre la majorité des problèmes physiques linéaires. Les systèmes non linéaires qui ont été étudiés avant le développement de la théorie du chaos appartiennent à une classe assez restreinte de l'ensemble des phénomènes physiques non linéaires. Cet ensemble se caractérise par la possibilité de rapporter l'étude, moyennant une série d'approximations, à un problème linéaire connu, dont on peut alors trouver une solution. En dehors de ces cas particuliers faiblement non linéaires, l'analyse des systèmes dynamiques peut se faire par 3 méthodes :

- analytiquement, les solutions sont développées en séries, et une résolution par itérations successives peut parfois permettre d'atteindre une solution asymptotique du problème (méthode des perturbations).
- numériquement, il s'agit d'intégrer pas à pas l'équation déterministe connue qui décrit le phénomène physique ; la solution trouvée est propre aux conditions initiales adoptées pour effectuer l'intégration. Une vision générale sur un grand nombre de solutions nécessite un grand nombre d'intégrations.
- enfin, les *méthodes qualitatives* permettent de donner une description globale des solutions lorsque les méthodes précédentes sont inefficaces. On ne trouve pas alors de description précise sous forme de fonctions, mais les solutions sont décrites dans un espace des phases, où l'on recherche des singularités, des bassins d'attraction, des attracteurs étranges, des exposants de Lyapounov,...

Ce sont les principaux outils de cette dernière méthode qui vont être décrits. Ils donnent une vision globale de l'ensemble des solutions possibles, là où une caractérisation plus précise est impossible par la première méthode (absence de convergence), ou trop riche (solutions trop nombreuses et très variées) par la deuxième méthode. Cette deuxième méthode permet par contre de vérifier, sous certaines réserves (propagation des erreurs de calculs) les résultats de la méthode qualitative sur des exemples particuliers d'intégration numérique.

I. Notions générales pour aborder les dynamiques chaotiques

A. Lois dynamiques locales

Les dynamiques non linéaires peuvent être classées en 3 familles qui sont disposées en lignes dans le tableau I.1. Les colonnes de ce tableau correspondent au nombre de variables indépendantes entrant en jeu dans la loi dynamique.

La famille *I* est appelée *flot (flow)*, elle concerne l'ensemble des dynamiques non linéaires continues. Le chaos ne peut apparaître que s'il y a au moins 3 variables dynamiques (*théorème de Poincaré-Bendixon sur les flots à 2 dimensions*), c'est le cas du modèle de Lorenz, ou encore du circuit de Chua.

La famille *II* correspond à une itération (modèle discret) inversible (le rang n peut s'exprimer en fonction du rang $n+1$). Ce type de transformation est appelé *semi-cascade*. Deux variables suffisent pour donner lieu à un comportement chaotique, comme par exemple dans le modèle de Hénon.

Dans la famille **III**, celle des *cascades*, il s'agit toujours d'une itération, mais cette fois non inversible (par exemple $X_{n+1} = \lambda - X_n^2$ donne lieu à 2 antécédents, $X_n = \pm\sqrt{(\lambda - X_{n+1})}$). Dans ce cas, un système unidimensionnel peut générer un comportement chaotique (cas de l'application logistique, Myrberg, Tresser et Coulet, Feigenbaum).

	1	2	3	4	...	8
I (flot)	point fixe	tore	chaos	chaos
II (semi cascade)	tore	chaos
III (cascade)	chaos	chaos

tableau I.1 : attracteur le plus complexe possible en fonction de la dimension de l'espace des phases et de la famille de loi dynamique.

La dynamique particulière étudiée dans le cadre de ce travail, se situe, selon le modèle utilisé (équation (I.1) ou (I.2)), dans une des deux cases ombragées. Il s'agit soit d'un système dont l'espace des phases est de dimension infinie (modèle continu, flot), soit d'une cascade (modèle discret) où la donnée d'une seule valeur scalaire (dimension 1) initiale suffit à définir complètement l'évolution dynamique.

flot I.8 (continu) :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)t = -X(t) + \beta \cdot \sin^2\{X(t-T) + \Phi\} \quad (I.1)$$

cascade III.1 (discrète) :

$$X_{n+1} = \beta \cdot \sin^2\{X_n + \Phi\} \quad (I.2)$$

Les équations du tableau I.1 sont toutes « temporelles ». Le temps n'est bien sûr qu'une variable physique particulière, qui n'a aucune spécificité mathématique. Des équations différentielles analogues, mais faisant intervenir des dérivées spatiales, présentent le même type de solutions chaotiques potentielles. Le chaos n'apparaît plus dans le temps, mais dans l'espace. Dans de nombreux cas, on parlera même de chaos spatio-temporel lorsque les dérivées se font dans le temps et dans l'espace. Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérerons que la variable temporelle, le système dynamique sur lequel se base ce travail étant de cette nature.

B. Espace des phases, et aspects géométriques

Les équations différentielles non linéaires sont les lois dynamiques locales, qui, une fois intégrées, donnent lieu à un ensemble d'évolutions temporelles riches et variées. Une évolution particulière est obtenue par intégration à partir d'un ensemble de conditions initiales particulières. Le nombre de valeurs initiales à fixer pour effectuer l'intégration d'une évolution particulière, définit le nombre de degrés de liberté du système. Il existe en général un très grand nombre de conditions initiales différentes et physiquement possibles, chacune pouvant a priori donner lieu à une évolution temporelle différente du système. L'étude globale des comportements dynamiques nécessite un mode de représentation qui tienne compte du nombre de degrés de liberté. Une représentation complète implique un nombre de variables d'état aussi grand que le nombre de degrés de liberté. L'**espace des phases** est un ensemble des points permettant la définition unique de chaque état possible du système.

Pour l'exemple classique du pendule, système dynamique continu du second ordre à une variable (l'angle avec la verticale), la position et la vitesse initiales sont 2 données nécessaires à la détermination d'une évolution temporelle. Ce système est de dimension 2, tous les états possibles sont représentés dans un plan, en général à l'aide des variables θ et $(d\theta)/(dt)$.

Une solution particulière de l'équation dynamique est un ensemble de points. Dans le cas d'un flot, ces points évoluent de façon continue, et l'ensemble forme une courbe dans l'espace des phases appelée **trajectoire**. Le temps est absent de l'espace des phases, mais il peut être suggéré par le sens de parcours de la trajectoire. Deux trajectoires correspondant à deux solutions distinctes du problème différentiel ne peuvent se croiser d'après le principe d'unicité et d'existence d'un état dans l'espace des phases.

La loi dynamique impose dans tout l'espace des phases des propriétés locales qui gouvernent l'évolution des trajectoires. Les **paramètres** intervenant dans l'équation différentielle modifient ces propriétés lorsqu'ils sont changés. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons traiter qualitativement de la représentation graphique des trajectoires, et des liens entre les trajectoires et les propriétés locales de l'espace des phases. Les notions générales de dynamique qui vont être évoquées, devront par la suite nous aider à interpréter et comprendre les comportements de l'oscillateur chaotique en longueur d'onde.

1. Singularités

Considérons une dynamique continue à 2 variables x et y , représentée globalement dans un espace des phases à 2 dimensions, et décrite localement par la loi :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r \cdot x + x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} &= -x^2 - y \end{aligned} \quad (1.3)$$

Lorsque les dérivées dans le temps sont nulles, cela signifie que le système n'évolue plus. Cette condition entraîne une relation entre les variables d'état sous forme de 2 équations homogènes à 2 inconnues. Les solutions de ce problème correspondent à un ensemble de points dans l'espace des phases appelés **singularités**, points singuliers, points critiques, ou encore points d'équilibre. Si on place le système sur l'un de ces points, il y reste. Les singularités sont donc des points importants dans la description des trajectoires. Elles sont définies de manière plus générale par :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0}, \text{ pour le flot } \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}) \quad (1.4)$$

$$X_n = F[X_n] \text{ dans le cas discret } X_{n+1} = F[X_n] \quad (1.5)$$

Dans notre exemple à 2 dimensions, il y a au plus (cas où $r > 0$) 3 points fixes : $(0;0)$, $(-\sqrt{r};-r)$, et $(\sqrt{r};-r)$. Une fois ces points fixes trouvés, il s'agit de savoir de quelles façons ils se comportent par rapport à de petites perturbations. Une analyse locale de la loi dynamique en ces points permet de définir des conditions de stabilité dans les différentes directions de l'espace. En terme de trajectoires, la même étude va nous permettre de prévoir si une trajectoire passant dans un voisinage particulier

de ces points, va subir une attraction ou une répulsion, selon la position de ce voisinage par rapport aux directions de stabilité ou d'instabilité.

2. Stabilité des singularités

Une approche linéaire autour de chaque point fixe permet de déterminer localement des critères de stabilité. Dans le cas du flot continu, le problème consiste à extraire les valeurs propres et vecteurs propres du Jacobien de la fonction non linéaire \vec{f} au point fixe \vec{u}_0 considéré. Le Jacobien J de \vec{f} est défini par la matrice d'éléments :

$$J_{k,l} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_l} \right)_{\vec{u}=\vec{u}_0}. \text{ Dans le cas de (1.3) : } J = \begin{bmatrix} r+y & x \\ -2 \cdot x & -1 \end{bmatrix}$$

$J(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est aussi appelé *opérateur tangent*, il peut être utilisé en tout point de l'espace des phases pour trouver la direction d'évolution d'une trajectoire passant par ce point. Cet opérateur permet d'obtenir l'équation d'évolution linéarisée d'un vecteur $\delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{u}_0$ en un point $\vec{u}_0 = (x_0, y_0)$:

$$\frac{d(\delta\vec{u})}{dt} = J(x, y) \cdot (\delta\vec{u}) \quad (1.6)$$

Les vecteurs propres de J représentent des directions locales stables ou instables appelées aussi **variétés**. Les valeurs propres caractérisent la stabilité par le signe de leur partie réelle (instable = positif), et la « rapidité » du caractère stable ou instable par leur amplitude (homogène à l'inverse d'un temps).

Dans l'exemple du système (3), le point (0;0) possède une variété stable selon y , et une variété dont la stabilité dépend de r selon x . Si $r < 0$ le point fixe est appelé *puits* ou *noeud stable* (valeurs propres toutes négatives, -1 et r). Si $r > 0$, il s'agit d'un *col* ou *noeud instable* ou *point selle* (une valeur propre positive, et une négative).

Lorsque le paramètre r varie continûment des valeurs négatives aux valeurs positives, il y a **bifurcation** du système dynamique à l'origine (0,0) pour la valeur $r=0$. Une **bifurcation** est un changement structurel d'une propriété locale de l'espace des phases. Lorsque r reste positif ou négatif, il y a juste un changement quantitatif sans bifurcation des propriétés de l'origine, dont une variété reste plus ou moins stable, ou plus ou moins instable, sans changer de stabilité. Il existe d'autres formes de bifurcations. Par exemple, celle que nous verrons plus tard lors de la cascade par dédoublement, et qui fait perdre sa stabilité à un point fixe en faisant simultanément apparaître 2 autres points fixes dans son voisinage, dans 2 directions opposées. L'évolution structurelle de l'espace des phases au cours de la bifurcation de (1.3) à l'origine est représentée à la figure 1.2. Une collection de représentations géométriques des différentes bifurcations peut être trouvée dans la référence [1.1].

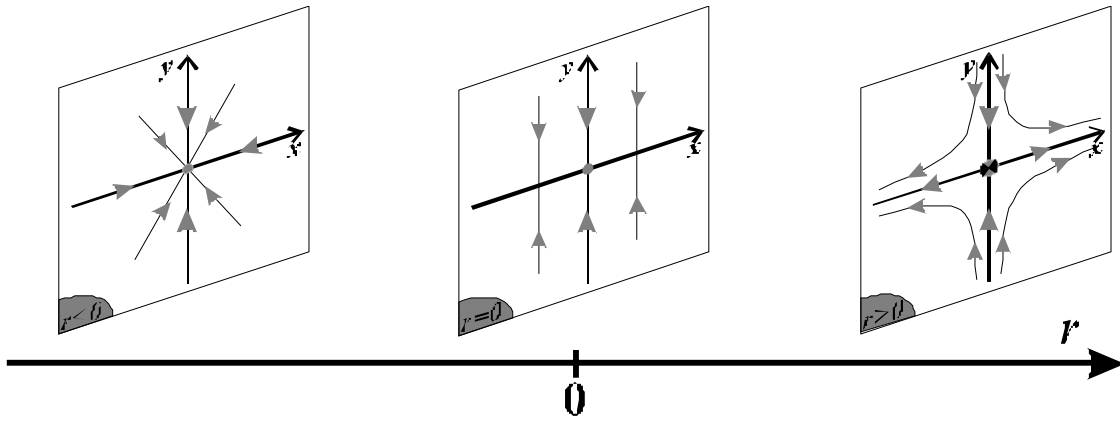


Figure I.2 : bifurcation noeud/col du système (I.3) dans le voisinage de l'origine.

Le point $(\sqrt{r}; -r)$, de même que son symétrique $(-\sqrt{r}; -r)$, donne lieu à une bifurcation lorsque r varie : pour $r < 0$, ce point fixe possède une variété stable et une instable, selon les directions respectives $\{1; -0,5 \cdot (1 + \sqrt{1 - 8 \cdot r})\}$ et $\{1; -0,5 \cdot (1 - \sqrt{1 - 8 \cdot r})\}$. Pour $0 < r < 1/8$, le point fixe a bifurqué pour devenir un *puits*, les directions des variétés gardent les mêmes expressions en fonction de r . En $r = 1/8$, le point fixe possède une racine double, il est encore stable (pas de bifurcation), ce cas particulier de point fixe est appelé *noeud impropre*. Pour $r > 1/8$, le point fixe est toujours stable, mais les racines complexes conjuguées (à partie réelle négative, d'où la stabilité) font converger les trajectoires du voisinage en tournant : le point fixe est appelé *point spiral stable*.

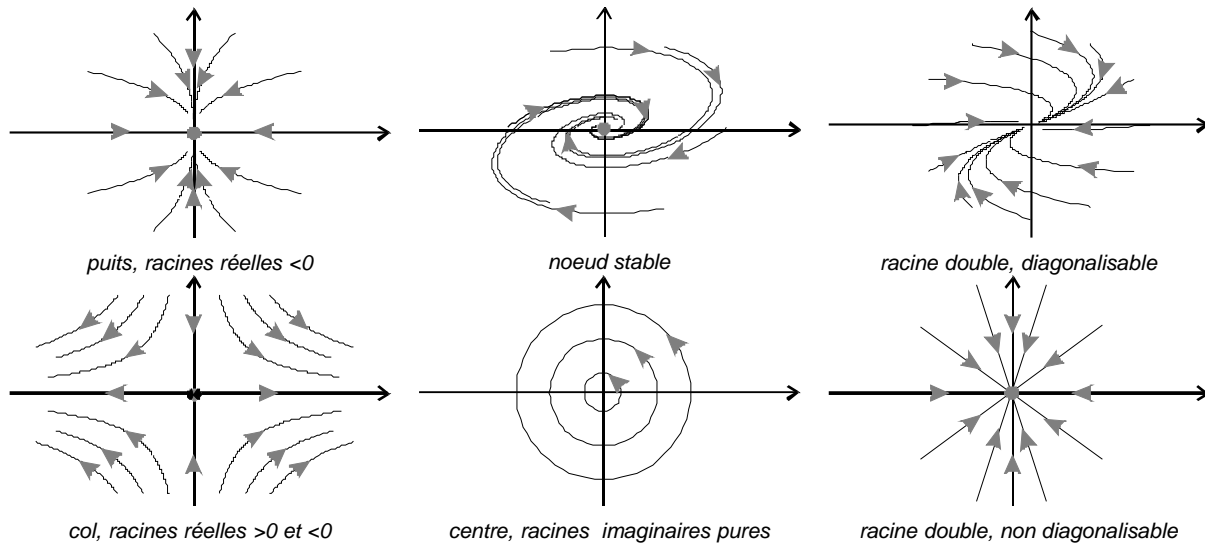


Figure I.3 : trajectoire dans le voisinage des singularités dans un espace des phases à 2 dimensions. Les cas symétriques instables s'obtiennent en inversant les flèches.

Les autres possibilités pour un point fixe sont le *point spiral instable* (racines complexes conjuguées à partie réelle positive), le *centre* (cas marginal des racines complexes pures), et la *source* (racines réelles positives, point fixe instable). Toutes les variétés du point fixe en dimension 2 sont résumées graphiquement à la figure I.3 avec des exemples trajectoires autour de ces singularités.

Les singularités localisent dans l'espace des phases des propriétés particulières qui infléchissent les trajectoires. L'étude de la stabilité ne donne pas seulement des renseignements dans le voisinage de ces points, elle permet aussi de déterminer

une orientation des trajectoires à plus grande distance. En considérant une vue d'ensemble de l'espace, celui-ci s'organise en zones rattachées aux différentes singularités.

3. Séparatrices, bassins d'attraction

Les *séparatrices* sont des lignes particulières qui forment les frontières de ces zones. Un exemple est fourni par le système (I.3). Dans le cas $r > 0$, l'origine est un col, donc instable, et les 2 singularités de part et d'autres sont des points fixes stables. L'axe des ordonnées porte la variété stable de l'origine, elle est un axe de symétrie par rapport aux 2 singularités stables, elle représente la séparatrice du système dynamique pour le cas $r > 0$. Le demi plan droit est le **bassin d'attraction** du point $(\sqrt{r}; -r)$, car toutes les trajectoires issues de conditions initiales dans cette zone finissent par converger vers cette singularité stable. Le demi plan gauche est bien sûr le bassin d'attraction de l'autre singularité stable. La séparatrice est le bassin d'attraction de l'origine pour $r > 0$. Lorsque $r < 0$, tout l'espace des phases est le bassin d'attraction de l'origine.

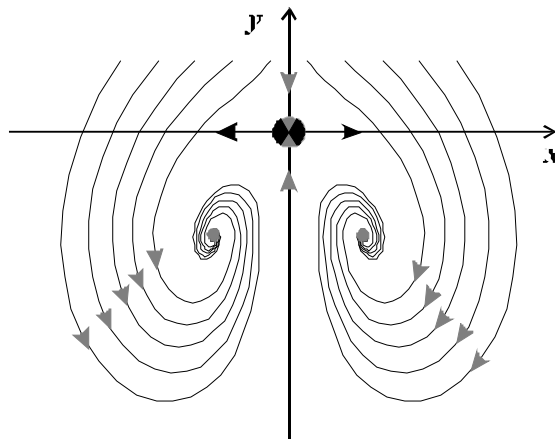


Figure I.4 : 10 trajectoires du portrait des phases du système (I.3) pour $r=1,5$.

D'autres courbes caractéristiques passant par les singularités jouent un rôle important dans l'allure du portrait des phases d'un système dynamique. On appelle *homocline* une trajectoire qui forme une boucle dans l'espace des phases, en partant d'un point fixe selon une variété instable, et en revenant sur ce même point par une variété stable. Ce type de points est très important dans la compréhension de la structure du chaos dans l'espace des phases, comme nous le verrons plus loin. Les courbes *hétéroclines* joignent deux singularités différentes, partant d'une variété instable et arrivant sur une variété stable. Notre exemple de flot à 2 dimensions présente une trajectoire hétérocline entre l'origine, et chacun des deux autres points fixes (le sens de parcours s'inverse à la bifurcation en $r = 0$).

Les points fixes sont les limites asymptotiques les plus simples d'une trajectoire. Nous allons dans la partie suivante décrire d'autres trajectoires asymptotiques particulières, les cycles, et finalement les attracteurs étranges.

4. Autres exemples de portrait de phases

a. Cycles

Nous avons déjà évoqué un cas de trajectoire cyclique lorsque nous avons rencontré un point fixe dont l'opérateur tangent possède 2 racines complexes pures. C'est l'exemple typique de l'oscillateur linéaire non amorti. Dans ce cas, n'importe quel point initial de l'espace des phases donne lieu à une trajectoire cyclique. Un ensemble de conditions initiales à l'intérieur d'un disque, va évoluer sans se déformer en rotation autour du point fixe particulier car le système est conservatif : un volume (surface en dimension 2) reste constant lorsqu'on lui applique la loi d'évolution.

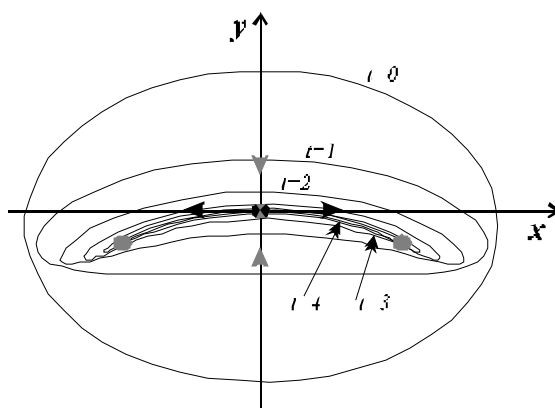


Figure 1.5 : aspect dissipatif du système (1.3) : le disque initial évolue asymptotiquement vers les 3 points fixes ($r=0.025$).

Au contraire, un système *dissipatif* transforme un volume initial de son espace des phases en un ensemble dont le volume tend vers 0. L'évolution d'un disque dans notre cas bidimensionnel est représenté à la figure 1.5. Les points du disque appartenant à l'axe vertical sont sur la variété stable de l'origine, ils vont être marginalement attirés vers le point fixe $(0;0)$. Tous les autres points du disque se dirigent vers les 2 attracteurs stables (cas $r=0,025$), d'où la déformation du disque, paramétrée dans le temps.

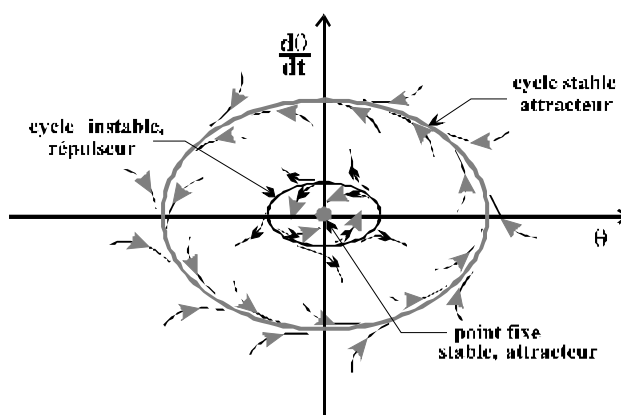


Figure 1.6 : allure du portrait de phase du pendule réel entretenu.

Les systèmes dissipatifs permettent d'obtenir des trajectoires asymptotiques stables de dimension très inférieure à l'espace des phases. Le point fixe stable est de

dimension zéro. Une courbe fermée est de dimension 1, il s'agit d'un cycle. Un exemple classique de cycle est fourni par le modèle du pendule réel entretenu. C'est un système dissipatif puisqu'il est soumis aux frottements : pour des oscillations initiales trop faibles, la position d'équilibre verticale correspond à un attracteur du type point fixe stable, placé à l'origine dans l'espace des phases.

Pour des impulsions initiales suffisantes, le pendule se met à osciller avec une période et une amplitude constantes : il évolue dans l'espace des phases sur une courbe fermée, un attracteur stable, puisque toute sur-oscillation est rapidement absorbée, et toute sous-oscillation est compensée par le système d'entretien des oscillations. L'allure du portrait de phase du pendule réel entretenu est indiqué figure I.6, les variables dynamiques étant la position angulaire et sa dérivée temporelle. On remarque sur cette figure un point fixe stable à l'origine, dont le bassin d'attraction est limité par une séparatrice fermée : un cycle répulseur. Les points à l'intérieur donnent lieu à des trajectoires qui convergent vers l'origine (position verticale du pendule), et les points juste à l'extérieur sont « éjectés » vers le régime périodique grâce au mécanisme d'entretien des oscillations. Les oscillations de forte amplitude sont atténuées à cause des frottements. Entre cette zone de fortes amplitudes et le cycle répulseur on trouve un cycle attracteur qui correspond au fonctionnement périodique habituel du pendule.

Un cycle quelconque est caractérisé dans l'espace des phases par une courbe fermée. Sa dimension reste 1, son évolution temporelle est périodique et fait apparaître un spectre discret de fréquences toutes multiples d'une fréquence fondamentale. Une trajectoire qui comprend plusieurs fréquences toutes commensurables (dont le rapport est un nombre rationnel), forme également une courbe fermée, donc un cycle, qui se dessine sur un tore. Lorsque 2 de ces fréquences sont incommensurables, la trajectoire décrit un ensemble dense à 2 dimensions évoluant sur un tore dans l'espace des phases. Ce régime dynamique est appelé quasi-périodique.

Pour aboutir à une trajectoire continue d'une plus grande complexité, le théorème de Poincaré-Bendixon [I.2] nous apprend que l'espace des phases doit être de dimension 3 au moins, la dimension 2 ne pouvant donner lieu au mieux qu'à une trajectoire sur un tore. Ce théorème peut se comprendre physiquement d'après la « condition d'unicité et d'existence » des différentes solutions d'une équation différentielle. En considérant l'espace des phases, ceci signifie qu'en dimension 2, des trajectoires correspondant à 2 solutions distinctes du système différentiel ne peuvent se croiser. Une seule trajectoire ne peut donc recouvrir de façon dense une portion bornée de son espace des phases, en l'occurrence un plan. Le résultat du théorème est que toute trajectoire en dimension 2 évolue asymptotiquement soit vers un cycle limite, soit vers un point fixe.

b. Trajectoires chaotiques

La dimension 3, par contre, permet des enchevêtrements de la même trajectoire, sans donner lieu à une intersection. Pour comprendre cela, il suffit de s'imaginer une surface torsadée en 3 dimensions telle qu'un ruban de Möbius. Une seule trajectoire a alors la possibilité géométrique de remplir un espace borné de façon plus dense qu'en dimension 2, sans jamais se croiser. C'est ce que l'on observe sur des exemples connus de dynamiques chaotiques, tels que l'attracteur de Lorenz, le

circuit de Chua, ou encore l'attracteur reconstitué de la réaction de Belousov-Zabotinsky (figure I.7).

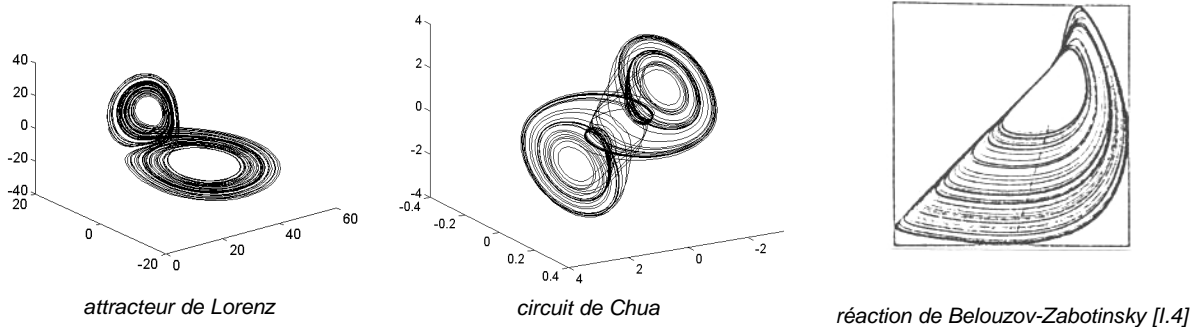


Figure I.7 : aspect torsadé de trajectoires chaotiques classiques dans un espace des phases à 3 dimensions.

Notons qu'une dynamique chaotique n'est pas nécessairement stable. Si elle l'est effectivement, on appelle son lieu d'évolution dans l'espace des phases un **attracteur étrange** (figure I.8.1).

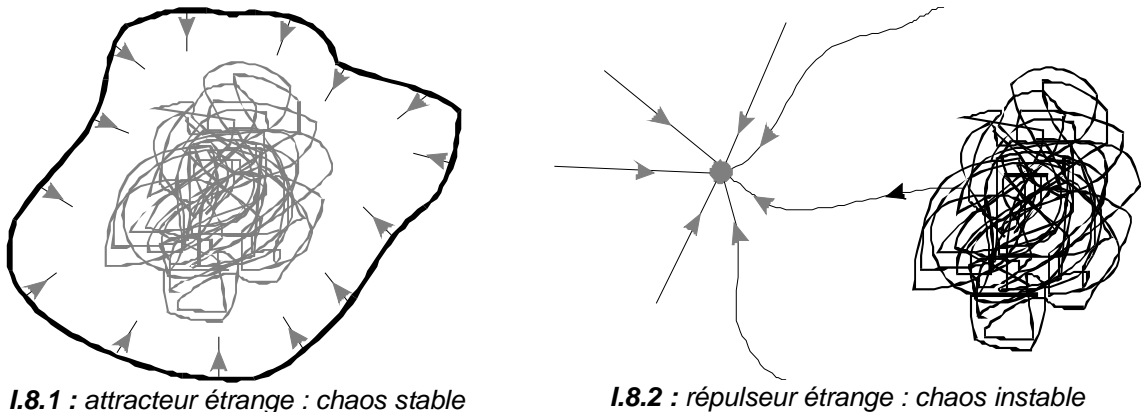


Figure I.8 : stabilité d'une trajectoire chaotique.

Une évolution chaotique, peut également se manifester de façon transitoire, on parle alors de chaos instable évoluant sur un **répulseur étrange**. De tels transitoires chaotiques peuvent durer assez longtemps. Lors d'une simulation numérique, il faut faire attention à intégrer la dynamique pendant un temps suffisant pour s'assurer du caractère stable du chaos. Après ce transitoire, la trajectoire peut finir tout simplement vers un point fixe stable (figure I.8.2).

Nous allons maintenant décrire la façon dont apparaît structurellement une trajectoire chaotique dans l'espace des phases. La dimension 3 autorise le mélange des trajectoires sans croisement, c'est-à-dire sans s'opposer à la condition d'unicité et d'existence. Le processus à la base de ce mélange dense de trajectoire est appelé **étirement-repliement**. L'idée d'étirement est à la base de la propriété de **sensibilité aux conditions initiales** : si l'on étire 2 trajectoires infiniment proches, leur écart initial va nécessairement augmenter au fur et à mesure de l'opération d'étirement.

La dynamique évoluant dans un espace borné, les trajectoires infiniment proches ont besoin, pour s'écarter, d'un étirement infiniment long. Pour conserver une évolution dynamique dans un espace borné, un deuxième processus est nécessaire, le

repliement. Si le repliement est suffisamment présent tout au long de la trajectoire, le domaine où évolue le chaos est stable, c'est un attracteur. Ces principes ont été très bien décrits par le mathématicien Smale, qui en a donné une image parlante, celle du fer-à-cheval. L'application du fer-à-cheval consiste, à partir d'un segment initial, à l'étirer, puis à le replier, lui donnant ainsi une forme de fer-à-cheval. Cette opération répétée à l'infini, permet d'obtenir une courbe infiniment longue, tout en restant dans une surface limitée. L'étirement-repliement est à l'origine de la structure en *feuillet*s que l'on retrouve dans de nombreuses dynamiques chaotiques continues dont la dimension de l'attracteur est comprise entre 2 et 3 : ces feuillet s imbriqués sont plus denses qu'une surface, tout en étant de volume nul.

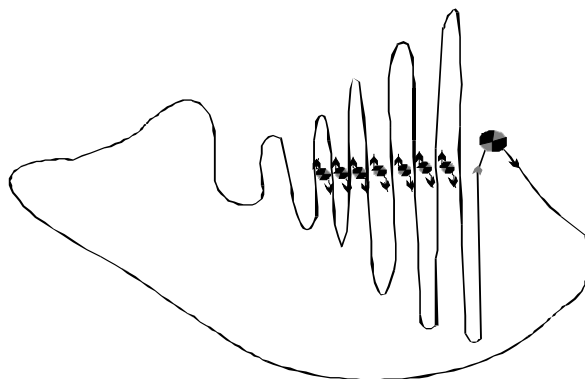


Figure I.9 : points homoclines et étirement-repliement dans l'espace des phases.

L'origine géométrique de cette opération d'étirement-repliement est l'accumulation, après de nombreuses bifurcations (avec l'évolution d'un paramètre dynamique), d'un grand nombre de points homoclines dans un espace à 3 dimensions au moins. Ces points possèdent une variété stable, et une variété instable. Ils donnent naissance à des trajectoires partant de leur variété instable, qui reviennent ensuite sur leur variété stable. La figure I.9 illustre cette action des points homoclines qui étirent selon leur(s) direction(s) instable(s), et effectuent un repliement grâce à leur direction stable, formant globalement une succession de portions de trajectoires infiniment proches.

A ce stade, il paraît intéressant de donner quelques précisions de terminologie sur le caractère **chaotique** (=étrange) ou (et) **fractal** de certaines dynamiques ([I.3] p.624-625). Ces 2 notions sont a priori indépendantes. L'aspect fractal est caractéristique d'une structure auto-similaire, telles que les feuillet s imbriqués. Le terme de chaos s'applique à un système dynamique qui présente la propriété de sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire qu'il se caractérise par une croissance exponentielle des petites erreurs au cours de l'évolution dynamique. Ces définitions s'appliquent aux dynamiques discrètes ou continues. Citons des exemples connus : le système de Feigenbaum, selon ces définitions, n'est pas chaotique, mais il est fractal. Les modèles de Lorenz (continu 3D) ou de Hénon (discret 2D) sont à la fois chaotiques et fractals, ils possèdent leur attracteur étrange. L'itération d'Arnold (discret 2D : $(x_{n+1}; y_{n+1}) = (x_n + y_n; x_n + 2 \cdot y_n) \pmod{1}$) est chaotique (structure de type étrange dans le plan), mais non fractale.

5. Coupe de Poincaré

Une coupe de Poincaré est un outil d'étude visuel des propriétés dynamiques dans l'espace des phases. Elle permet de baisser d'une unité la dimension de l'espace d'étude, donc de ramener l'observation à un plan dans le cas des systèmes à 3 degrés de liberté. Un autre aspect de la coupe de Poincaré est le passage d'une loi dynamique continue à une loi discrète. Par rapport à la classification des systèmes dynamiques proposés dans la partie A, une coupe de Poincaré permet de reporter l'étude d'un flot de dimension N , à celle d'une semi-cascade, ou d'une cascade, de dimension $(N-1)$. Un aspect important de cette coupe est qu'elle conserve les propriétés dynamiques globales de la trajectoire, telles que la dimension fractale (à une unité près), ou encore les exposants de Lyapounov, etc... (voir partie II).

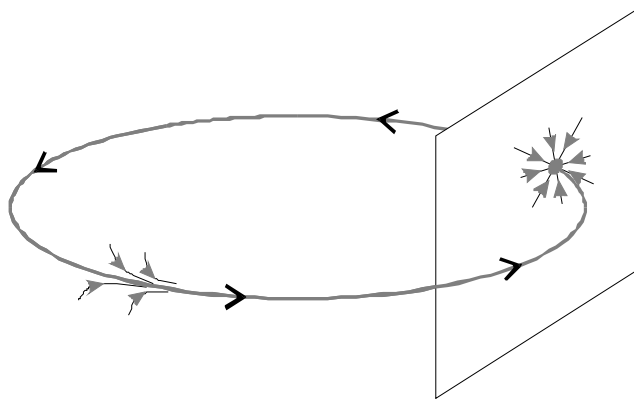


Figure I.10 : principe de la coupe de Poincaré, cas d'un cycle stable d'ordre 1 transformé en point fixe stable.

Le principe de la coupe est illustré à la figure I.10. Le critère de coupe est constitué en général par le passage du flot au travers d'une surface. Cette technique est parfois appelée étude stroboscopique. La loi dynamique $\dot{\vec{u}}(t) = F[\vec{u}(t), \vec{\Lambda}]$ ($\vec{\Lambda}$ symbolisant les paramètres) devient dans le plan de coupe une transformation discrète $\vec{X}_{n+1} = T[\vec{X}_n, \vec{\Lambda}]$, appelée *application de premier retour*, dépendant des mêmes paramètres et telle que $\dim \vec{X} = \dim \vec{u} - 1$. La discrétisation entraîne une autre approche des différents modes dynamiques. Un cycle sera représenté par un point (et non 2 points, le critère de coupe tenant compte du sens de traversée de la section de Poincaré) et non plus une courbe fermée. Ce point sera solution de l'équation $\vec{X}_n = T[\vec{X}_n, \vec{\Lambda}]$. Un cycle d'ordre k correspond à k points dans la section, qui vérifient $\vec{X}_n = T^k[\vec{X}_n, \vec{\Lambda}]$. Une trajectoire portée par un tore, avec 2 fréquences incommensurables, est transformée en une courbe fermée. La structure en feuillet des attracteurs étranges apparaît dans la section sous forme de lignes imbriquées. Une trajectoire dense sur un ruban (modèle de Lorenz) devient un ensemble de portions de courbe, discontinues mais denses. On peut ainsi définir une entière correspondance entre la topologie de l'espace des phases complets et celle de la section de Poincaré.

Le choix de la section n'est par contre pas quelconque. Des problèmes peuvent se poser si, par exemple, une trajectoire forme une boucle juste avant la section choisie ; cette boucle ne sera pas « vue » au travers de la section de Poincaré. On essaie

en général de prendre une section que la trajectoire traverse toujours, ou presque, de manière orthogonale.

6. Les différentes transitions ou « routes » vers le chaos

Trois scénarios différents de « route » vers le chaos ont été identifiés. Le plus connu est sans doute **la cascade par dédoublement**, il sera détaillé plus loin puisqu'il concerne le système dynamique que nous avons utilisé. Il s'agit du même scénario que celui intervenant pour l'application logistique étudiée par Feigenbaum. Il consiste en une succession géométrique de bifurcations par accroissement d'un paramètre. A chaque bifurcation les points fixes d'un cycle perdent leur stabilité, en faisant apparaître de nouveaux points fixes, deux fois plus nombreux, et correspondant à un cycle stable d'ordre deux fois plus élevé. Ce type particulier de bifurcation se caractérise dans l'espace des phases par la création de ces deux points fixes stables dans le voisinage immédiat de l'ancien qui a perdu sa stabilité.

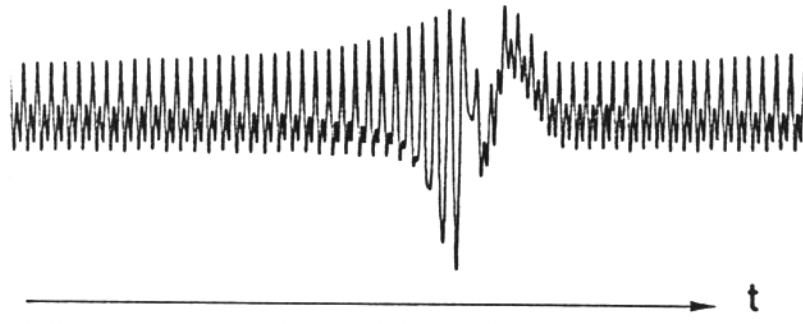


Figure I.11 : évolution typique d'une dynamique chaotique obtenue par le scénario de l'intermittence [i.4].

Le deuxième type de route vers le chaos, l'*intermittence*, se produit lorsqu'un point fixe perd sa stabilité, sans créer une variété stable dans son voisinage direct. La perte de stabilité n'est toutefois pas violente. Lorsque la trajectoire passe proche de l'ancien point stable, elle y effectue une *évolution laminaire* lente, mais l'absence de stabilité la fait quitter inévitablement cette région. L'attracteur étrange est constitué de cette variété instable, et d'autres variétés plus éloignées, mais environnantes, qui permettent à la trajectoire, une fois qu'elle a quitté le voisinage de l'instabilité, d'y revenir de manière violente et systématique : il s'agit d'une phase de l'orbite chaotique qualifiée de *turbulente*. Cette *phase turbulente* ramène la trajectoire d'une manière toujours différente vers la variété instable, de telle sorte qu'une décorrélation s'effectue entre les phases laminaires successives. La figure I.11 représente une évolution typique d'une dynamique chaotique atteinte par une intermittence.

Enfin, la troisième route vers le chaos apparaît dans des systèmes où peuvent co-exister plusieurs fréquences de rapport rationnel ou irrationnel. Le mécanisme dynamique important dans la description de cette route est le phénomène d'accrochage entre deux fréquences d'oscillation. Le paramètre de contrôle influe légèrement sur les valeurs de ces fréquences. Le phénomène d'accrochage et les non linéarités font passer le système d'un état périodique (mouvement sur un tore, 2 fréquences commensurables), à un état quasi-périodique (même mouvement, mais dense sur le tore car les fréquences sont incommensurables), ou encore apériodique (chaotique, pas de fréquence fixe, spectre large). La distinction entre un mouvement

quasi-périodique ou apériodique (chaos) peut se faire facilement à l'aide d'une analyse de Fourier.

Ce type d'analyse spectrale est par contre impuissante à caractériser le chaos. D'autres outils ont dû être développés pour quantifier la nature déterministe d'une dynamique chaotique, quelle que soit la route empruntée par le chaos. Il est possible par ces méthodes de faire une distinction quantitative assez précise entre une dynamique chaotique et une évolution purement aléatoire (ex : mouvement Brownien, systèmes à un très grand nombre de degrés de liberté). Ce sont ces techniques propres à l'étude des dynamiques chaotiques que nous allons maintenant aborder.

II. Les outils d'étude du chaos

L'espace des phases est un moyen de visualiser une trajectoire d'un système dynamique, il permet une appréciation purement qualitative de l'évolution. Il est possible d'y repérer l'ordre du chaos au travers de structures géométriques. Mais il n'est pas possible d'en extraire directement des informations quantitatives sur cet ordre caché. De plus, de très nombreux systèmes dynamiques évoluent dans un espace de dimension supérieure à 4, pour lequel même une coupe de Poincaré ne permet plus de donner des informations visuelles dans notre espace quotidien limité à 3 dimensions. Les notions que nous allons maintenant définir permettent une analyse chiffrée de l'évolution globale d'une trajectoire chaotique, même dans un espace des phases de dimension élevée.

A. Entropie

1. Signification

Cette notion empruntée à la thermodynamique et à la physique statistique trouve sans difficulté sa signification dans la théorie des dynamiques non linéaires. Une dynamique chaotique possède une évolution apparemment désordonnée, mais elle se distingue par un ordre caché du fait de son caractère déterministe. Quoi de plus naturel alors d'utiliser la variable entropie pour mesurer le degré de désordre, d'ordre, ou de complexité.

Dans le cadre de la théorie de l'information, l'entropie est une mesure de la création naturelle d'information par le système dynamique. Elle peut alors être vue comme une mesure de la sensibilité aux conditions initiales. En effet, deux trajectoires initiales très voisines finissent rapidement par se distinguer l'une de l'autre, c'est-à-dire par représenter deux informations différentes.

2. Définition

La définition se rapproche de celle donnée en physique statistique. Considérons l'attracteur où évolue la dynamique dans l'espace des phases, et définissons une mesure ρ de la probabilité de visite des points P_i de l'attracteur. L'entropie de la dynamique sur cet attracteur est alors mesurée par l'expression :

$$h(\rho) = -\sum_i \rho(P_i) \cdot \ln[\rho(P_i)] \quad (1.7)$$

Cette définition est simplifiée par rapport à celle du contexte topologique plus complète que l'on trouvera dans la référence [I.3]. L'entropie $h(\rho)$ est également appelée *taux moyen de création d'information*, ou *invariant de Kolmogorov-Sinai*.

Notons l'existence d'une entropie topologique, H , moins adaptée à l'étude des systèmes chaotiques car elle ne tient pas compte de l'aspect probabiliste de la visite du point P_i de l'attracteur. Elle se calcule à l'aide du nombre de trajectoires nouvelles $\mathcal{N}(\varepsilon, n)$ dans une partition de l'espace par cellules ε , au bout de n passages dans une coupe prédéfinie de l'espace : $H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \ln[\mathcal{N}(\varepsilon, n)] \right\}$

[I.5]. Des définitions plus précises d'un point de vue mathématique peuvent être trouvées dans la référence [I.3]

3. Discussion

ρ est une mesure statistique liée à la fréquence de passage, au cours de l'évolution dynamique, dans un volume élémentaire de l'espace des phases, donc sur l'attracteur de la dynamique. Il est alors clair que l'entropie h est une grandeur caractéristique de l'évolution globale du système. C'est une propriété liée à l'ensemble de la trajectoire générée par l'équation différentielle locale, et par la donnée de n'importe quelle condition initiale appartenant au bassin d'attraction de la trajectoire en question.

Une mesure correcte de ρ doit faire abstraction de la période transitoire qui sépare l'état du système à la donnée de la condition initiale, et son état « asymptotique » où il a atteint un attracteur.

Notons enfin que la notion d'entropie pour les systèmes dynamiques chaotiques semble intéressante pour faciliter la compréhension de certains phénomènes, mais son utilité effective dans la caractérisation du chaos est remise en cause par certains auteurs [I.5].

B. Dimensions

Un outil fréquemment employé dans l'étude et la caractérisation d'un système chaotique est la dimension, non entière, de son attracteur. La dimension est également une grandeur globale, elle caractérise le remplissage de l'espace des phases par la trajectoire chaotique. Plusieurs définitions de dimension sont utilisées.

Soit une cellule élémentaire de l'espace des phases, de « grandeur linéaire » (arête pour un cube ou rayon pour une sphère) ε . Il s'agit alors de compter le nombre de cellules $\mathcal{N}(\varepsilon)$ nécessaires au recouvrement de la trajectoire chaotique dans l'espace des phases. La **dimension de capacité de Kolmogorov** D_{CK} , encore appelée *capacité*, ou *dimension fractale* (Mandelbrot) est définie par l'expression :

$$D_{CK} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln[\mathcal{N}(\varepsilon)]}{\ln[1/\varepsilon]} \quad (I.8)$$

Dans la pratique on effectue le calcul de D_{CK} pour différentes valeurs de ε et on mesure la pente de la droite $\ln[\mathcal{N}(\varepsilon)]$ en fonction de $\ln[1/\varepsilon]$.

D_{CK} ne tenant pas compte du nombre de points de l'attracteur contenus dans une cellule, on définit une autre dimension qui fait intervenir la probabilité p_j de visite de la cellule élémentaire n° j , la *dimension d'information* :

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(\varepsilon)}{\ln[1/\varepsilon]}, \text{ avec } h(\varepsilon) = - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} p_j \cdot \ln(p_j) \quad (1.9)$$

En général on a $D_I \leq D_{CK}$, et $h(\varepsilon)$ croît logarithmiquement avec $1/\varepsilon$, on a donc approximativement la relation $h(\varepsilon) = h_0 - D_I \cdot \ln(\varepsilon)$.

Enfin une troisième dimension est pratiquement plus utilisée, car plus facile à calculer, il s'agit de la *dimension de corrélation* D_C . Elle fait intervenir une intégrale de corrélation $C(\varepsilon)$, elle-même définie à l'aide d'un ensemble $\{X_i\}_{i=1 \rightarrow N}$ de points de la trajectoire, obtenus en général expérimentalement à l'aide d'une série échantillonnée $X_i = X(t+i \cdot \tau)$ avec $\tau = \text{constante}$. A cause de la sensibilité aux conditions initiales, la plupart des couples (X_i, X_j) avec $i \neq j$ sont des points du plan dont l'évolution est pseudo aléatoire. Mais appartenant au même attracteur, ils sont spatialement corrélés, ce qui se mesure à l'aide de $C(\varepsilon)$. Finalement on obtient les définitions suivantes :

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \{ \text{nombre de paires } (i, j) \text{ telles que } |X_i - X_j| < \varepsilon \} \quad (1.10)$$

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln[C(\varepsilon)]}{\ln[\varepsilon]} \quad (1.11)$$

On a en général la relation d'ordre $D_C \leq D_I \leq D_{CK}$. Le calcul de D_C pour un signal réellement aléatoire (bruit) donne une valeur proche de m , la dimension de l'espace des phases. Si D_C est inférieure m , on peut en général conclure à une origine déterministe (chaotique) du signal étudié.

D'autres dimensions, telles que celle de *Hausdorff* ou de *Lyapounov* sont quelques fois utilisées, on pourra se reporter aux références [1.3] et [1.5] pour plus de précisions.

De tels calculs n'ont pas été effectués sur notre modèle chaotique (sauf pour un cas particulier à faible dimension), mais il serait intéressant de les mettre en oeuvre dans le cadre d'une étude plus théorique sur les propriétés dynamiques et la complexité du système utilisé. La dimension pourrait être un outil de choix dans l'évaluation théorique rigoureuse du degré de confidentialité du cryptage par chaos.

C. Exposants de Lyapounov

1. Généralités

De toutes les grandeurs globales qui permettent de caractériser la dynamique chaotique, les exposants de Lyapounov sont sûrement ceux qui fournissent le plus de renseignements. Leur définition est directement liée à la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI) des systèmes chaotiques. Un attracteur possédant au moins un exposant de Lyapounov positif est qualifié d'étrange, ou encore de chaotique.

Soient 2 trajectoires infiniment proches dans l'espace des phases, (δx) étant l'écart entre elles. Cet écart, compte tenu de la propriété de SCI, va avoir tendance à s'accroître jusqu'à une valeur correspondant à l'extension de l'attracteur ; les 2 trajectoires initialement très proches n'ont alors plus rien de commun. Si on modélise l'évolution de l'écart par une croissance exponentielle, on cherche à en extraire une valeur $\gamma = \frac{1}{t} \cdot \ln\left(\frac{\delta x(t)}{\delta x_0}\right)$. Mais pour être une propriété globale de la dynamique, γ ne doit pas dépendre de t . Un système dynamique déterministe présente effectivement une ou plusieurs valeurs bien précises telles que γ qui sont caractéristiques de l'évolution globale. Le tableau II.1 extrait de la référence [I.5] indique les différentes situations possibles en termes de signe des exposants de Lyapounov, pour différents régimes dynamiques, dans un contexte continu et discret.

Régime	Temps continu	Temps discret
Stationnaire	-- ...	-- ...
Périodique	0 ---- ...	---- ...
Bipériodique	0 0 --- ...	0 --- ...
n-périodique	0 ... 0 --- ... (n zéros)	0 ... 0 - ... (n-1 zéros)
Chaotique	(au moins un +) + ... + 0 0 - ...	(au moins un +) + ... + 0 - ...

Tableau I.12 : signes et nombres d'exposants de Lyapounov ([I.5] p.222)

Certaines remarques peuvent encore être faites, de manière qualitative. Dans le cas d'un système dissipatif, il y a au moins un exposant de Lyapounov négatif (au moins une direction de contraction). De plus, la dimension de l'attracteur étrange étant inférieure à celle de l'espace des phases, la somme de tous les exposants de Lyapounov est négative, de manière à obtenir un attracteur de volume nul [I.6].

2. Définitions

Dans le cas d'une itération unidimensionnelle $X_{n+1}=f(X_n)$, il est assez simple d'extraire la loi d'évolution d'un écart infinitésimal $(\delta X)_n$:

$$(\delta X)_{n+1} = f(X_n) - f(X_n + (\delta X)_n) = f'(X_n) \cdot (\delta X)_n \quad (I.12)$$

Un exposant global, résumant toutes les propriétés de divergence ou de convergence sur l'ensemble des valeurs $\{X_i\}_{i=1 \dots n}$ pourra alors être obtenu par moyennage à la limite :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[|f'(X_i)| \right] \quad (I.13)$$

Il faut bien noter, déjà à partir de cette définition, que la valeur γ est propre à l'ensemble de l'évolution, il ne s'agit pas d'une propriété locale, les valeurs de f' sont prises en chaque point effectivement atteint au cours de l'itération.

Dans le cas d'un système de dimension plus élevée, d'autres définitions nous permettent d'extraire tout un spectre (discret) d'exposants de Lyapounov, positifs et (ou) négatifs. Leur obtention doit toujours se faire en considérant l'évolution d'un écart sur l'ensemble de l'attracteur, et non pas sur un espace trop restreint, localisé, de cet attracteur.

Le principe généralement utilisé pour le calcul des exposants de Lyapounov consiste alors à étudier l'évolution d'un volume élémentaire sur l'attracteur (étrange), et de quantifier, en moyenne, toutes les directions de contraction et de dilatation de ce volume au cours de l'évolution. Un formalisme vectoriel et matriciel dans l'espace des phases permet de mettre en évidence des vecteurs propres associés à ces directions de contraction et de dilatation. La recherche des exposants de Lyapounov passe par un calcul « moyenné » des valeurs propres de la matrice de l'évolution dynamique du volume élémentaire. Les vecteurs propres, par contre, ne possèdent pas de nature globale, ils changent évidemment de direction en chaque point de la trajectoire.

En termes mathématiques, cela s'exprime par :

$\vec{u}(t) = (u_1, u_2, \dots, u_m)$	vecteur d'état du flot à l'instant t dans l'espace des phases de dimension m
$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u})$	équation différentielle du flot dans l'espace des phases
$\vec{v} = \vec{u} + \delta\vec{u}$	écart élémentaire d'un point dans l'espace des phases
$\frac{d(\delta\vec{u})}{dt} = A(t) \cdot \delta\vec{u}$ avec $A_{ij}(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{\vec{u}=\vec{u}(t)}$ (Jacobien) soit en scalaire : $\frac{d(\delta u_i)}{dt} = \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{\vec{u}=\vec{u}(t)} \cdot \delta u_j \right]$ pour $i = 1 \dots m$	loi d'évolution de l'écart élémentaire en un point dans l'espace des phases sur une trajectoire
$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)(t)$	valeurs propres de A en un point précis de l'espace des phases, et à un instant donné.

Les valeurs positives de (μ_i) correspondent, à l'endroit où elles sont calculées dans l'espace des phases, à des directions d'étirement : le vecteur propre associé évoluera, en tant que perturbation $\delta\vec{u}(\mu_i) = \vec{v} - \vec{u}$, en augmentant son amplitude. Les valeurs négatives correspondent à des directions de contraction : une perturbation portée par le vecteur propre associé s'atténuera au cours de l'évolution. Les exposants de Lyapounov peuvent ensuite être obtenus en ayant moyenné les différentes valeurs propres (μ_i) sur une orbite de l'attracteur.

Il n'est pas nécessaire de parcourir tout l'attracteur étrange, les directions principales de contraction et d'étirement ne dépendant pas de l'orbite choisie, mais uniquement de la localisation sur l'attracteur [1.7]. Compte tenu de cette remarque, une technique de renormalisation est intéressante pour repérer, en un point de l'attracteur, les principales directions d'étirement et de contraction ([1.6],[1.8],[1.9]). Par recallages successifs et renormalisation, il est possible par cette méthode, en gardant toujours la même orbite, de trouver les directions précises de contraction et d'étirement, et donc les exposants de Lyapounov par le calcul des valeurs propres moyennes associées.

3. Exposants de Lyapounov, dimensions et entropie

Nous avons déjà évoqué dans la partie II.B de ce chapitre, sans la définir, la dimension de Lyapounov. Nous pouvons comprendre en effet que plus il y a de directions d'étirement sur un attracteur, donc plus il y a d'exposants de Lyapounov positifs, plus sa dimension doit être élevée pour pouvoir contenir autant de directions. La structure d'un attracteur étrange possédant un grand nombre d'exposants de Lyapounov positifs, doit également être d'autant plus complexe. Il est donc naturel de lier le nombre de ces exposants à la dimension. C'est que l'on définit par la dimension de Lyapounov D_L :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \mu_i}{|\mu_{j+1}|} \quad (I.14) \quad j \text{ étant le plus grand nombre entier tel que la somme des } j \text{ premiers exposants de Lyapounov classés par valeurs décroissantes reste positive.}$$

Une conjecture de Kaplan et Yorke exprime que D_L serait égale à la dimension d'information D_i . Cela a été vérifié par Farmer [I.9] dans le cas particulier de l'équation de Mackey-Glass, un exemple d'équation différentielle à retard où la non linéarité est une fraction polynomiale.

Une autre conjecture de Mori, suggère que la capacité de Kolmogorov, dimension fractale, est égale à l'expression :

$$D_{CK} = d + \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i^+}{\sum_{i=1}^l |\mu_i^-|} \quad (I.15) \quad \text{où les } \mu_i^+ \text{ sont les } k \text{ exposants positifs, et les } \mu_i^- \text{ sont les } l \text{ exposants négatifs.}$$

Enfin, l'entropie, comme la dimension et les exposants de Lyapounov, est liée à la notion de création d'information, il doit exister également une relation avec les exposants de Lyapounov. Très simplement, la théorie ergodique du chaos [I.3]

donne la relation suivante : $h = \sum_{i=1}^k \mu_i^+$, avec les mêmes notations que la relation précédente concernant D_{CK} .

D. Commentaires

Les grandeurs qui viennent d'être énumérées n'ont pas toutes été utilisées au cours de ce travail. Leur connaissance et leur signification ont par contre beaucoup aidé à la compréhension des mécanismes généraux des dynamiques chaotiques.

Dans le cadre de notre sujet, ces notions pourront servir plutôt dans une étude ultérieure, purement théorique, visant à optimiser rigoureusement le régime dynamique utilisé pour une application de codage. Il pourrait s'agir, par exemple, de déterminer le degré de complexité (dimension de l'attracteur) nécessaire à un niveau donné de confidentialité, ou encore de choisir la valeur de l'exposant de Lyapounov le plus fort en relation avec la largeur spectrale de l'information à coder, de manière à noyer correctement l'information.

III. Caractérisation à partir d'une série temporelle

La plupart des formulations théoriques développées dans la partie précédente suppose que le système dynamique étudié est connu sous la forme d'une équation

différentielle. Cette équation fait déjà apparaître les composantes (les variables dynamiques) d'un vecteur de l'espace des phases. Il s'agit par exemple de la donnée du flot $\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f}(\bar{u})$.

Dans deux cas au moins, cette équation n'est pas connue, ou différente de cette forme. Par exemple, dans un contexte purement expérimental, seules certaines variables (voire souvent une seule) sont effectivement accessibles, et le nombre de ces variables n'est pas toujours suffisamment important pour reconstruire un espace des phases de dimension supérieure à celle de l'attracteur étrange. Il n'est alors pas possible d'avoir accès aux propriétés globales du système dynamique étudié, telles que la dimension, l'entropie, ou encore les exposants de Lyapounov. Une trajectoire décrite dans un espace de dimension inférieure au nombre de degrés de liberté apparaît comme une évolution aléatoire, pour laquelle il est difficile d'extraire, ou de reconnaître la structure déterministe. La dynamique ne pourra être clairement distinguée d'un bruit réellement aléatoire.

Un deuxième exemple où la forme vectorielle de la dynamique n'est pas explicite, concerne directement le modèle déterministe continu décrivant notre système. L'expression (I.1) appartient à l'ensemble des équations différentielles à différence du premier ordre : $\dot{X}(t) = f[X(t), X(t-T)]$. C'est une équation scalaire (une seule variable, dimension 1), et pourtant le terme retardé $X(t-T)$ dans la fonction non linéaire f implique un nombre de degrés de liberté a priori infini. Pour déterminer entièrement une solution de ce type d'équation, il est nécessaire de se fixer une série continue de valeurs de X sur un intervalle de durée T . Pratiquement, l'équation étudiée possède un comportement chaotique. Le nombre infini de conditions initiales possibles se répartit en fait dans un petit nombre de bassins d'attraction qui, après une phase transitoire, dirige les solutions vers un seul attracteur étrange. La dimension de cet attracteur est également finie, mais peut tout de même devenir très élevée (plusieurs dizaines dans notre cas, la dimension augmente avec T).

Dans cette dernière partie nous allons décrire brièvement une technique de reconstitution d'un espace des phases, à partir de la donnée d'une série temporelle échantillonnée. Cette technique a déjà fait ses preuves pour reconnaître la structure cachée de certains systèmes dynamiques expérimentaux que l'on croyait aléatoires.

A. Données échantillonnées : série temporelle

La théorie du chaos s'est principalement développée, au départ, avec l'utilisation de nouveaux moyens de calcul, de plus en plus puissants. L'outil informatique n'est pas qu'un moyen de simulation à partir de modèles mathématiques dont la résolution symbolique (solutions exprimées sous la forme de fonctions mathématiques connues) est impossible. La mémoire et la puissance de calcul permettent aussi de stocker des relevés expérimentaux, et de les traiter numériquement pour en extraire des informations plus précises et plus riches, soit en temps réel, soit en temps différé lorsque la partie expérimentale est achevée. Le mode de fonctionnement discret des ordinateurs a imposé la technique d'échantillonnage. Ce sont des échantillons expérimentaux discrets dans le temps qui sont utilisés pour analyser une expérience. C'est également à partir d'une telle série temporelle à une seule variable qu'il est possible de reconstituer un espace des phases de grande dimension.

Soit $X(t)$ un signal issu du système dynamique, et T_1, T_2, \dots, T_N , N retards temporels. On définit alors un vecteur $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$ dans un espace des phases virtuel de dimension N : $\vec{u}(t) = (X(t+T_1), X(t+T_2), \dots, X(t+T_N))$ à partir d'échantillons de la variable $X(t)$.

En pratique le signal $X(t)$ est déjà échantillonné, qu'il s'agisse d'une acquisition numérique d'expérience, ou d'un pas d'intégration. Cet échantillonnage correspond alors à des retards T_i constants, égaux au pas de l'acquisition ou de l'intégration, en général très petit.

Le choix effectif des valeurs de retard est délicat et dépend du système étudié, et des grandeurs que l'on cherche à calculer (dimension ou exposants de Lyapounov).

B. Dimensions

Un aspect important de la technique de reconstruction de l'espace des phases concerne le choix de la dimension du vecteur $\vec{u}(t)$, c'est-à-dire le choix de l'entier N . S'il est trop grand, cela entraînera une surcharge inutile des calculs à effectuer. S'il est trop faible, la structure cachée de l'attracteur ne pourra apparaître, on n'observera qu'une projection de celui-ci sur un sous-espace de trop faible dimension. La trajectoire aura quasiment le même aspect qu'un bruit réellement aléatoire, elle ressemblera à un enchevêtrement désordonné de fils. Pratiquement,

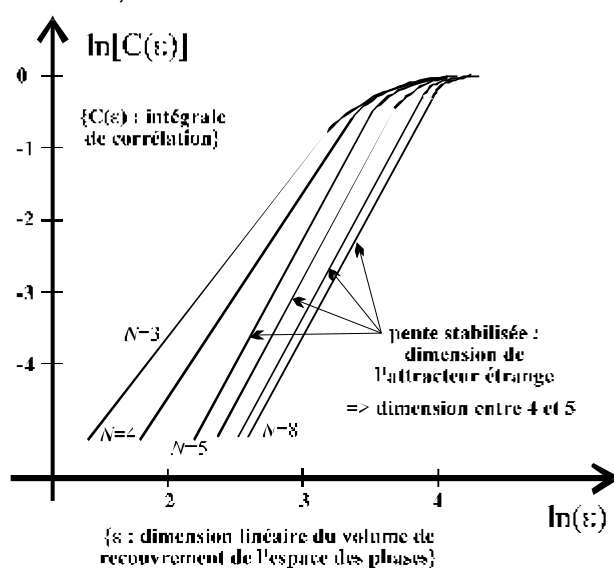


Figure 1.13 : courbe typique obtenue lors de la recherche de la dimension d'un attracteur à partir d'une série temporelle [1.3] et [1.9].

la bonne valeur s'obtient en augmentant progressivement l'entier N , et en cherchant à chaque fois une dimension d'attracteur inférieure à celle de l'espace reconstitué, à l'aide du calcul de la dimension de corrélation D_C . La figure 1.13 représente un exemple typique de résultat de simulation permettant de trouver la dimension de corrélation par le relevé d'une pente. La bonne valeur de N , appelée dimension de recouvrement (« embedding dimension »), correspond à la première dimension qui donne une stabilisation de la pente de la courbe obtenue. En présence d'un bruit blanc, c'est-à-dire d'une série temporelle réellement aléatoire sans origine déterministe, la pente observée

augmente continûment avec la dimension N .

A titre d'exemple, nous avons essayé de reconstruire un espace des phases virtuel de notre système dynamique (loi du type $\dot{X}(t) = -X(t) + \beta \cdot \sin^2\{X(t-T) + \Phi\}$, détaillée au chapitre II), et d'en extraire une coupe de Poincaré de manière à observer dans un plan, l'ordre caché de la dynamique chaotique. Le résultat est représenté sur la figure 1.14.1. L'état du système dynamique a volontairement été choisi très proche

de l'état périodique, de manière à obtenir une dimension fractale observable dans un plan en coupe (dimension réelle entre 2 et 3, estimée à 2,35 +/- 0,05).

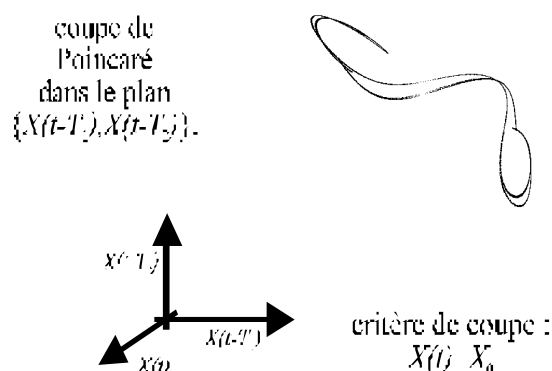


Figure I.14.1 : $\beta=2,6$, $\Phi=0,3$ et $T=3$; la dimension fractale vaut $\sim 2,35$

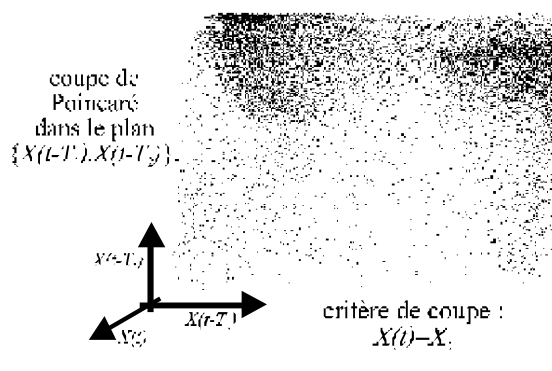


Figure I.14.2 : $\beta=2,3$, $\Phi=0,3$ et $T=30$; la dimension fractale est très supérieure à 3

Figures I.14 : reconstruction de l'espace des phases, en coupe, par la méthode des retards, dans le cas du système étudié $[\dot{X}(t) = -X(t) + \beta \cdot \sin^2\{X(t-T) + \Phi\}]$.

La figure I.14.2 représente le même système dynamique, mais pour des valeurs de paramètres correspondant à une dimension de l'attracteur supérieure à 3. On peut constater que la reconstruction ne fait pas apparaître de structure nette, mise à part des zones où la densité de probabilité est plus élevée : la dimension de recouvrement choisie n'est pas suffisante, il faudrait augmenter progressivement le nombre de composantes du vecteur reconstruit pour pouvoir déterminer la dimension fractale correspondante, en traçant un graphe analogue à celui de la figure I.13.

Des méthodes expérimentales semblent exister ([I.10] article référencé en bibliographie, mais qui n'a pu être obtenu) et permettre la mesure analogique de la dimension d'un attracteur, sans calcul numérique.

C. Exposants de Lyapounov

Le calcul de ces exposants n'a pas été poussé assez loin pour aboutir à des résultats suffisamment fiables. Nous allons essayer d'en exposer brièvement les principes, dans les deux cas déjà exposés où l'on ne dispose que d'une grandeur scalaire pour décrire un système dynamique :

- le cas expérimental, seuls des échantillons expérimentaux sont accessibles
- le cas de l'équation différentielle à retard unidimensionnelle, où une loi dynamique locale est connue et peut être utilisée, en plus de la série temporelle calculée par intégration numérique.

Dans le premier cas, le procédé passe par la construction du vecteur $\vec{u}(t)$ comme décrit précédemment. L'évolution expérimentale scalaire est ainsi traduite en un ensemble de trajectoires vectorielles dans un espace des phases de dimension N . Des trajectoires voisines sont recherchées dans les données disponibles, et l'on observe la façon dont elles s'éloignent l'une de l'autre. Cet observation doit conduire à l'obtention des exposants de Lyapounov les plus positifs, moyennant quelques techniques de recallage de l'orientation des vecteurs perturbation. La figure I.15

illustre ce principe en représentant 4 portions de trajectoires voisines d'une trajectoire de référence.

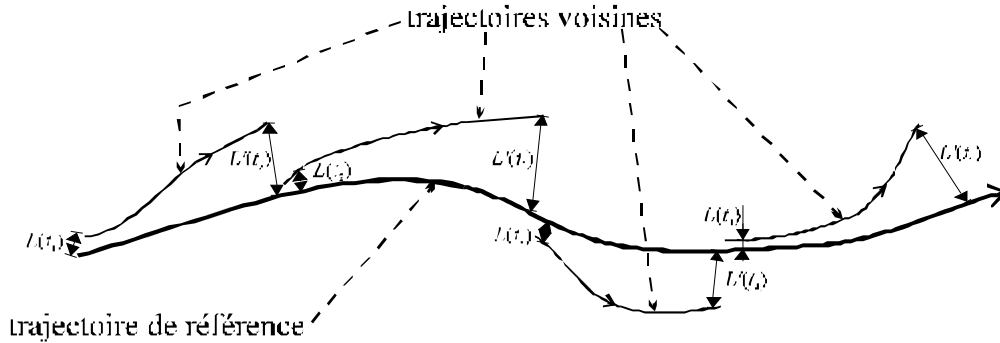


Figure I.15 : illustration de la technique de calcul des exposants de Lyapounov à partir de 2 trajectoires voisines de l'espace des phases.

Lorsqu'une trajectoire voisine s'éloigne trop de la trajectoire de référence, son écartement n'est plus significatif par rapport à la trajectoire de référence, et il faut alors chercher dans les données expérimentales une nouvelle trajectoire plus proche. En répétant ces opérations sur une orbite complète de la trajectoire de référence, il est possible d'évaluer la propriété moyenne de SCI, c'est-à-dire le premier exposant de Lyapounov. Compte tenus des notations de la figure I.15, et d'un nombre M de trajectoires voisines nécessaires au parcours d'une orbite de la trajectoire de référence, λ_1 a pour expression :

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_m - t_0} \cdot \sum_{k=1}^M \ln \left[\frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \right] \quad (I.16)$$

Les autres exposants de Lyapounov sont également accessibles par une méthode analogue faisant intervenir des paires, des triplets, ..., de trajectoires voisines, mais les résultats sont beaucoup plus sensibles à la qualité des relevés expérimentaux. La méthode qui vient d'être décrite est expliquée en détail dans la référence [1.6].

Dans le cas de l'équation différentielle scalaire à retard, le vecteur $\vec{u}(t)$ correspond en général à une fonction temporelle intégrée sur un intervalle de temps T , les composantes de ce vecteur sont une succession de N échantillons. Ce vecteur constitue une trajectoire de référence (« *fiducial trajectory* ») qui sera toujours utilisée par la suite, et doit être exempt de tout transitoire éventuel (i.e. $\vec{u}(t)$ fait bien partie de l'attracteur, il n'est plus en train de le rejoindre). Le flot (l'équation déterministe) disponible est ensuite dérivé pour obtenir une loi d'évolution d'une petite perturbation $\delta\vec{u}(t)$:

$$\dot{X}(t) = f[X(t), X(t-T)] \text{ se dérive pour donner :}$$

$$\delta\dot{X}(t) = \frac{\partial f[X(t), X(t-T)]}{\partial X(t)} \cdot \delta X(t) + \frac{\partial f[X(t), X(t-T)]}{\partial X(t-T)} \cdot \delta X(t-T) \quad (I.17)$$

$$\delta\vec{u}(t) = \{ \delta X(t) \}_{t \in [0, T]} \text{ et } \vec{u}(t) = \{ X(t) \}_{t \in [0, T]} \text{ étant connus}$$

$$\delta\vec{u}(t+T) = \{ \delta X(t) \}_{t \in [T, 2T]} \text{ peut être calculé par } f$$

A partir d'une série arbitraire de Q petites perturbations orthonormées dans l'espace des phases de reconstruction $\delta\vec{u}^i(t) = \{\delta X(t)\}_{t \in [0, T]}$, $i=1$ à Q , on calcule les Q perturbations $\delta\vec{u}^i(t+T)$ qui évoluent selon la loi (I.17) avec toujours la même trajectoire de référence $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$. Ces nouvelles perturbations $\delta\vec{u}^i(t+T)$ sont réorganisées en vecteurs orthonormés comme l'étaient leurs antécédents $\delta\vec{u}^i(t)$, à l'aide d'une orthogonalisation de Gram-Schmidt. En répétant un grand nombre de fois L cette opération, on obtient Q suites de L vecteurs perturbations $[\delta\vec{u}^i(t+k \cdot T)]_{k=0 \text{ à } (L-1)}$, $i=1$ à Q , qui nous permettent de calculer Q exposants de

Lyapounov λ_i :

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \ln \left[\frac{\|\delta\vec{u}^i(t+k \cdot T)\|}{\|\delta\vec{u}^i(t+(k-1) \cdot T)\|} \right], \quad i=1 \text{ à } Q \quad (I.18)$$

Les orthonormalisations successives ont pour effet d'arranger asymptotiquement les Q perturbations selon les directions propres associées aux valeurs propres de la transformation dynamique (I.17). Ces valeurs propres ne sont autres que les exposants de Lyapounov, ou autrement dit, les coefficients de contraction ou de dilatation le long de la trajectoire de référence $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$.

Certains auteurs suggèrent que les techniques de reconstruction d'espace des phases et de calcul des grandeurs telles que la dimension ou les exposants de Lyapounov, sont principalement adaptées aux systèmes à petit nombre de degrés de liberté, pour des raisons de temps de calcul et de précision. Cette remarque semble plus particulièrement concerner les reconstructions faites à partir de données expérimentales. Les équations différentielles à retard qui nous préoccupent, classées dans la catégorie des systèmes « hyperchaotiques » à grand nombre de degrés de libertés ont déjà fait l'objet dans la littérature de telles reconstructions ([I.6], [I.7], [I.11]). Les résultats d'une de ces études sont reportés au tableau I.16, et sont a priori applicables à notre modèle continu.

T/τ	nb(μ_i^+)	D_L	h
1	2	3.78	1.14
2	4	7.5776	1.1
3	6	11.425	1.1
4	8	15.227	1.12
5	10	18.84	1.11
10	19	37.84	1.13

Tableau I.16 [I.13] : mesure de la complexité dynamique de la cavité en anneau d'Ikeda, en fonction du rapport T/τ .

La première colonne indique le rapport T/τ ($\tau=1$ dans l'équation (I.1)), c'est-à-dire une mesure du nombre de degrés de liberté en fonction de la taille des conditions initiales (nombre de constantes de temps τ dans une durée T correspondant au retard). La deuxième colonne indique le nombre d'exposants de Lyapounov positifs, c'est-à-dire le nombre de directions d'étirement, qui semble évoluer linéairement avec la première colonne. Ces exposants ont été calculés avec la technique exposée par Farmer ([I.7] [I.8]), donc par une reconstitution d'espace des phases. La troisième colonne reporte la dimension de Lyapounov, calculée d'après la conjecture

de Kaplan et Yorke, qui présente la même dépendance linéaire que la deuxième colonne en fonction de la première. L'entropie métrique est reportée dans la quatrième colonne, elle est la somme des exposants positifs dénombrés dans la deuxième colonne. Il est intéressant de noter que cette grandeur reste sensiblement constante, ce qui signifie que lorsque le nombre d'exposants de Lyapounov augmente, leur valeur diminue, de manière à conserver une somme constante des exposants positifs. En d'autres termes, le chaos est plus complexe, mais plus lent dans le développement de cette complexité (un exposant de Lyapounov est homogène à l'inverse d'un temps, ou à une fréquence). Le taux de complexité (entropie h) reste constant.

L'exploitation des grandeurs quantitatives globales d'une dynamique chaotique (exposants de Lyapounov, dimension fractale, entropie) semble encore trop liée à des aspects purement mathématiques. Pourtant, nous sommes persuadés que, placées dans un contexte physique précis (tel que notre application), et soumises à des investigations tant théoriques qu'expérimentales, ces grandeurs ont une importance physique qu'il reste encore à exploiter. Certaines questions seraient sans doute intéressantes à résoudre, telles que : est-il possible de mesurer expérimentalement un exposant de Lyapounov comme c'est le cas pour la dimension, ou, par quel paramètre physique peut-on ajuster un exposant de Lyapounov ?

Ces aspects feront peut-être partie de la suite de ces travaux. Dans un premier temps il s'agirait tout d'abord d'appliquer les méthodes actuellement existantes, pour calculer par simulation les dimensions et les exposants de Lyapounov dans différents régimes dynamiques. Une fois ces techniques bien maîtrisées, il serait intéressant de les relier à la physique par le biais de l'expérience.

CHAPITRE II : CHAOS EN LONGUEUR D'ONDE

La brève présentation qui vient d'être faite a mis en avant certaines caractéristiques des dynamiques chaotiques. Celles-ci vont maintenant nous amener de manière assez naturelle à expliquer en quoi le chaos et le cryptage d'information peuvent être liés.

Nous venons de voir qu'une dynamique chaotique possède en apparence une évolution aléatoire. Son spectre de fréquence est bruité, il est composé d'un ensemble continu de fréquences avec un niveau d'amplitude constant. De manière plus imagée, on pourra dire que le son produit par une dynamique chaotique opérant dans une bande de fréquences audibles, ressemble à un bruit de fond. Ce bruit est l'analogie acoustique d'une lumière blanche en optique.

Une information quelconque présente également un spectre continu à plusieurs fréquences, d'amplitude variable. Une information sonore telle qu'un discours ou une musique se décompose en différentes fréquences allant de quelques dizaines de hertz à plusieurs kilohertz. Un signal vidéo doit pouvoir contenir plus d'informations, non seulement le son, mais aussi l'image : son spectre s'étale sur quelques megahertz. Ces signaux, lorsqu'ils entrent dans un traducteur d'informations tels qu'un haut-parleur ou un récepteur télé peuvent être entachés de plus ou moins de bruit dont les origines sont complexes et variées (parasites sur la ligne de transmission, bruit généré à l'émission ou à la réception). Ce bruit est un signal de type aléatoire, présent à toutes les fréquences, en particulier celles propres à l'information. Lorsque celle-ci est traduite en sons ou en images, le bruit se manifeste par une détérioration plus ou moins grande de l'information. La qualité de la transmission de l'information se mesure par le rapport signal sur bruit en décibels ($[S/B]_{dB}$). Une mesure positive indique une prédominance de l'information, une mesure négative correspond en général à un message incompréhensible, car trop bruité. Le bruit est alors une perturbation indésirable.

Imaginons maintenant un mélange entre une information, et un signal généré par un oscillateur à comportement chaotique. Le chaos est semblable à un bruit. Si son amplitude est supérieure à celle du signal informatif, le résultat de l'addition est une information dont $[S/B]_{dB}$ est négatif : un récepteur classique ne sera pas capable de traduire l'information cachée dans le signal. Cette information est dite noyée dans le bruit, ou encore masquée par un bruit de forte amplitude.

Mais le chaos, en plus de son aspect aléatoire, possède un caractère local déterministe car il est généré à partir d'une équation différentielle bien précise. Il est alors tout naturel de penser que ce déterminisme, s'il est connu, peut être exploité de manière à reconnaître et séparer le signal chaotique et l'information. Les lois dynamiques déterministes sont un moyen d'extraire l'information du bruit chaotique, et de rendre ensuite la traduction du message compréhensible par un détecteur classique. C'est cette idée très simple et assez naturelle qui est à l'origine du présent travail, dont l'intitulé est : cryptage de signaux par chaos en longueur d'onde.

Bien qu'apparemment simple, l'idée de ce type de codage est assez récente, elle date du début des années 90. Les systèmes dynamiques alors utilisés sont réalisés à l'aide de circuits électroniques formant un oscillateur chaotique. Ce générateur de chaos est le coeur du système de cryptage, il fournit la porteuse aléatoire qui va coder l'information, et ses éléments constitutifs sont les clés du décodage.

Il est possible de classer ces oscillateurs en trois catégories. Tout d'abord les oscillateurs non autonomes, qui sont excités par un signal externe, en général sinusoïdal. La sortie du circuit est le résultat d'une transformation dynamique non linéaire, c'est le signal chaotique. Un exemple classique de ce premier type d'oscillateur est un circuit *RLC* avec une diode pour remplir le rôle de l'élément non linéaire de la dynamique. Le second type d'oscillateur est basé sur une dynamique non linéaire autonome à 3 variables [II.1] [II.2]. Ces oscillateurs sont fréquemment utilisés dans la littérature pour la réalisation concrète de systèmes de codage par chaos [II.3]. Leur dynamique est proche de celle du modèle Lorenz, dans le sens où elle appartient à la même case **(I.3)** du tableau I.1. La dimension de leur attracteur est inférieure à 3, donc assez faible, mais suffisante pour autoriser le chaos.

Enfin, le troisième type de dynamiques chaotiques utilisées pour le cryptage est celui que nous avons choisi (équation (I.1)). Le déterminisme à l'origine de la dynamique possède une expression mathématique très simple, puisqu'une seule variable est nécessaire. L'équation différentielle peut n'être que du premier ordre, comme ce sera notre cas ; elle doit simplement comporter un terme non linéaire s'appliquant à la variable dynamique retardée dans le temps. Malgré une description très simple, le comportement d'un oscillateur de ce type peut devenir facilement chaotique, avec une dimension d'attracteur étrange très élevée (plusieurs dizaines d'unité). Il en résulte une grande complexité dynamique. Un tel chaos de forte dimension est parfois qualifié d'« hyperchaos ». Une expérience de cryptage utilisant un tel système a été réalisée récemment en Suisse en 1995 à l'EPFL [II.4]. L'oscillateur chaotique utilisé a la particularité de travailler sur la variable dynamique puissance optique. Une idée semblable utilisant la variable longueur d'onde avait été évoquée au laboratoire d'Optique de Besançon quelques années plus tôt [II.5]. Sa mise en oeuvre tardive est l'objet du présent travail de thèse.

Ces systèmes différentiels non linéaires à retard ont commencé à être étudiés au début des années 80. La dénomination mathématique exacte est : équation différentielle non linéaire à différence (« *non linear differential difference equation* »). Il s'agit de l'analogue continu (terme dx/dt en plus) des suites discrètes de Feigenbaum, le retard temporel dans la contre réaction jouant le rôle d'une itération mathématique. En l'absence de ce retard dans la boucle de contre réaction, le système forme un multistable. Ces multistables à retard ont été étudiés d'un point de vue théorique au Japon par Ikeda, dans le cas d'une fonction non linéaire sinusoïdale. A la suite de ces travaux, ce type particulier de dynamique à contre réaction sinusoïdale retardée a pris le nom de « système d'Ikeda ».

Après une étude simplifiée d'un multistable simple (sans retard) à fonction *sinus*, nous montrerons comment le même système peut acquérir un comportement dynamique entièrement différent, simplement en ajoutant un retard temporel dans la contre réaction. Une description rapide du système d'Ikeda, ainsi que d'autres expériences analogues de la littérature, nous permettra de voir comment apparaît pratiquement ce chaos de forte dimension. Nous nous attacherons ensuite, en nous appuyant sur ces premiers exemples, à décrire en détail l'oscillateur chaotique en longueur d'onde réalisé. L'établissement de 2 modèles conclura ce chapitre sur le générateur de chaos en longueur d'onde.

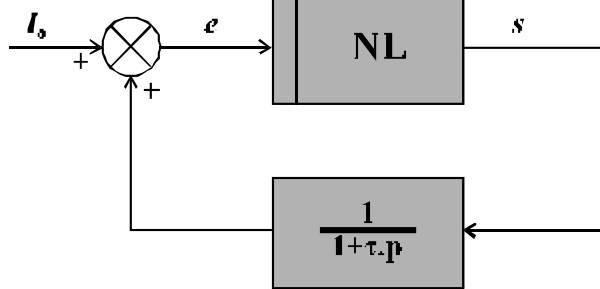
I. Description du chaos obtenu à partir de systèmes dits « bistables » à retard, ou encore système d'Ikeda

A. De la bistabilité au chaos

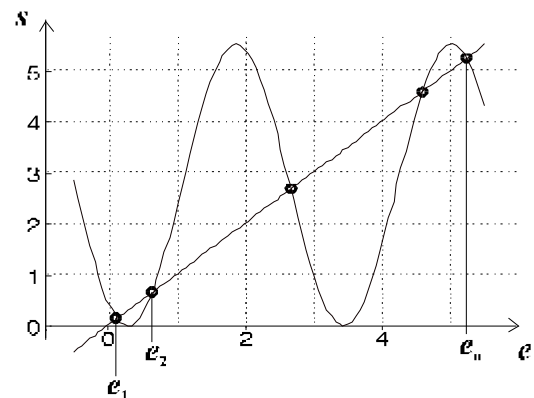
1. Description de la bistabilité

a. Présentation en schéma bloc

Un système bistable est constitué d'une boucle de contre réaction comportant une transformation non linéaire à un ou plusieurs extrema (figure II.1). Le graphe de la figure II.1.2 représente une non linéarité de type sinusoïdal, c'est la transformation non linéaire qui sera utilisée dans la suite. En entrée, un signal de commande I_0 intervient pour faire basculer l'état du système parmi les différentes possibilités (multistabilité). L'ensemble étant bouclé sur lui-même, il est intéressant de faire apparaître graphiquement la droite $y=x$ qui symbolise le fait de ramener à l'entrée le résultat de la sortie. L'intersection de cette droite avec la fonction non linéaire permet de repérer facilement les points fixes (figure II.1.2).



II.1.1 : schéma bloc d'un système bouclé bistable



II.1.2 : points fixes sur la transformation non linéaire

Figure II.1 : Bistabilité

Lorsque le signal de commande I_0 est changé brutalement (échelon) et avec une amplitude suffisante, il est possible de faire basculer le système vers un autre point fixe. La transition du bistable de l'un à l'autre point fixe est décrite par la dynamique à l'intérieur de la boucle.

b. Ordre de la dynamique, rappels, cas considéré

Selon le schéma-bloc de la figure II.1.1, la loi d'évolution temporelle de la variable $(e-I_0)$ est une dynamique du premier ordre exprimée dans le domaine de Laplace. L'origine de cette loi dynamique est la traduction du fait qu'un système physique ne peut changer d'état avec une rapidité infinie. Le premier ordre signifie que seule la dérivée première du temps intervient, il correspond physiquement à un terme de dissipation d'énergie (système non conservatif, effet Joule, ou frottement). Le cas d'école du circuit RC linéaire en réponse à un échelon est rappelé ci-dessous.

loi temporelle locale : (II.1) :

$$u(t) + R \cdot C \cdot \frac{du}{dt}(t) = v(t)$$

domaine de Laplace : (II.2)

$$U(p) + R \cdot C \cdot p \cdot U(p) = V(p), \text{ soit } \frac{U(p)}{V(p)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

Si $\begin{cases} v(t) = U_0 & \text{si } t \leq 0 \\ v(t) = 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ alors : $u(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, pour $t \in [0, \infty[$

La constante de temps τ est un temps caractéristique qui indique une durée minimum nécessaire au système pour effectuer une transition.

Lors d'une analyse harmonique (Laplace \rightarrow Fourier : $p=j \cdot \omega=j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$, excitation sinusoïdale de fréquence variable du système dynamique) du même circuit RC , le paramètre τ fait place à la fréquence de coupure $f_c=(2 \cdot \pi \cdot \tau)^{-1}$ pour caractériser la limitation dynamique. Le système est alors vu comme un filtre de fréquence, appelé passe bas du premier ordre. Sa fonction de filtrage est rappelée sur le diagramme de Bode de la figure II.2. Pour un signal d'entrée de fréquence petite devant f_c , la sortie recopie l'entrée, le filtre est utilisé à l'intérieur de sa bande passante. Pour $f=f_c$, l'atténuation du signal de sortie a commencé et vaut -3dB , le déphasage entrée/sortie vaut $-\pi/4$. Pour des fréquences grandes devant f_c , l'amplitude de la sortie est de plus en plus petite, et le déphasage tend asymptotiquement vers $-\pi/2$.

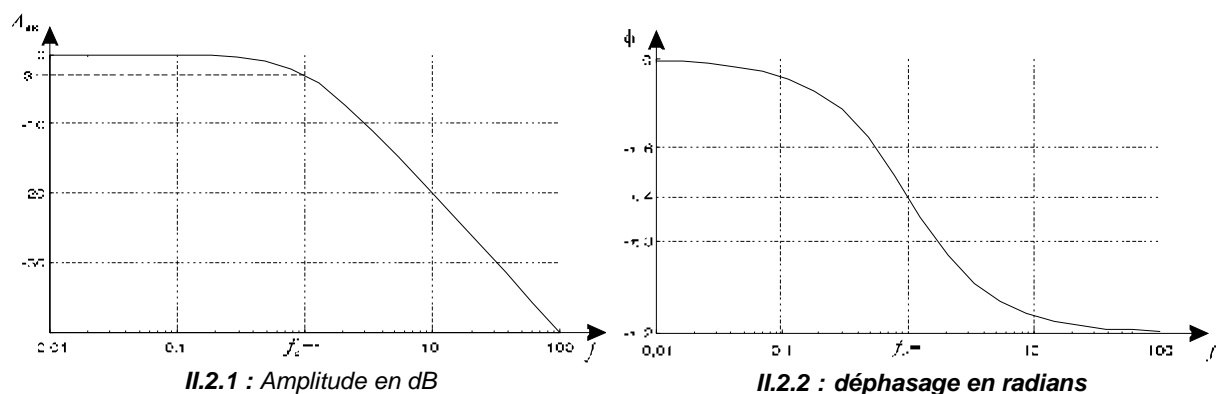


Figure II.2 : dynamique du 1^{er} ordre, diagramme de Bode d'un passe bas du 1^{er} ordre.

Dans toute la suite nous considérerons une dynamique limitant l'oscillation du premier ordre. Les systèmes physiques réels sont d'un ordre beaucoup plus élevé. Mais lorsque les constantes de temps (ou les fréquences de coupure) des différents ordres sont suffisamment distinctes, il arrive souvent que la dynamique puisse être modélisée, avec une très bonne approximation, par son ordre le plus bas (constante de temps la plus grande, ou fréquence de coupure la plus petite).

c. Evolution du bistable

Dans le cas du montage bistable de la figure II.1, le passe bas dans la boucle de retour non linéaire définit la dynamique du système bouclé. Sa loi d'évolution s'écrit :

$$e + \tau \cdot \frac{de}{dt} = I_0 + NL[e - I_0] \text{ ou encore } \frac{de}{d(t/\tau)} = NL[e - I_0] - (e - I_0) \quad (II.5)$$

Cette dernière expression nous donne le sens de variation de la variable d'entrée dans une échelle de temps normalisée par rapport à τ . Lorsque le membre de droite de (II.5) est égalé à 0, nous obtenons l'équation des points fixes de la dynamique. Ces points se repèrent graphiquement en cherchant les intersections de la non linéarité $NL[e-l_0]$ avec la première bissectrice ($y=x$).

Classons ces points fixes (singularités) e_i par ordre croissant : e_1, e_2, \dots, e_n . Si la condition initiale e_0 se trouve en dehors de l'intervalle $[e_1 ; e_n]$, le système a forcément (caractère borné de $NL[x]$) tendance à évoluer vers cet intervalle, car :

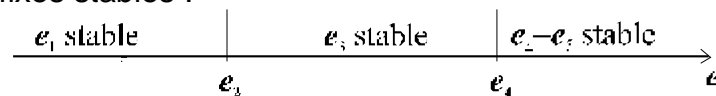
- si $e_0 < e_1$, $(de)/(dt) = NL[e-l_0] - (e-l_0) > 0$
- si $e_0 > e_n$, $(de)/(dt) = NL[e-l_0] - (e-l_0) < 0$

On peut ensuite remarquer que plus le système est proche d'un point fixe, plus sa vitesse diminue, jusqu'à devenir nulle au point fixe, par définition du point fixe. Il est alors intéressant de savoir si le point fixe (e_i) concerné est stable ou non par rapport à une petite perturbation (δe). Pour cela il suffit de différencier la loi dynamique autour du point fixe :

$$\frac{d(\delta e)}{d(t/\tau)} = \left[\left(\frac{\partial(NL)}{\partial e} \right)_{e_i-l_0} - 1 \right] \cdot \delta e = \alpha_i \cdot \delta e \text{ , soit, en intégrant : } (\delta e)(t) = \exp\left(\alpha_i \cdot \frac{t}{\tau}\right) \cdot (\delta e)_0 .$$

Une petite perturbation initiale en un point fixe est soit atténuée (stabilité), soit amplifiée (point instable) selon que α_i est négatif (pente de la non linéarité est < 1) ou positif (pente de la non linéarité est > 1). Indépendamment de la valeur absolue de la pente, c'est son signe sa valeur par rapport à 1 qui détermine la stabilité d'un point fixe.

Lorsqu'il y a plusieurs points fixes stables, la condition initiale va être déterminante dans l'évolution du système vers l'un ou l'autre de ces points. A chaque point fixe on va pouvoir attribuer un ensemble de valeurs initiales qui donneront une évolution convergeant asymptotiquement vers ce point fixe. Les frontières de ces zones (séparatrices) seront logiquement constituées par les points fixes instables, ceux-ci étant répulsifs. L'axe des $(e-l_0)$ peut donc être partagé en bassins d'attraction des différents points fixes stables :



2. Système bistable avec retard pur

C'est un système de ce type (schéma figure II.3) que nous utilisons pour générer un signal chaotique. Bien que très proche du bistable, la présence du retard temporel dans la boucle de contre réaction modifie complètement le comportement dynamique de l'ensemble. Alors que le bistable du premier ordre ne peut présenter que des solutions du type point fixe attractif, ou point fixe répulsif, la présence du retard, s'il est suffisamment important par rapport à la constante de temps, permet d'augmenter considérablement le nombre de degrés de liberté du système, et par là le nombre de comportements dynamiques possibles. Dans une première approche, nous allons montrer comment le retard peut modifier les conditions de stabilité du bistable pour permettre un démarrage d'oscillation.

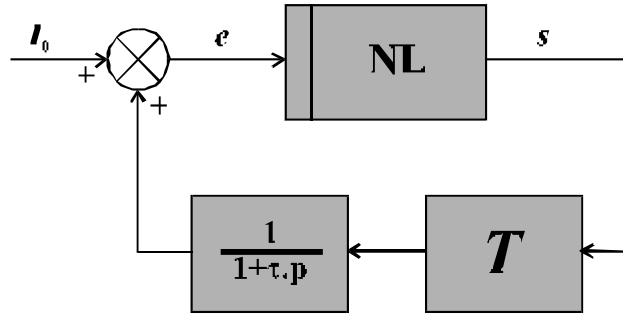


Figure II.3 : Bistable avec retard pur dans la boucle de retour.

a. Approche qualitative

L'étude du bistable du premier ordre n'a conclu que sur l'existence de points fixes stables, ou instables. Le retard modifie la stabilité. Avec un retard T , l'équation (II.5) se réécrit sous la forme (II.6). Les variables t et T sont normalisés par rapport à τ , et on choisit la nouvelle variable $x = e - I_0$:

$$\frac{dx}{dt}(t) + x(t) = NL[x(t - T)] \quad (II.6)$$

Une analyse locale de la stabilité d'un point fixe x_0 ($x_0 = NL[x_0]$) s'effectue en considérant l'évolution d'une petite perturbation δx :

$$\frac{d(\delta x)}{dt}(t) + (\delta x)(t) = nl[x_0] \cdot (\delta x)(t - T) \text{ , avec } nl[x_0] = \left[\frac{dNL}{dx} \right]_{x=x_0} \quad (II.7)$$

Si la perturbation est introduite suffisamment lentement, la dérivée temporelle n'intervient plus. Cette approximation dite adiabatique (temps de réponse rapide par rapport aux durées d'évolution) sera réutilisée et rediscutée dans la suite. Elle peut être correctement vérifiée pour des grands retards T . Dans ces conditions (II.7) s'exprime sous la forme simplifiée (II.8) :

$$(\delta x)(t) = nl[x_0] \cdot (\delta x)(t - T) \text{ ou encore } \frac{(\delta x)(t)}{(\delta x)(t - T)} = nl[x_0] \quad (II.8)$$

Au bout d'un tour dans la boucle de contre réaction, la perturbation s'est amplifiée si la pente $nl[x_0]$ est supérieure à 1 en valeur absolue, et elle s'est atténuée si cette pente est inférieure à 1 en valeur absolue. Ce n'est plus le signe de la pente locale qui détermine la stabilité, mais son amplitude absolue.

Pratiquement, cette pente est proportionnelle à un paramètre de la fonction non linéaire. En modifiant ce paramètre, il est possible de faire bifurquer un point fixe d'un état stable vers un état instable. Dans le cas de la fonction représentée à la figure II.1.2, ce paramètre correspond à l'amplitude de la sinusoïde, c'est-à-dire qu'il dépend directement du gain de la boucle de retour du système figure II.3. Une fois le point fixe devenu instable, peut-on avoir une oscillation ?

Appliquons alors les critères classiques de condition de démarrage d'une oscillation dans un système bouclé. Ils s'écrivent sous la forme de 2 relations, l'une dite de

gain, l'autre dite de phase. Dans le cas d'une cavité laser, la première condition exprime que le gain doit être supérieur aux pertes lors d'un aller-retour. Appliquée au cas du bistable à retard, cette condition de gain traduit la perte de stabilité du point fixe (gain important => amplitude importante de NL => pente forte de NL). La relation de phase est une sorte de condition d'interférences constructives entre deux ondes séparées dans le temps par un aller-retour dans la cavité (-boucle de retour-). Dans le cas du système de la figure II.3, cela signifie que le signal de sortie du passe bas vient s'ajouter en phase par rapport au signal en entrée de la non linéarité. Ceci était impossible dans le cas du bistable pur (figure II.1.1), le déphasage dû uniquement au passe bas du 1^{er} ordre étant limité à $\pi/2$ (figure II.2.2, $\Delta\phi_{1er\ ordre} = -\text{Arctan}(\omega \cdot \tau) > -\pi/2$). Par contre, le retard du système de la figure II.3 introduit un déphasage supplémentaire qui varie linéairement avec la pulsation : $\phi = -\omega \cdot T$. La condition de phase peut donc s'écrire :

$$\arctan(\omega \cdot \tau) + \omega \cdot T + \left(\frac{1 - \text{sgn}(n|x_0|)}{2} \right) \cdot \pi = 2 \cdot k \cdot \pi \quad (II.9)$$

avec $k = 0, 1, 2, \dots$

Le signe de la pente de NL introduit ou non un déphasage de π .

Il y a une infinité de modes (pulsation d'oscillation ω pour chaque entier k), solutions de cette équation. Chacun de ces modes qui vérifie aussi la condition de gain peut donner lieu au démarrage d'une oscillation. La superposition des conditions de gain et de phase est résumée à la figure II.4, dans le cas d'une pente négative (π supplémentaire), avec un gain 2 (+3dB) dans la boucle de retour. La phase est ramenée à l'intervalle $[0; 2\pi]$. Les discontinuités de la fonction de phase correspondent à un mode de la condition de phase. On remarque que les modes (ronds clairs) à l'intérieur de la bande passante du passe bas, sont concernés par la même condition de gain. Les fréquences plus élevées doivent remplir une condition de gain plus sévère, à cause de l'atténuation typique en -20dB/décade . Ce graphe

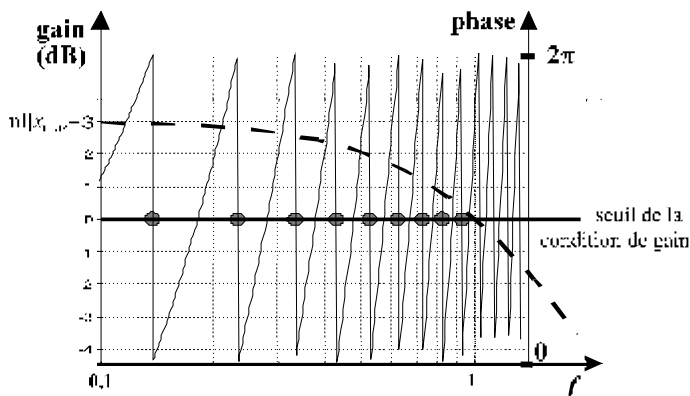


Figure II.4 : résumé des conditions de gain et de phase pour le système de la figure II.3, avec $T=10\tau$, autour du point de fonctionnement x_0 à pente négative.

permet en fait uniquement de trouver l'ensemble des modes susceptibles d'osciller, et non ceux qui oscillent effectivement. Il a été établi dans une approche linéaire de petits signaux au voisinage du point fixe. Lorsqu'une oscillation démarre, l'amplitude croissante fait que le système quitte ce voisinage, et l'analyse linéaire locale n'est plus valable. Le comportement effectif ne peut plus être expliqué aussi simplement : le problème est devenu non linéaire.

On peut effectuer un parallèle entre les modes dynamiques d'un tel système à retard et les modes longitudinaux d'une cavité laser. Le temps d'aller-retour dans la cavité est l'analogie du retard temporel T . La constante de temps τ correspond au temps nécessaire à l'interaction entre le milieu laser et le faisceau retourné. Si cette durée

est suffisamment inférieure au temps d'aller-retour du faisceau, nous sommes en présence d'un système bouclé à retard pur. Pour que l'analogie soit complète, il reste encore à trouver une transformation non linéaire dans la cavité. Cette action non linéaire est fondamentale pour l'obtention de régimes chaotiques : si elle existe, il sera possible d'observer des phénomènes chaotiques dans un laser, par exemple sur la variable polarisation (laser CO₂, laser semi-conducteur à émission par la surface), ou sur la variable intensité (laser à cavité externe).

La description qui vient d'être faite est une approche qualitative. Elle explique à l'aide de principes physiques, l'origine de la naissance d'oscillations dans un système bistable à retard. Nous n'avons pas évoqué un aspect important qui concerne la stabilité de ces modes oscillants. Une description analytique est possible en première approximation. elle permet de discuter de la stabilité de certaines oscillations. La route vers le chaos sera discutée plus loin, dans le cadre de l'approximation adiabatique, donc par une modélisation discrète du problème.

b. Description analytique [I.5]

Nous supposons le système dans un état simple du type point fixe stable (gain de la boucle de retour suffisamment petit). Nous partons toujours de la même équation d'évolution d'une petite perturbation autour d'un point fixe x_0 (équation (II.7)), sans utiliser l'approximation adiabatique.

Nous cherchons des solutions de la forme : $(\delta x)(t) = (\delta x)(0) \cdot \exp(s \cdot t)$, où $s = s' + i \cdot s''$ est un nombre complexe dont la partie réelle symbolise la stabilité (stable si $s' < 0$), et dont la partie imaginaire traduit le caractère oscillant de la solution (pulsation). Ce nombre s injecté dans l'équation d'évolution permet d'extraire 2 égalités réelles reliant s à T et $\text{nl}[x_0]$:

$$\begin{aligned} s' + 1 &= \text{nl}[x_0] \cdot \exp(-s' \cdot T) \cdot \cos(s'' \cdot T) \\ s'' &= -\text{nl}[x_0] \cdot \exp(-s' \cdot T) \cdot \sin(s'' \cdot T) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Une solution instable étant caractérisée par $s' > 0$, on peut voir sur la première égalité qu'une telle solution est incompatible avec $|\text{nl}[x_0]| < 1$. Un point fixe dont la pente sur la non linéarité est inférieure à 1 en valeur absolue ne peut être instable. On retrouve bien la condition établie en (II.8) dans le cadre de l'approximation adiabatique.

Dans le cas bistable, les conditions de stabilité ou d'instabilité sont simples et précises, elles portent uniquement sur le signe de la pente $\text{nl}[x_0]$. Nous retrouvons bien par cette approche analytique qu'un système identique, mais avec un retard, possède une condition de stabilité portant sur la valeur absolue de cette pente.

Les solutions oscillantes sont décrites par la condition $s'=0$ (dites aussi modes neutres). La pulsation de l'oscillation correspond à s'' . Dans ces conditions, les relations (II.10) s'inversent facilement pour donner l'expression de la pulsation d'un mode neutre oscillant. Ce calcul donne également les valeurs de retard T_k qui donnent naissance à l'existence d'un nouveau mode neutre :

$$s'' = \mp \text{nl}[x_0] \cdot \sin\left(\cos^{-1}\left(1/\text{nl}[x_0]\right)\right)$$

$$T_k = \frac{\cos^{-1}\left(1/\text{nl}[x_0]\right) + 2 \cdot k \cdot \pi}{|\text{nl}[x_0]| + \sin\left(\cos^{-1}\left(1/\text{nl}[x_0]\right)\right)} \quad (II.11)$$

On retrouve les modes dynamiques déjà évoqués dans la précédente partie : plus le retard T est important (par rapport à τ), plus il y a de modes susceptibles d'osciller. Mais cette étude analytique permet également d'analyser la perte de stabilité d'un point fixe et l'existence de modes oscillants simples, stables ou instables.

Au delà de la périodicité, les régimes chaotiques sont difficilement décrits par ce type d'approche qui reste locale : les relations (II.11) sont issues d'un développement de Taylor au voisinage de x_0 . Une dynamique chaotique est typiquement non linéaire. La variation de la variable x en mode chaotique se fait sur un intervalle où l'ensemble de la non linéarité est décrite, et non sur un voisinage. On peut par contre supposer que les relations (II.10) sont à peu près vraies en moyenne [1.5] sur la plage d'évolution de x . On peut sous cette hypothèse extraire de (II.10) des modes dynamiques instables ($s > 0$) moyens, qui correspondent aux exposants de Lyapounov. Un des résultats d'une telle approche est la croissance linéaire du nombre d'exposants de Lyapounov avec la valeur du retard T .

Une autre approche théorique, mais plus qualitative, consiste à écrire l'équation différentielle non linéaire à retard sous forme intégrale, ce qui permet une interprétation intéressante de l'action de la fonction retardée à $(t-T)$ sur l'évolution du système à une date t :

$$X(t) = X(0) \cdot \exp(-t) + \int_0^t \exp(t' - t) \cdot \text{NL}[X(t' - T)] \cdot dt' \quad (II.12)$$

Dans cette expression, la constante de temps est toujours normalisée à 1, et la valeur actuelle de la variable dynamique apparaît comme le résultat intégral de ses valeurs antérieures. On peut voir que l'intégrale comporte un terme exponentiel pondérant l'action non linéaire sur les valeurs T -antérieures du signal. Cette pondération exponentielle permet, en première approximation, de ne considérer que l'influence des dates t' proches de t dans le calcul intégral (argument nul de l'exponentiel, pondération maximum, argument négatif, pondération faible). Le terme intégral est dans ces conditions considéré comme un moyennage de l'action non linéaire à une date T -antérieure, sur un intervalle de temps de l'ordre de $\tau=1$:

$$X(t) \cong X(0) \cdot \exp(-t) + \int_{t-T-1}^{t-T} \text{NL}[X(\theta)] \cdot d\theta \quad (II.13)$$

On comprend alors mieux l'effet de perte de cohérence d'un tel système à mémoire (retard T). La cohérence de la dynamique est définie par le temps caractéristique $\tau=1$. L'effet de mémoire dû à la réinjection du signal retardé, entraîne une réaction non cohérente dans le système bouclé, mais tout à fait déterministe. Cette perte de cohérence est à l'origine du comportement chaotique, et de la forte dimension d'un tel système. La dimension varie comme le rapport entre T et τ , l'évolution ultérieure du système dépendant de la connaissance des n intervalles τ -moyennés sur une durée T ($n=T/\tau$). Le régime chaotique apparaît pour des valeurs de paramètres où il

n'existe plus de modes dynamiques oscillants stables. Dans ces conditions, il n'existe aucun régime régulier stable, et pourtant le système est nécessairement borné en x (fonction NL bornée, et système du premier ordre) : l'évolution est erratique à l'intérieur d'un domaine d'attraction (centré sur l'intervalle bornant la non linéarité), mais elle reste déterministe.

Après avoir décrit ces systèmes bistables en terme d'évolutions dynamiques, nous allons concrétiser le problème par une présentation de quelques exemples physiques qui ont déjà été étudiés dans la littérature.

B. Exemples de systèmes d'Ikeda

1. Schéma expérimental proposé par Ikeda

Le dispositif expérimental est constitué de quatre miroirs permettant le piégeage de la lumière dans une cavité en anneau. Le temps de parcours de cette cavité par la lumière définit le retard T du système dynamique. Deux miroirs possèdent une réflectivité de 100%, les 2 autres ont des coefficients de réflexion inférieurs pour permettre, d'un côté l'injection d'une lumière laser d'intensité constante, et de l'autre l'extraction d'une partie du faisceau fluctuant en intensité dans la cavité. Un élément est placé dans la cavité de manière à effectuer une transformation non linéaire du faisceau. Il s'agit d'un absorbant atomique à deux niveaux qui transforme le champ électrique entrant en un champ sortant atténué et déphasé, cette transformation étant fonction du niveau de l'intensité en entrée.

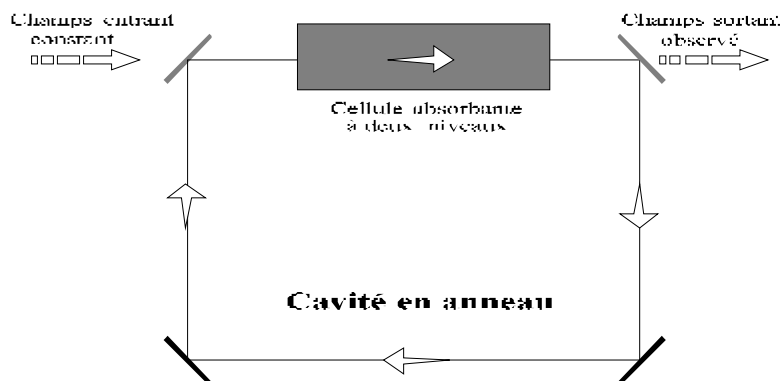


Figure II.5 : Schéma expérimental du modèle d'Ikeda.

2. Description théorique

La modélisation [II.6] s'effectue en déterminant la transformation réalisée par l'absorbant (intégration des équations de Maxwell-Bloch dans le milieu absorbant), et en faisant interférer le résultat de cette transformation, après un tour dans la cavité en anneau, avec le faisceau d'intensité constante alimentant la cavité. Le résultat aboutit à une équation différentielle du premier ordre à retard vérifiée par l'intensité de sortie de la cavité, dite équation d'Ikeda :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)(t) + x(t) = \pi \cdot \mu \cdot [1 + 2 \cdot B \cdot \cos\{x(t-T) - x_0\}] \quad (II.14)$$

Ikeda a prévu le comportement dynamique d'un tel système, ses bifurcations par dédoublement de période, et ses différents régimes chaotiques. A l'origine, sans

retard temporel important devant le temps de réponse de la boucle, un tel système était bien connu pour ses propriétés de bistabilité optique.

Le schéma expérimental est extrêmement simple, mais la mise en équation qui aboutit à la dynamique (II.14) est relativement complexe, comparée à d'autres systèmes expérimentaux dont le comportement est décrit par le même type d'équation. Ces systèmes optiques sont passés en revue dans le paragraphe suivant ; ils ont tous en commun, comme pour le modèle d'Ikeda, la variable dynamique « intensité optique ».

3. Electro-optique massif

Les travaux de Hopf *et al.* [II.7] [II.14] ont accompagné les développements théoriques d'Ikeda. L'expérience décrite par ces auteurs est importante dans le sens où elle est une des premières réalisations expérimentales d'une dynamique chaotique unidimensionnelle à retard, telle que celle décrite par Ikeda.

Le schéma expérimental est hybride (électronique et optique). Ce n'est pas directement un champ optique qui induit une non linéarité optique. Au lieu d'un absorbant à deux niveaux dont la transformation sur l'intensité d'entrée est non linéaire, nous avons ici un composant électro-optique (cristal de KDP) monté en filtre biréfringent. La réponse de cette cellule n'est plus non linéaire par rapport à la puissance optique d'entrée, mais par rapport à la commande électrique de la biréfringence. La longueur d'onde et l'intensité d'entrée étant constantes, l'action non linéaire se manifeste entre la tension ajustant la biréfringence, et la puissance optique de sortie (non linéarité de type sinusoïdal également).

La boucle formant l'oscillateur chaotique est donc composée :

- d'un signal électronique appliqué sur l'électro-optique,
- d'un filtre biréfringent réalisé à partir de cet électro-optique,
- d'un système électronique de photodétection,
- d'un convertisseur analogique numérique permettant de traiter le signal

détekté par un ordinateur, principalement de manière à le retarder en lui faisant traverser une mémoire FIFO (First In First Out).

Le signal numérique retardé est ensuite reconvertit en analogique, et après une éventuelle amplification et une translation de son niveau de référence, ce signal est appliqué sur l'électrode de l'électro-optique de manière à fermer la boucle d'oscillation. La nécessité de numériser le signal, et la présence d'un électro-optique lent, font que le spectre d'évolution de la dynamique est loin des hautes fréquences accessibles en théorie par le montage en anneau d'Ikeda.

Les paramètres de réglage du chaos sont l'intensité optique d'entrée du filtre biréfringent, l'offset de la tension de commande, l'amplification de la boucle électronique de retour, et le retard temporel. La variable dynamique chaotique est l'un quelconque des signaux de la boucle d'oscillation, puissance optique de sortie du filtre, ou signal électrique de commande, avant ou après retard, avant ou après amplification.

Le soin apporté à la mise en oeuvre a permis de reconnaître un bon nombre de phénomènes prévus par les travaux d'Ikeda. Sur cette base expérimentale, les auteurs ont principalement étudié les bifurcations successives par dédoublement, les

conditions d'apparition d'harmoniques impairs, et certaines différences entre le système réel et le modèle discret (approximation adiabatique, temps de réponse négligeable devant T). Outre l'analyse temporelle de la dynamique, on y trouve aussi une analyse spectrale et statistique, rendue possible grâce au contrôle informatique en temps réel de l'expérience.

4. Mach-Zehnder intégré

Nous reparlerons de cette expérience [II.4] plus tard, parce qu'elle concerne très directement le sujet qui nous préoccupe, le cryptage d'information par chaos. Nous profitons ici de l'occasion pour décrire et introduire ce système « concurrent et proche ».

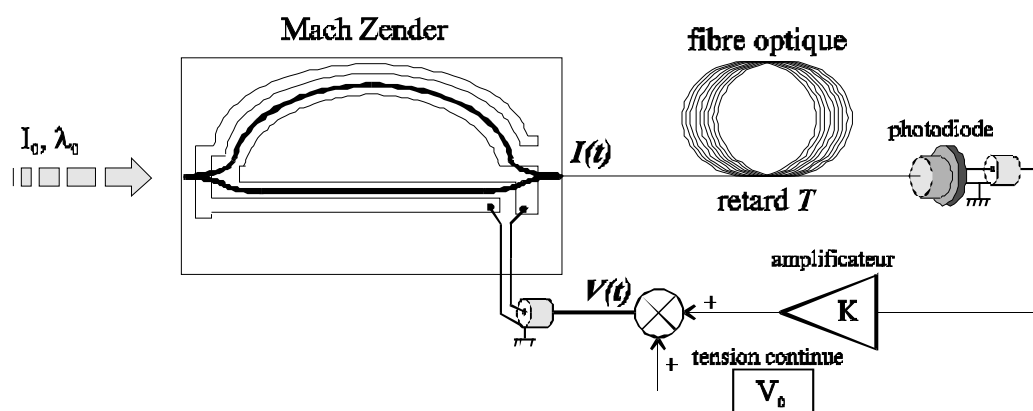


Figure II.6 : chaos en intensité avec un Mach Zehnder

La figure II.6 représente le montage expérimental réalisant l'oscillateur chaotique seul. L'ensemble émission, codage, transmission, réception et décodage sera détaillé plus tard. Le schéma classiquement précédemment décrit va être retrouvé ici, non linéarité, retard, constante de temps, et contre réaction.

Comme dans le système d'Ikeda, un faisceau d'intensité et de longueur d'onde constantes est injecté dans le montage. Cette intensité est un paramètre, la variable dynamique d'entrée étant la tension de commande de l'électro-optique intégré sur LiNbO_3 . La non linéarité est la fonction qui relie la puissance optique de sortie et la tension de commande, il s'agit bien d'une relation sinusoïdale lorsque l'intensité et la longueur d'onde en entrée ne varient pas. Le retard temporel est réalisé par une certaine longueur de fibre. La constante de temps la plus lente peut être à l'origine de différents éléments de la contre réaction électronique : détection, amplification, ou encore temps de réponse de l'électro-optique. Si ces durées caractéristiques sont suffisamment proches, la dynamique peut être du deuxième ordre, voire plus. L'ordre de grandeur de la constante de temps peut atteindre, en théorie, et compte tenu des performances actuelles des composants, quelques dizaines de picosecondes, ce qui correspond à une bande passante d'une dizaine de gigahertz environ.

La loi physique de la dynamique de ce système est formellement exactement la même que celle du système d'Ikeda. On observe donc la même série de bifurcations par dédoublement d'état, jusqu'à un point d'accumulation du paramètre de bifurcation, où l'on observe une cascade inverse pour ensuite atteindre un régime de

chaos entièrement développé. Le paramètre de bifurcation peut être réglé par différentes grandeurs physiques qui ont formellement la même influence, l'étirement selon l'axe des ordonnées de la non linéarité : il s'agit de la puissance optique constante de l'entrée, ou du gain de la boucle de contre réaction. La tension continue d'offset permet de régler le point de repos, ou autrement dit, l'intersection de la non linéarité avec la droite d'itération $y=x$.

5. Diodes lasers et injection de lumière

Les effets d'injection optique sont très importants pour la plupart des lasers, et principalement pour les lasers semiconducteurs qui y sont très sensibles, à cause du faible facteur de qualité de leur résonateur optique (faces réfléchissantes à 30% environ en énergie). Dans le cas d'un retour de la lumière initialement émise (ex : réflexion parasite), même un niveau très faible (-70dB) peut entraîner une forte modification de la nature de l'oscillation laser (d'où l'importance des isolateurs optiques). Des instabilités en intensité sont observées, des lasers monomodes deviennent multimodes, ou inversement, des sauts de modes peuvent également se produire. Ces effets ne sont pas toujours considérés comme des inconvénients, ils peuvent parfois être mis à profit : les lasers à cavité externe permettent d'avoir des sources très cohérentes, très stables, et accordables en longueur d'onde ; un laser très sensible à ces retours peut également servir de capteur de lumière, comme cela a été tenté en optique du champ proche à Besançon (U. Schwarz, D. Courjon).

Certains modèles ont permis de décrire ces instabilités en terme de dynamique chaotique. Cette instabilité n'est pas aléatoire mais tout à fait déterministe. Les mécanismes de sélection des modes d'oscillation sont complexes et fortement non linéaires. La résolution des équations physiques de gain et de phase dans le laser permettent d'obtenir la fréquence optique d'oscillation et l'amplitude du champ. Le modèle dynamique obtenu est du 2^{ème} ordre avec amortissement, il met en évidence un temps de relaxation de nature électronique. L'aller-retour, dans le cas d'une cavité externe joue le rôle d'une contre réaction optique retardée, le retard correspondant à la durée du trajet dans la cavité externe. Cette durée est à comparer avec le temps de relaxation du milieu amplificateur. Le paramètre de bifurcation est en général la quantité de lumière réinjectée. Dans le cas de cavités assez courtes (~3 cm), une analyse théorique a mis en évidence une évolution vers un chaos en intensité par dédoublement de période [II.8]. Les phénomènes de sélection de mode sont suffisamment complexes pour donner lieu, avec le même système à cavité externe, mais pour d'autres longueurs de cavité, à des transitions différentes vers le chaos (quasi-périodique, oscillations sous-harmoniques).

Une autre configuration conduit également à un chaos sur la variable intensité, et a fortiori sur la longueur d'onde, ces deux grandeurs n'étant pas indépendantes dans une diode laser classique. Il s'agit d'une dynamique non autonome, obtenue par injection d'une lumière laser venant d'une autre source, de fréquence optique voisine de celle de la diode laser : on parle alors d'« injection locking ». Selon le décalage de fréquence optique, et selon le taux d'injection, on assiste à un accrochage stable en intensité sur la source externe, ou à une oscillation chaotique [II.9].

Il a été proposé [II.10] d'associer ces 2 configurations de chaos dans les lasers semiconducteurs pour réaliser un système de transmission optique codée. L'étude théorique propose de générer du chaos en intensité à l'aide d'un laser à cavité externe, et d'ajouter l'information par un modulateur externe. Le décodage s'effectue

en synchronisant un oscillateur chaotique local sur le chaos reçu. Le chaos local est réalisé par une diode laser en « injection locking », la source externe étant le signal chaotique reçu.

II. Le générateur de chaos en longueur d'onde

Après cette série d'exemples expérimentaux décrits par le modèle d'Ikeda, nous allons présenter l'oscillateur chaotique en longueur d'onde que nous avons réalisé. Une présentation du montage expérimental sera suivie d'une discussion concernant les originalités du système proposé. Une description des fonctions de transfert de chaque élément de la chaîne d'oscillation, nous permettra ensuite d'établir la loi dynamique à l'origine du comportement chaotique.

A. Principe de fonctionnement

1. Schéma-blocs

La structure d'ensemble est bien sûr assez proche des exemples précédents de systèmes d'Ikeda. L'équation dynamique réduite (II.15) prend une forme équivalente à (II.14), le passage de l'une à l'autre s'effectuant par simple changement de variable :

$$X(t) + \left(\frac{dX}{dt} \right) t = \beta \cdot \sin^2 \{ X(t-T) + \Phi \} \quad (II.15)$$

Cette expression sera démontrée ultérieurement en fonction des paramètres physiques expérimentaux.

La principale différence expérimentale réside dans l'utilisation de la variable longueur d'onde, et dans les changements que cela implique au niveau de la réalisation des fonctions essentielles de la boucle d'oscillation. Celle-ci comprend (figure II.7) :

- une diode laser monomode accordable continûment en longueur d'onde par un courant d'électrode, autour de 1,5 μm .
- un isolateur optique permettant de garantir le bon fonctionnement de la source accordable ; cet élément n'intervient pas dans la modélisation.
- un filtre biréfringent réalisant une transformation non linéaire de type sinusoïdal entre la variable d'entrée (variation du nombre d'onde, ou de la longueur d'onde) et la variable de sortie (puissance optique).
- une photodiode permettant de convertir la puissance optique en signal électrique.
- un système réalisant un retard temporel pur de valeur convenable.
- un filtre électronique RC du premier ordre pour « forcer » la constante de temps de la boucle de retour à des valeurs facilement manipulables d'un point de vue expérimental.
- un amplificateur électronique réglable pour ajuster le gain de la boucle de retour.
- un sommateur de composante continue, qui permet d'ajuster la longueur d'onde centrale d'émission du laser.

Une évolution complète dans la boucle d'oscillation peut se décrire simplement de la façon suivante. La source laser émet un faisceau monomode de puissance optique constante P_0 , et dont la longueur d'onde $\lambda(t)$ évolue selon une loi linéaire avec un courant d'électrode $I_2(t)$. Ce faisceau traverse un filtre biréfringent qui fournit à sa sortie une variation d'intensité non linéaire en fonction de la longueur d'onde d'entrée. Cette variation d'intensité est détectée pour en donner un signal électrique. Après avoir été retardé, « ralenti », et amplifié, le signal électrique est réinjecté dans l'électrode commandant la longueur d'onde du laser accordable.

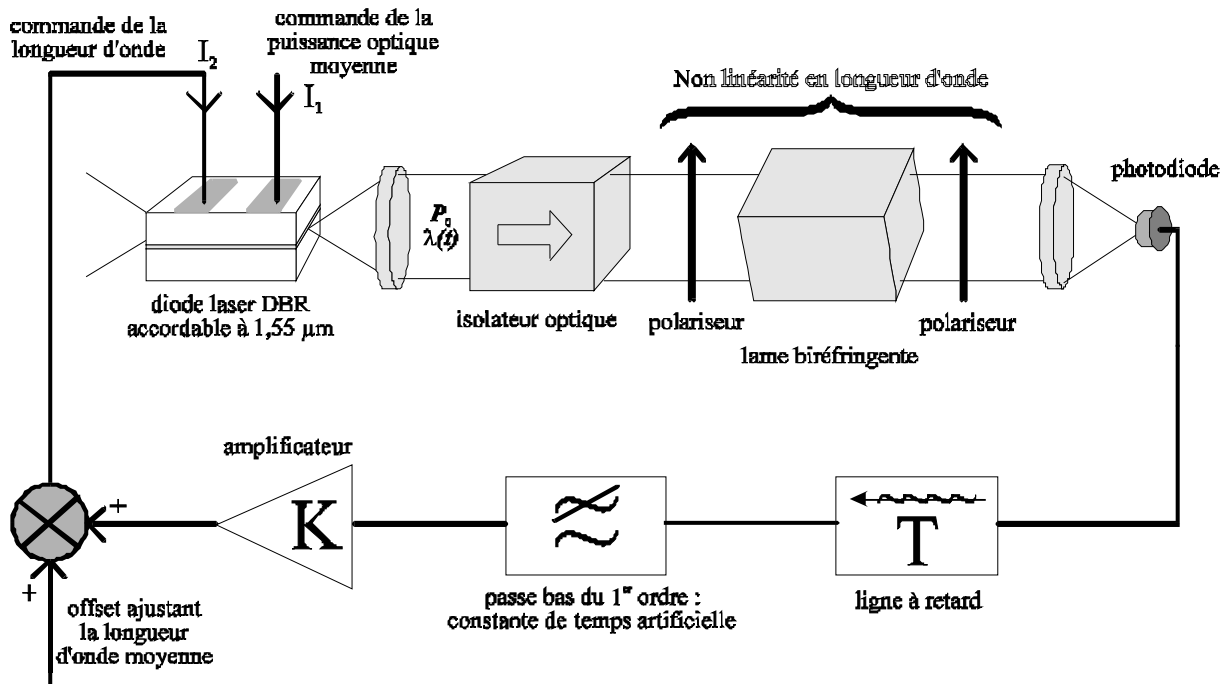


Figure II.7 : Oscillateur chaotique en longueur d'onde.

Tous les éléments, à part le filtre biréfringent, sont considérés comme linéaires dans la plage de variation des grandeurs concernées. Le chaos est dit en longueur d'onde car une des variables dans la chaîne d'oscillation est la longueur d'onde, mais formellement, il s'agit aussi d'un chaos en intensité après le filtre biréfringent, ou d'un chaos électronique dans la boucle de contre réaction. La longueur d'onde est effectivement retenue comme variable, car c'est elle seule qui code l'information au niveau de la ligne de transmission. Le faisceau injecté dans la ligne est une fraction prélevée juste avant la non linéarité, là où la puissance optique est constante, et donc là où seule la longueur d'onde varie.

2. Originalités et principaux avantages

Une des premières caractéristiques importantes de ce système est la nature artificielle du chaos qui est engendré. Il est artificiel dans le sens où il est créé de toute pièce, chaque élément constitutif de l'oscillateur est clairement défini et contrôlé. Une telle conception rigoureuse est nécessaire si l'on veut mettre toutes les chances de côté pour ensuite contrôler correctement la dynamique chaotique, et exploiter à des fins de cryptage la nature de ce chaos. Ce système diffère de la plupart des générateurs de chaos optique, excepté les montages en anneau ou les Mach Zehnder commandables intégrés en boucle, parce que le chaos n'est pas la conséquence de phénomènes physiques intrinsèques. Lorsqu'il s'agit de la

polarisation dans les laser CO₂, du comportement chaotique en énergie des diodes laser en « injection locking », le fonctionnement découle de processus qui peuvent difficilement être contrôlés ou isolés. Notre oscillateur a été délibérément conçu dans un état d'esprit de « systémier », pour pouvoir contrôler la dynamique générée.

L'aspect longueur d'onde apporte également une originalité à différents points de vue par rapport aux systèmes classiques déjà réalisés à partir de chaos optique en intensité [cf. § précédent]. Dans un contexte « télécommunication optique », l'utilisation de la variable longueur d'onde va dans le sens de l'évolution actuelle. Le transport de l'information fait de plus en plus usage de la longueur d'onde. Ceci permet de mieux exploiter l'énorme capacité d'une seule fibre optique à transporter plusieurs canaux en même temps, chaque canal étant caractérisé par une fenêtre de longueur d'onde (WDM : Wavelength Division Multiplexing). Ce multiplexage peut bien sûr être adapté à notre système de codage, en transmettant plusieurs canaux cryptés suivant le même principe, avec des clés différentes, sur une même fibre.

D'autre part, la commande associée à la variation de la longueur d'onde est adaptée à un système de transmission, car c'est une commande en faibles signaux. En effet ce n'est pas la puissance optique qui est modulée. L'énergie de la porteuse est constante, et est fixée par le courant moyen de pompage du laser semiconducteur. Dans le cas de la source DBR, un courant d'accord de quelques mA suffit pour atteindre toute la plage nécessaire de variation en longueur d'onde. Ceci correspond à quelques fractions de mW électroniques en commande.

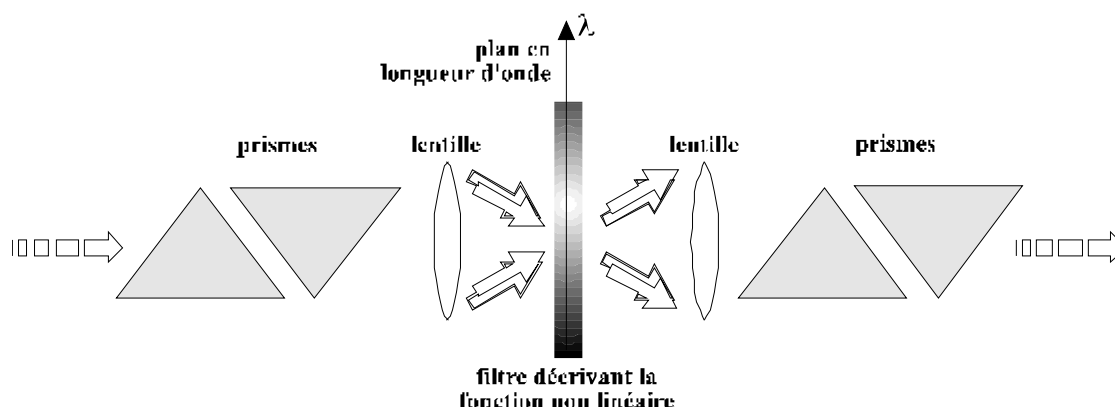


Figure II.8 : montage réalisant une non linéarité quelconque en longueur d'onde

Enfin, du point de vue optique, la variable longueur d'onde donne en principe accès à un très grand nombre de clés de codage, parce que les transformations réalisables sur cette grandeur sont faciles et variées. Un des éléments déterminants dans la caractérisation du chaos, donc de la clé, est la non linéarité en longueur d'onde. Pour générer du chaos, cette non linéarité doit présenter un extremum dans la fenêtre optique où la longueur d'onde évolue. Pratiquement, nous avons choisi un filtre biréfringent. Mais le choix de cet élément est très libre, et il peut même être créé sur mesure comme l'illustre le montage proposé à la figure II.8. Dans cet exemple, un montage symétrique à double dispersion permet de projeter sur un axe le spectre optique. On agit alors très facilement et avec une grande variété de choix sur le spectre, en plaçant dans le plan de cette projection un filtre quelconque. On peut même imaginer de réaliser un filtrage dynamique à l'aide de cellules à cristaux liquides. Dans ce cas, le chaos serait déterminé par la forme même de sa non linéarité, ce qui se traduirait par une modification du diagramme de bifurcation. On le

voit clairement, ce schéma de chaos en longueur d'onde permet une grande souplesse sur le mode de cryptage, mais il ouvre également des possibilités nouvelles d'investigations expérimentales de la théorie du chaos.

B. Fonction de chaque élément de l'oscillateur

1. La diode laser

Cet élément est sûrement celui qui pose technologiquement le plus de problèmes. Il ne s'agit pas en effet de simples diodes laser telles qu'elles sont couramment utilisées dans les télécommunications optiques. La fonction à remplir par ce composant est quelque peu inhabituelle, encore pour l'instant. Il doit s'agir d'une source continûment accordable en longueur d'onde. La plage d'accordabilité qui doit être accessible est définie grossièrement par la caractéristique de la non linéarité décrite plus bas. La source accordable doit pouvoir balayer une bande optique qui couvre un voisinage suffisamment grand de l'extremum de la non linéarité ; dans le cas d'une non linéarité périodique, cette plage minimum correspond environ à une période en longueur d'onde. La relation entre le courant d'électrode et la longueur d'onde de sortie est supposée linéaire. Cette approximation en vue de la modélisation est relativement bien vérifiée en pratique. Enfin, une dernière condition a priori évidente doit être remplie par la source accordable, elle concerne la rapidité de la commande qui doit être suffisante comparée à la dynamique des signaux que l'on désire coder.

Aucune réalisation expérimentale n'aurait pu être possible sans l'existence de ces sources très récentes (~1990). Leur apparition est sans aucun doute à l'origine du re-nouveau qu'a connu le thème du cryptage par chaos en longueur d'onde au laboratoire d'Optique P.M. Duffieux (1993-94, J.P.Goedgebuer). Cette idée avait en effet déjà été évoquée [II.5] en 1986 à l'occasion d'un séminaire organisé par le CNET sur les applications de la théorie du chaos. A l'époque, l'absence de source accordable avait renvoyé le projet à plus tard. Ces sources seront décrites plus en détail au chapitre V.

Pour les besoins de la modélisation, nous utiliserons une fonction de transfert linéaire (sensibilité $S_\lambda = [\delta\lambda]/[\delta i]$) entre les variables courant ($I = I_0 + i$) et longueur d'onde ($\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$). La puissance optique de sortie (P_0) sera supposée constante, et donc indépendante du courant d'accord de la longueur d'onde :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0(I_0) + S \cdot i = \lambda_0 + (\delta\lambda) \\ P_0 &= \text{constante} \end{aligned} \quad (II.16)$$

Pratiquement, la puissance varie tout de même lorsque la longueur d'onde est modulée. Cette modulation d'intensité sera soit supposée négligeable, soit compensée par une méthode décrite ultérieurement.

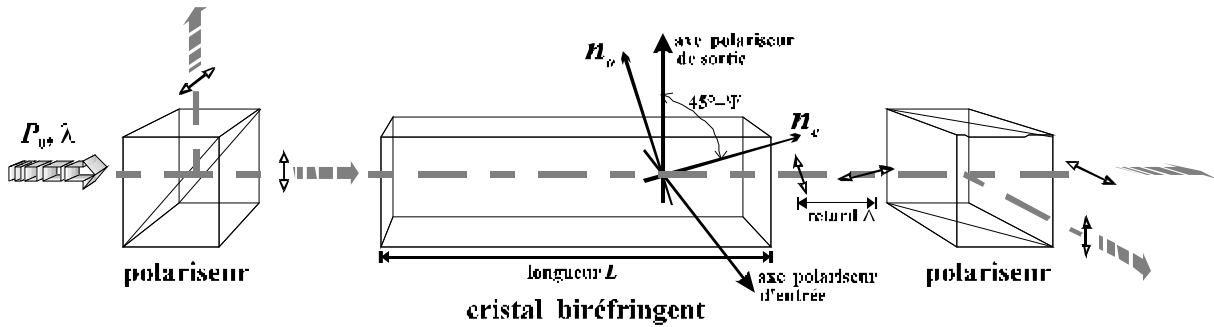
2. La non-linéarité optique

a. Description

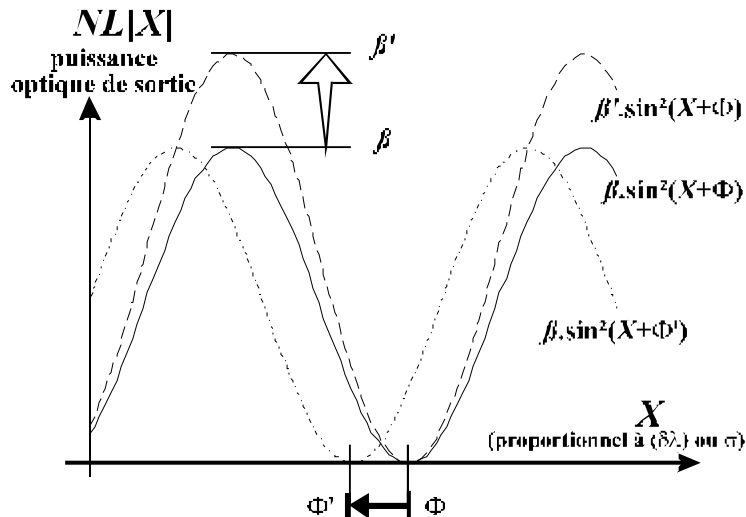
Une condition suffisante sur la non linéarité pour obtenir une dynamique chaotique est de présenter un extremum dans l'intervalle de variation de la variable d'entrée. Dans le cas du système en anneau d'Ikeda, l'extremum de la fonction non linéaire

est obtenu grâce à un absorbant à deux niveaux. Le chaos apparaît sur la variable intensité.

Dans notre cas, une non linéarité en longueur d'onde peut être réalisée par divers moyens, tels qu'un Fabry Péro, un interféromètre de Mach Zehnder ou de Michelson à retard fixe, ou encore un filtre biréfringent. C'est cette dernière solution qui a été retenue, pour des raisons de stabilité et de facilité expérimentale relative à la plage de longueur d'onde accessible. De plus, cette non linéarité est de type sinusoidal, comme dans le modèle d'Ikeda.



II.9.1 : montage optique réalisé.



II.9.2 : fonction de transfert de la non linéarité

Figure II.9 : filtre biréfringent.

Notons que dans toutes les non linéarités évoquées, la variable d'entrée est la longueur d'onde, alors que la grandeur observée en sortie est une intensité lumineuse. Un système bouclé en oscillateur de longueur d'onde nécessite forcément un élément dans la boucle de retour permettant d'effectuer la conversion inverse. Cette fonction est réalisée par la détection de l'intensité, donc la conversion en photocourant, puis par la réinjection de ce photocourant dans la source laser accordable en longueur d'onde. Cet ensemble de transformations de l'intensité lumineuse en longueur d'onde est supposée être réalisé par une succession de blocs linéaires, de manière à bien contrôler et isoler « LA » seule non linéarité de la chaîne d'oscillation.

Le montage optique réalisant la fonction non linéaire choisie est représentée figure II.9.1. La représentation graphique de sa fonction de transfert apparaît à la figure II.9.2, avec la mise en évidence de l'influence des paramètres :

- β est l'amplitude ($NL_{Max}-NL_{min}=NL_{Max}$) ; la variation de ce paramètre entraîne une affinité géométrique selon l'axe des ordonnées, cette variation a le même effet qu'un changement de gain dans la partie électronique.

- Φ agit au contraire sur l'axe des abscisses ; sa variation entraîne une translation de la courbe selon cette axe. Ce paramètre fait « glisser » horizontalement la courbe. Cette idée de glissement est en fait relative à un repère fixe, et l'importance de ce paramètre intervient clairement lorsqu'on étudie l'influence de la position relative des extrema de la non linéarité par rapport à la droite d'itération $y=x$. On voit alors clairement que la variation de Φ fait glisser le (ou les) point(s) d'intersection avec cette droite fixe. En glissant, ces points changent continûment leur pente sur la non linéarité, d'où une modification de la dynamique du système (perte ou gain de stabilité).

b. Modélisation

La fonction de transfert de ce filtre biréfringent s'obtient assez simplement dans un cas général, par la composition de matrices de Jones. Ce filtre optique utilise des propriétés de polarisation d'une onde plane cohérente. Cette polarisation est décrite par un vecteur dans le plan d'onde :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} A_x \cdot e^{i\delta_x} \\ A_y \cdot e^{i\delta_y} \end{bmatrix},$$

où $(\delta_y-\delta_x)$ exprime la phase relative de la vibration selon « y » par rapport à celle selon « x ». Le champ électromagnétique physique dans le plan d'onde est dans ce cas :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(X_x \cdot e^{i\omega t}) \\ \text{Re}(X_y \cdot e^{i\omega t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \cdot \cos(\omega t + \delta_x) \\ A_y \cdot \cos(\omega t + \delta_y) \end{bmatrix}$$

Un composant optique agissant sur chacune des polarisations s'écrit sous forme de matrice. Dans le cas d'une lame biréfringente uniaxe, d'axe parallèle à celui de la propagation, il s'agit de traduire un retard de phase différent entre deux polarisations orthogonales au cours de la traversée par l'onde du cristal de longueur L . Dans le système d'axes lent et rapide de la lame biréfringente, cette matrice prend la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \exp\left(i \frac{2 \cdot \pi \cdot n_o \cdot L}{\lambda}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i \frac{2 \cdot \pi \cdot n_e \cdot L}{\lambda}\right) \end{bmatrix}$$

L'expression des matrices de transformation dépendant du système d'axes choisis dans le plan d'onde, les matrices de rotations sont évidemment indispensables pour

pouvoir appliquer ces matrices à des vecteurs exprimés dans un autre système d'axes orthonormés :

$$R(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos(\Psi) & \sin(\Psi) \\ -\sin(\Psi) & \cos(\Psi) \end{bmatrix}$$

Enfin, une dernière matrice nous est nécessaire pour finir la description de notre filtre biréfringent, celle d'un polariseur, qui agit comme un simple projecteur. Dans son propre système d'axes, la matrice d'un polariseur est :

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La figure II.9.1 représente l'ensemble du filtre biréfringent, dont la puissance optique de sortie s'obtient en prenant le module au carré du vecteur suivant :

$$\vec{Y} = P_y \cdot R(-\Psi) \cdot M \cdot R(\Psi) \cdot P_x \cdot \vec{X}$$

où \vec{X} est le vecteur en entrée, P_x est le polariseur d'entrée dont l'axe est pris comme référence dans le plan d'onde, Ψ est l'angle entre la référence et la ligne neutre de la lame biréfringente. Le polariseur de sortie a été choisi croisé par rapport à celui d'entrée. Après calculs, la puissance optique de sortie a pour expression :

$$P = P_0 \cdot \sin^2(2 \cdot \Psi) \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (II.17)$$

avec $\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot (n_e - n_o) \cdot L}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot (n_e - n_o) \cdot L \cdot \sigma = 2 \cdot \pi \cdot \Delta \cdot \sigma$

P_0 est la puissance optique en entrée du filtre, φ est le retard de phase introduit entre vibrations par la lame, Δ est la différence du chemin optique équivalent dans le vide, λ et σ sont la longueur d'onde et le nombre d'onde dans le vide.

Commentaires :

- Le paramètre de bifurcation β , correspondant graphiquement à l'amplitude de la fonction non linéaire, trouve dans cette expression un moyen simple d'ajustement expérimental : en tournant la ligne neutre de la lame par rapport aux axes fixes des polariseurs (angle Ψ), on joue directement sur ce paramètre. Une simple rotation mécanique doit donc permettre de faire bifurquer le système.

- Nous voyons que la variable qui donne une fonction rigoureusement en sinus, est le nombre d'onde et non la longueur d'onde. Toutefois, compte tenu du domaine de variation très faible par rapport à la valeur moyenne, il est plus que raisonnable d'effectuer un développement limité de la non linéarité autour de cette valeur moyenne ($\langle \lambda \rangle = \lambda_0 = 1550 \text{ nm}$, et $\Delta \lambda = 0,2 \text{ nm}$, facteur 7.000). La description de la non linéarité, et donc de la dynamique chaotique, peut être faite indifféremment avec la variable longueur d'onde ou la variable nombre d'onde. Nous avons choisi λ de façon tout à fait arbitraire.

- De manière à ramener la description de la non linéarité au montage expérimental et à la dynamique chaotique, il peut être intéressant d'effectuer certains changements de variable pour mettre en évidence des grandeurs particulières. Ainsi, on écrira plutôt l'argument de la non linéarité de la façon suivante :

$$\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta}{\lambda} \cong \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \frac{(\delta\lambda)}{\lambda_0} \right) = 2 \cdot \pi \cdot \left(k - \frac{(\delta\lambda)}{T_\lambda} \right) - \Phi$$

alors la non linéarité s'écrit :

$$P = P_0 \cdot \sin^2(2 \cdot \Psi) \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{T_\lambda} \cdot (\delta\lambda) + \Phi \right) \quad (II.18)$$

$$\text{avec : } T_\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta} \text{ et } \Phi = \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} [\text{mod. } \pi] \quad (II.19)$$

Cette expression fait apparaître T_λ , la périodicité en longueur d'onde du filtre biréfringent. La lame a été caractérisée pratiquement en mesurant ce paramètre physique. T_λ est également une référence d'amplitude lorsqu'on veut décrire la plage de variation du chaos en longueur d'onde.

Le paramètre Φ repère la position de la cannelure selon l'axe des abscisses. Cet angle théorique peut être ajusté expérimentalement en jouant sur la longueur d'onde moyenne, c'est-à-dire sur le courant moyen de commande de la source accordable, ou encore sur le chemin optique Δ (faible rotation de la lame autour d'un axe perpendiculaire à la direction de propagation).

3. Retard temporel et constante de temps

Le retard temporel est pratiquement réalisé avec une bonne qualité. Un signal $s(t)$ à l'entrée est simplement transformé en $(s(t-T))$ à la sortie. Cette durée correspond au temps de parcours dans la ligne à retard. Les différentes réalisations pratiques de cette fonction seront détaillées au chapitre V.

La constante de temps a déjà été discutée au début de ce chapitre (I.A.1.b). Elle équivaut dans notre modèle à une fonction passe bas du 1^{er} ordre. Un comportement expérimental fidèle à ce modèle a été obtenu en introduisant une constante de temps artificielle plus élevée que toutes les autres (diode laser ou photodétection par exemple).

Retard et constante de temps sont 2 grandeurs homogènes dont les valeurs relatives sont très importantes dans le comportement dynamique de l'ensemble du système, comme cela a déjà été discuté plus haut (I.A.2).

C. Modèles

Les différents éléments de l'oscillateur chaotique en longueur d'onde viennent d'être décrits en termes de fonction de transfert. Ceci va maintenant nous permettre de modéliser la dynamique de l'ensemble de la chaîne d'oscillation. Un modèle complet

continu sera d'abord établi, puis une approximation nous permettra d'en donner un équivalent discret.

1. Modèle continu

a. Etablissement du modèle

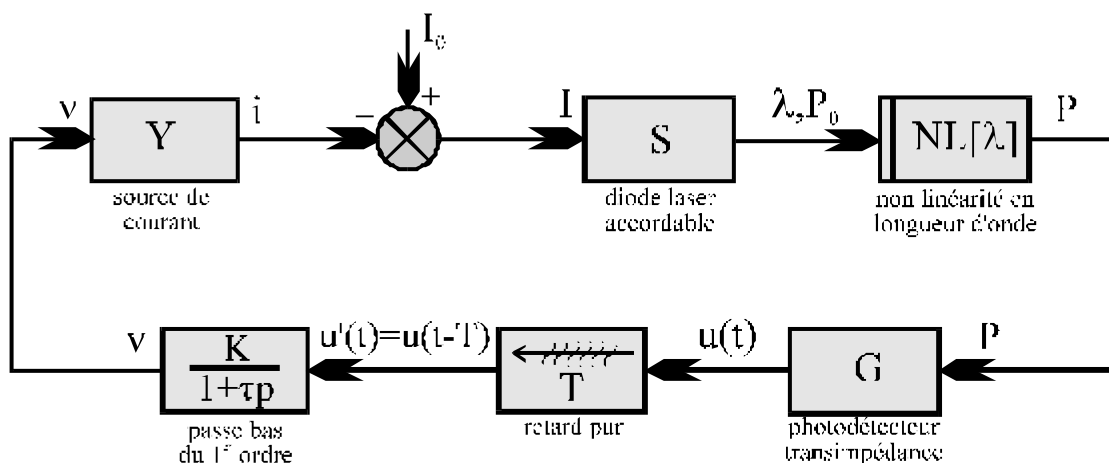


Figure II.10 : Schéma bloc de l'oscillateur chaotique en longueur d'onde

La figure II.10 symbolise l'oscillateur chaotique avec les blocs fonctionnels décrits dans le paragraphe précédent. Le seul composant non linéaire est supposé être la non linéarité en longueur d'onde, et le composant qui limite la dynamique est supposé être du premier ordre. Les équations caractéristiques de chaque bloc sont les suivantes :

diode laser : $\lambda = \lambda_0(I_0) + S \cdot i = \lambda_0 + (\delta\lambda)$, avec $S = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial i}\right)_{I_0} < 0$ dans le cas

des diodes DBR. S est la sensibilité en accordabilité, et dépend bien sûr de la plage d'accord continue choisie. Elle est supposée constante sur la plage utilisée. Pratiquement, cette dernière hypothèse est relativement bien vérifiée, la fonction liant courant et longueur d'onde étant très légèrement convexe (aspect d'une hyperbole).

$P = P_0(I_0, a)$ est la puissance optique de sortie, qui est supposée constante. Ce n'est pas le cas en réalité, mais un asservissement électronique de contrôle automatique de gain à la détection permet de faire comme si cette grandeur était pratiquement constante. Cet artifice de simplification du modèle est décrit plus loin au chapitre V.

non linéarité : $P = P_0 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0 + S \cdot i}\right) \approx P_0 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} + (\delta\lambda) \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{(\lambda_0)^2}\right)$,

cette expression est obtenue à partir de l'équation (II.18), en prenant un filtre biréfringent à polariseurs croisés ($\sin^2(2\psi)=1$). L'approximation faite en considérant le retard optique linéaire avec la variation de longueur d'onde, c'est-à-dire le courant, est correctement vérifiée sans trop de difficulté, la longueur d'onde moyenne étant entre 3 et 4 ordres de grandeur supérieure à

la petite variation de la longueur d'onde. La fonction peut sinon être rigoureusement traitée en considérant la variable nombre d'onde qui intervient linéairement dans l'argument, mais cela ne change pas notablement les résultats. Il est pratiquement indifférent de choisir la variable nombre d'onde ou longueur d'onde.

passé bas :
$$v(t) + \tau \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right) t = K \cdot u(t-T) = K \cdot G \cdot P(t-T) , \quad K$$

représentant un gain électronique de la boucle de retour, et G un facteur de conversion de puissance optique en tension au niveau de la détection. Cette relation peut se réécrire en prenant comme variable la variation en longueur d'onde $(\delta\lambda)$, la relation entre v et $(\delta\lambda)$ étant linéaire $(\delta\lambda)(t) = S \cdot Y \cdot v(t)$:

$$(\delta\lambda)(t) + \left(\frac{d(\delta\lambda)}{d(t/\tau)} \right) t = S \cdot Y \cdot K \cdot G \cdot P_0 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} + \frac{\pi \cdot \Delta}{(\lambda_0)^2} \cdot (\delta\lambda)(t/\tau - T/\tau) \right) \quad (II.20)$$

Il est maintenant facile de retrouver le modèle continu que nous avons annoncé au départ, en faisant des simples changements de variable, et en normalisant les durées par rapport à τ :

$$X = \frac{\pi \cdot \Delta}{(\lambda_0)^2} \cdot (\delta\lambda) \quad (II.21) \quad \Phi = \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} [\text{mod. } \pi] \quad (II.22)$$

$$\beta = \frac{\pi \cdot \Delta}{(\lambda_0)^2} \cdot S \cdot Y \cdot K \cdot G \cdot P_0 \quad (II.23) \quad (t/\tau, T/\tau) \rightarrow (t', T') \quad (II.24)$$

$$X(t') + \left(\frac{dX}{dt'} \right) t' = \beta \cdot \sin^2 \{ X(t' - T') + \Phi \} \quad (II.25)$$

b. Discussions

La dynamique choisie est du premier ordre, elle résulte expérimentalement d'un choix délibéré de limiter la rapidité du système, de manière à mieux l'étudier. L'absence de cette limitation expérimentale conduirait sans doute à une dynamique qui serait celle des porteurs libres au niveau de la jonction d'accord de la longueur d'onde (voir chapitre V). Cette modification n'enlève sûrement pas le caractère chaotique de certaines solutions dynamiques, mais ce chaos serait différent. Il résulterait sans doute d'une dynamique du 2^{ème} ordre comportant un terme oscillant et un terme de freinage.

L'écriture (II.25) de la dynamique fait apparaître les 2 paramètres Φ et β qui seront considérés comme indépendants dans les simulations. Cette propriété ne semble pas à première vue évidente dans le système expérimental. Les valeurs numériques montrent qu'une action sur la longueur d'onde moyenne modifie Φ en affectant de manière largement négligeable la valeur de β . Une action sur le gain électronique modifie uniquement β .

2. Modèle discret

Lorsque la constante de temps la plus lente de la boucle devient très petite devant la valeur du retard temporel, certaines simplifications peuvent être faites dans la

modélisation. Dans certaines conditions (régime périodique, discuté au chapitre IV), la sortie de chaque bloc dispose d'assez de temps pour prendre la valeur correspondant à l'entrée, avant que cette entrée n'ait eu le temps de subir les effets du bouclage (retard). Dans certains cas, il devient possible de négliger le terme différentiel $\tau \cdot [d(\delta\lambda)]/[dt]$, ce qui revient à l'approximation adiabatique. Le modèle se réduit alors à un système itératif décrit mathématiquement par une suite, dont les termes sont les valeurs $\delta\lambda$ prises à des instants nT , n étant entier. L'équation (II.20) se réduit alors à :

$$(\delta\lambda)(n \cdot T) = S \cdot Y \cdot K \cdot G \cdot P_0 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} + \frac{\pi \cdot \Delta}{(\lambda_0)^2} \cdot (\delta\lambda)((n-1) \cdot T) \right) \quad (II.26)$$

ce qui correspond avec des variables normalisées à la formulation suivante :

$$X_n = \beta \cdot \sin^2 \{ X_{n-1} + \Phi \} \quad (II.27)$$

La constante de temps n'intervient plus dans ce modèle qui a l'avantage d'être extrêmement simple à utiliser. Du point de vue des simulations (chapitre IV), il n'est plus nécessaire d'intégrer numériquement une équation différentielle. Le domaine de validité de l'approximation adiabatique est bien sûr limité. Les transitions effectives d'un terme à un autre de la suite ne sont pas infiniment rapides, l'analyse de ce qui se passe pendant ces transitions ne peut se faire qu'à l'aide du modèle continu. Ceci sera discuté plus en détail dans le chapitre IV, qui exposera les résultats des simulations effectuées à partir de chaque modèle.

L'oscillateur chaotique en longueur d'onde qui vient d'être présenté constitue l'élément central du système de cryptage que nous nous proposons de réaliser, il permet de générer le signal pseudo-aléatoire de codage. Nous allons maintenant décrire les différentes techniques qui permettent de réaliser des fonctions de codage et de décodage à partir d'un générateur de chaos.

CHAPITRE III : CRYPTAGE PAR CHAOS

L'idée d'utiliser des dynamiques chaotiques à des fins de cryptage est relativement récente (1990). On comprend aisément que le chaos, de part sa nature pseudo-aléatoire, (aspect bruité, spectre de fréquence de type bruit blanc) peut servir à faire du brouillage sur une information. Le déterminisme intrinsèque de ces dynamiques est utilisé pour restituer le signal noyé dans ce « bruit ». Il ne s'agit alors plus de brouillage, mais de masquage. C'est le premier schéma de cryptage qui a été développé au Naval Research Laboratory par Pecora et Carroll. Quasi simultanément sont apparues d'autres techniques de cryptage que le masquage, telles que le codage par attribution de mots élémentaires à différentes zones de l'espace des phases de la dynamique. Une autre méthode encore, le « Chaos Shift Keying » (CSK) est une transposition au domaine des paramètres de bifurcation du principe classique de modulation électronique FSK (Frequency Shift Keying).

Les différentes méthodes de codage seront décrites dans la première partie. Dans une seconde partie nous exposerons les tentatives effectuées pour appliquer l'une d'elles à notre système chaotique.

I. Les différents principes de codage par chaos

A. Travaux de Pecora & Carroll (masquage d'information par chaos)

L.M. Pecora et T.L. Carroll [III.1] ont mis au point et appliqué une technique permettant de synchroniser un sous système dupliqué d'un oscillateur chaotique, avec le système complet. L'oscillateur autonome complet est souvent appelé le « maître », et le sous-système non autonome est l'« esclave ».

1. Synchronisation

Cette technique concerne les flots d'équation générale : $\dot{\vec{u}} = \vec{f}(\vec{u})$ (III.1)

Elle est en principe applicable aux itérations moyennant quelques modifications de formulation, mais elle a été pratiquement mise en oeuvre surtout pour des flots, typiquement de dimension 3.

Le vecteur d'état \vec{u} est partagé en 2 vecteurs $\vec{u} = (\vec{v}, \vec{w}) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ appartenant à 2 sous espaces de l'espace des phases ($\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ et $\vec{w} = (w_{m+1}, \dots, w_n)$). Chacun de ces vecteurs répond à une loi dynamique dérivée de (III.1) :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g}(\vec{v}, \vec{w}) = (f_1(\vec{u}), \dots, f_m(\vec{u})) \quad (III.2)$$

$$\dot{\vec{w}} = \vec{h}(\vec{v}, \vec{w}) = (f_{m+1}(\vec{u}), \dots, f_n(\vec{u})) \quad (III.3)$$

Le sous-système esclave est construit sur le modèle du vecteur \vec{w} , soit \vec{w}' . Il possède la même loi dynamique (III.3). Pour reproduire cette loi, le vecteur \vec{v} est nécessaire, il est prélevé chez le système maître, le vecteur \vec{v} manquant chez le système esclave. La dynamique du système esclave est décrite par :

$$\dot{\vec{w}}' = \vec{h}(\vec{v}, \vec{w}') \quad (III.3')$$

Le problème est de savoir si, possédant la même loi dynamique et la même composante \vec{v} , les 2 sous-systèmes \vec{w} et \vec{w}' vont converger ou non dans leur

évolution temporelle. Le vecteur erreur $\vec{\xi} = \vec{w}' - \vec{w}$ répond à une loi dynamique du type :

$$\dot{\vec{\xi}} = D_w \vec{h}(\vec{v}(t), \vec{w}(t)) \cdot \vec{\xi} \quad (III.4)$$

où $D_w \vec{h}$ n'est autre que le Jacobien du sous-système du vecteur \vec{w} . Le problème est ainsi ramené à un cas général de dynamique non linéaire non autonome (III.3'), pour lequel il faut chercher les exposants de Lyapounov à l'aide de (III.4). Si les exposants sont tous négatifs, le sous système est stable, et le vecteur \vec{w}' du système esclave va suivre le comportement de \vec{w} dans le système maître. Ces exposants de Lyapounov relatifs à un sous système d'un système chaotique complet, sont parfois appelés exposants de Lyapounov conditionnels (CLE : *Conditionnal Lyapounov Exponent*).

Une description complète du problème doit faire intervenir les inévitables différences entre les paramètres dynamiques du système esclave et ceux du système maître. La loi dynamique s'écrit alors : $\dot{\vec{w}} = \vec{h}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{\mu})$, où $\vec{\mu}$ est un vecteur dans l'espace des paramètres. Le calcul appliqué à des systèmes dynamiques connus (Lorenz, [III.1] [III.2]) montre que la synchronisation est relativement robuste vis à vis de petits écarts de paramètres. La littérature rapporte des comportements synchrones même pour des écarts de 10 à 20 %.

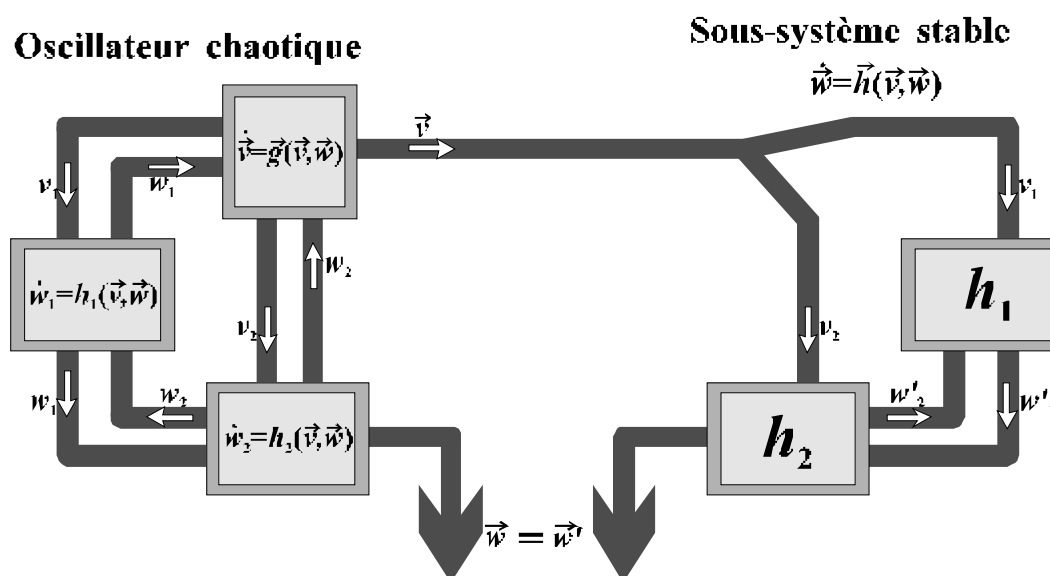


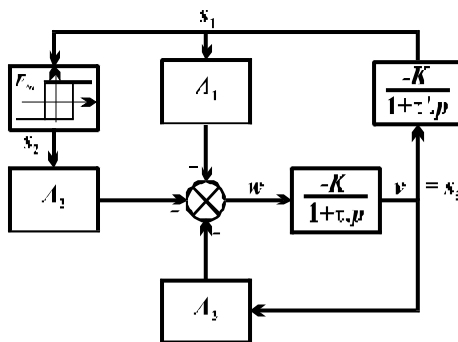
Figure III.1 : schéma du principe de synchronisation entre un système chaotique et un de ses sous-systèmes stable [II.1].

Ce principe théorique est illustré à la figure III.1. Il est évident qu'une condition indispensable est la possibilité physique de décomposition du système chaotique complet en sous-systèmes, dont l'un au moins est « stable », au sens qui vient d'être défini. L. Pecora a appliqué sa méthode de manière numérique sur les systèmes de Lorenz et de Rössler. Il a bien mis en évidence la synchronisation sur certains sous systèmes dynamiques à exposants de Lyapounov négatifs, alors que pour d'autres partitions, le sous système était instable car il possédait au moins un de ses exposants conditionnels positifs. La sensibilité au bruit de la synchronisation est discutée dans la littérature [III.3], ainsi que les transformations auxquelles sont soumis les signaux sur la ligne de transmission. Dans ce dernier cas de perturbation,

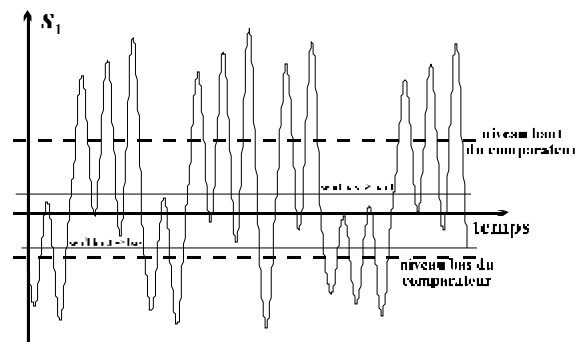
un traitement avant synchronisation correspondant à la transformation inverse est possible, il permet d'améliorer la qualité de la synchronisation.

2. Exemple d'applications, discussion

A titre d'illustration de ces systèmes dynamiques chaotiques synchrones, citons brièvement une application concernant une interprétation possible du fonctionnement d'un réseau neuronal. Certains auteurs pensent que la richesse de comportements et de réactions des systèmes neuronaux pourraient provenir d'un comportement dynamique chaotique, chaque orbite chaotique représentant une réaction. Les stimuli provoquant une réaction donnée seraient, dans ce contexte de dynamiques chaotiques synchrones, les vecteurs \vec{v} envoyés à des sous-systèmes simples stables. Ces sous-systèmes, d'après le principe de synchronisation par rapport à des stimuli, seraient capables d'induire des comportements complexes (les réactions) évoluant sur des attracteurs. Ces idées sont encore au stade des hypothèses, mais des comportements dynamiques chaotiques ont déjà été reconnus au niveau de l'activité cérébrale. Les observations effectuées sur des circuits de Chua intégrés en milliers d'exemplaires et interconnectés sur une puce électronique, semblent présenter des analogies de comportement avec certains réseaux neuronaux réels.



III.2.1 : schéma bloc du circuit



III.2.2 : chronogramme de $s_1(t)$

Figure III.2 : circuit chaotique électronique : dynamique oscillante instable à basculement.

Une application qui nous préoccupe plus directement concerne le codage d'information par masquage chaotique, et son décodage grâce à des principes de synchronisation. La figure III.2.1 représente un oscillateur chaotique électronique sous forme de schémas-blocs. Ces blocs sont réalisés pratiquement à l'aide de circuits électroniques simples remplissant les fonctions correspondantes (comparateur, passe bas du 1^{er} ordre, amplificateur). Ce système expérimental a permis la mise en oeuvre de la technique de synchronisation, dans un contexte de codage / décodage. L'oscillateur chaotique réalise une dynamique de la famille des flots à 3 dimensions. La non linéarité F_{NL} est un comparateur à seuil et hystérésis asymétrique, dont la sortie fait basculer (repliement) l'état oscillant d'un noeud instable (étirement) vers un autre noeud instable. La condition de basculement est un niveau seuil de l'oscillation autour de l'un ou l'autre noeud instable. La figure III.2.2 représente l'évolution dans le temps du signal s_1 . Les 2 noeuds instables sont repérés en pointillés comme les niveaux moyens des oscillations. Les seuils de basculement du comparateur sont également indiqués. Sauf conditions numériques particulières sur les valeurs des fréquences d'oscillation, les constantes de temps instables, ou les seuils, le fonctionnement n'est pas périodique lorsque le système bascule à nouveau sur le même noeud instable. D'un basculement à l'autre, les

oscillations instables sont décorréliées, l'évolution globale est chaotique. Un petit écart entre 2 conditions initiales au démarrage d'une oscillation va rapidement donner lieu à 2 chronogrammes complètement distincts.

Le modèle du circuit peut se résumer à une seule équation différentielle (III.5) du second ordre faisant intervenir une seule variable, s_1 . Le système évolue dans un espace des phases à 3 dimensions, puisque la détermination complète d'une trajectoire nécessite la donnée de $s_1(t=0), \dot{s}_1(t=0)$ ainsi que l'état initial du trigger (s_2 au niveau haut ou bas). L'espace des phases peut être représenté par ces 3 variables (s_1, \dot{s}_1, s_2) .

$$\ddot{s}_1 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{s}_1 + \omega^2 \cdot s_1 = -\alpha \cdot \omega^2 \cdot s_2 = F_{NL}(s_1) \quad (III.5)$$

Sous cette forme, le système peut même s'intégrer symboliquement pour chaque durée pendant laquelle la sortie s_2 du comparateur reste constante. On distingue alors des alternances positives (niveau haut S_h du comparateur), et des alternances négatives (niveau bas S_b), dont les évolutions dans le temps s'expriment par :

$$s_2 = S_h, \text{ tant que } s_1 > \text{seuil positif} \quad s_2 = S_b, \text{ tant que } s_1 < \text{seuil négatif}$$

$$s_1 = S_h + S_{2p} \cdot \exp(\xi \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{2p}) \quad s_1 = S_b + S_{2p+1} \cdot \exp(\xi \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{2p+1})$$

Des conditions de continuité sur s_1 et \dot{s}_1 , entre 2 alternances successives permettent d'exprimer l'amplitude (S_n) et la phase (φ_n) de l'alternance suivante. Ces 2 suites $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forment l'équivalent en dynamique discrète à 2 dimensions (semi-cascade) de cet oscillateur chaotique continu en 3 dimensions.

Le sous-système stable choisi apparaît à la figure III.3, en même temps que l'ensemble du système de cryptage par chaos. Le sous-système est construit de la même façon que l'oscillateur chaotique complet, seul le premier bloc passe bas de constante de temps τ est retiré. Le signal $s_3(t)$ fourni par ce bloc est l'analogue du signal $v(t)$ qui est apparu dans l'exposé général de la théorie de synchronisation.

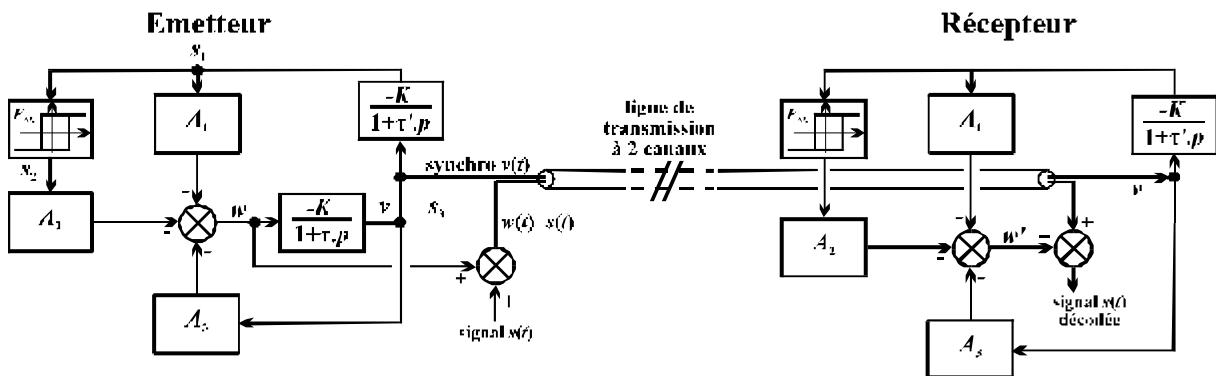


Figure III.3 : ensemble du système de cryptage par chaos synchronisés.

$w(t)$ est le signal avec lequel on cherche la synchronisation à la réception, par rapport au signal $w'(t)$ généré localement à partir de $v(t)$. $v(t)$ est transmis en parallèle de l'information masquée dans le chaos. Cette technique présente donc le désavantage de nécessiter 2 lignes de transmission. On peut voir a priori, sans calculer les exposants de Lyapounov du sous-système de réception, que le signal de synchronisation $v(t)$ possède en lui toutes les informations permettant de définir une alternance positive ou négative. Enfin, notons que la relation entre $v(t)$ et $w(t)$ est

relativement simple si l'on remonte la chaîne d'oscillation au lieu de la suivre dans le sens réel : il s'agit d'un simple filtrage passe-bas, qui peut être facilement inversé en réalisant un passe haut. La structure présentée est en fait plus pédagogique que pratique, un système mieux protégé choisirait comme variables $v(t)$ et $w(t)$ des grandeurs entre lesquelles la relation est univoque, non inversible, telle qu'une relation non linéaire à extrema.

On peut remarquer également dans cette méthode que l'information est mélangée au chaos à l'extérieur de la chaîne d'oscillation chaotique. Le signal de synchronisation est quant à lui exempt de toute perturbation liée à l'information. Ce ne sera pas le cas dans la méthode OGY, ni dans la méthode CSK de codage (voir plus bas), ni dans la solution retenue pour le cryptage par chaos en longueur d'onde, où l'information est une partie intégrante de l'oscillation chaotique.

B. « Chaos Shift Keying » (CSK, codage par commutation de chaos, [III.4])

Cet autre procédé de codage est issu du principe de synchronisation entre 2 oscillateurs chaotiques utilisé dans la démarche de Pecora et Carroll, et de la méthode numérique de codage en transmission de signaux électriques, le FSK (Frequency Shift Keying).

1. Frequency Shift Keying

Cette technique bien connue en électronique consiste à faire de la transmission numérique en modulation binaire de fréquence. L'émetteur possède 2 oscillateurs à 2 fréquences différentes, l'une représentant le niveau logique « 0 », l'autre le niveau logique « 1 ».

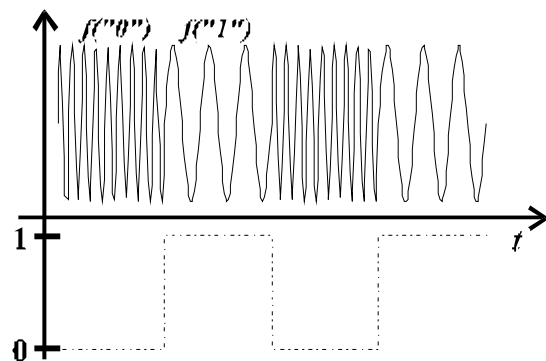


Figure III.4 : chronogramme d'un codage par fréquences décalées (FSK).

Un commutateur commandé par le signal à transmettre, envoie sur la ligne de transmission pendant un « temps bit », la porteuse dont la fréquence correspond à la parité du bit en cours de transmission. Une détection cohérente sur l'une des 2 fréquences permet de discriminer à la réception le niveau logique à détecter. La figure III.4 représente une série temporelle d'un tel codage, et la correspondance en niveau logique.

Cette technique est également utilisée en optique, les fréquences électroniques sont alors remplacées par des fréquences optiques, ou longueurs d'onde.

2. Transposition au cas de 2 porteuses chaotiques

Le schéma de la figure III.5 présente une configuration assez générale de transmission CSK. L'émetteur est un oscillateur chaotique dont un des paramètres est commutable sur 2 valeurs μ_0 et μ_1 , chacune de ces valeurs donnant lieu à une dynamique chaotique différente. Pour un observateur non averti, ces 2 dynamiques sont indiscernables, elles ont l'une comme l'autre une évolution pseudo-aléatoire, et sont donc indiscernables en première approche. Une « deuxième » approche

consisterait à tenter de casser la clé de codage à partir d'une étude plus fine de la dynamique chaotique observée. La difficulté de cette approche demande encore à être évaluée, de manière à estimer le degré de confidentialité de ce type de codage (ceci devrait être l'objet de travaux futurs dans le domaine du cryptage par chaos).

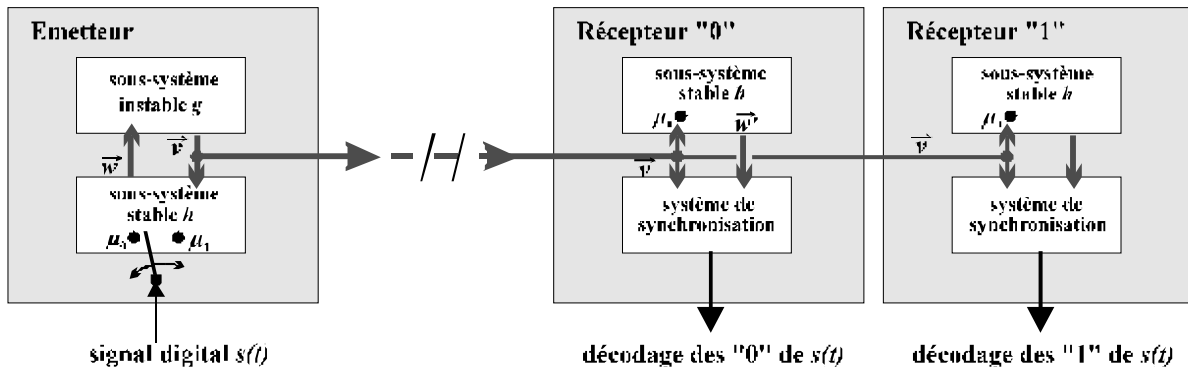


Figure III.5 : schéma général d'un système de transmission CSK

Le procédé de codage CSK s'explique de la façon suivante. A μ_0 correspond un attracteur chaotique codant le niveau logique « 0 », la valeur μ_1 codant le niveau « 1 ». Le récepteur est un sous-système stable de l'oscillateur chaotique d'émission, dont le paramètre μ est réglé sur l'une ou l'autre des 2 valeurs μ_0 ou μ_1 . Lorsqu'un indicateur de synchronisation du récepteur est positif, le bit correspondant est reconnu, sinon, il s'agit du bit complémentaire. Si la reconnaissance du bit doit être sûre pour les 2 parités possibles, le récepteur peut être dédoublé, l'un reconnaissant les « 0 », l'autre les « 1 » (cas de la figure III.5).

Un tel codage par CSK présente l'intérêt de n'avoir qu'une seule ligne de transmission pour réaliser le décodage. Mais il n'est pas adaptable à un codage analogique.

3. Exemple de réalisation

Plusieurs travaux ont porté sur l'application de la technique CSK à partir de différents oscillateurs chaotiques. Le circuit de Chua a été utilisé [III.4], ainsi que d'autres circuits électroniques tel celui proposé par Pecora et Carroll. Nous nous pencherons préférentiellement sur la réalisation de P. Celka [II.4], puisqu'elle concerne une dynamique chaotique de la même nature (système d'Ikeda) que celle que nous avons utilisée. Autre particularité intéressante, il s'agit aussi d'un système optique de transmission de l'information.

a. L'oscillateur chaotique

La figure III.6 représente l'oscillateur chaotique sur la variable puissance optique, dont la description a déjà été faite au chapitre II. Deux différences importantes sont à noter par rapport à l'oscillateur de la figure II.6 du chapitre II.

D'une part l'oscillateur de base présente une sortie optique supplémentaire $I(t-T)$ grâce à un coupleur 1 vers 2. Ce signal est l'image retardée des interférences de sortie du Mach-Zehnder. Cette sortie peut ensuite servir pour alimenter l'entrée (I_0, λ_0) d'un 2^{ème} étage semblable à celui de la figure III.6. La seconde différence réside dans la possibilité, sur cette cellule de base, de la faire fonctionner soit en oscillateur chaotique à la manière d'un système d'Ikeda (oscillateur bouclé,

interférences retardées envoyées sur la photodiode), soit en interféromètre « passif ». Ce dernier mode est obtenu en commandant optiquement par un signal externe $I_e(t)$ le retard entre les 2 bras du Mach-Zehnder. Cette dernière fonction est réalisée par l'intermédiaire d'un multiplexeur optique 2 vers 1, qui envoie sur la photodiode, soit le signal des interférences de sortie du Mach-Zehnder (système bouclé), soit une entrée optique externe (système passif). Dans la suite, une cellule de base à commande interne sera notée CI, si la commande est externe, elle sera notée CE.

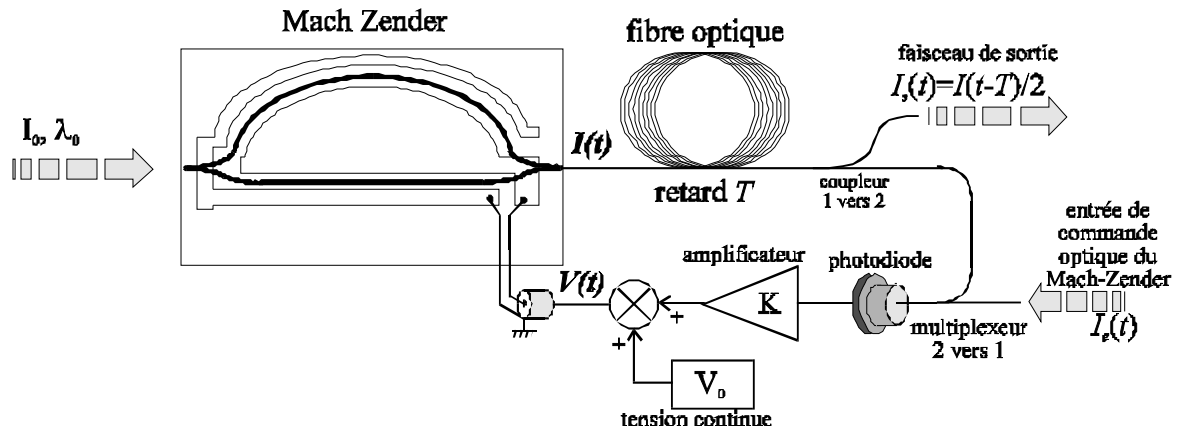
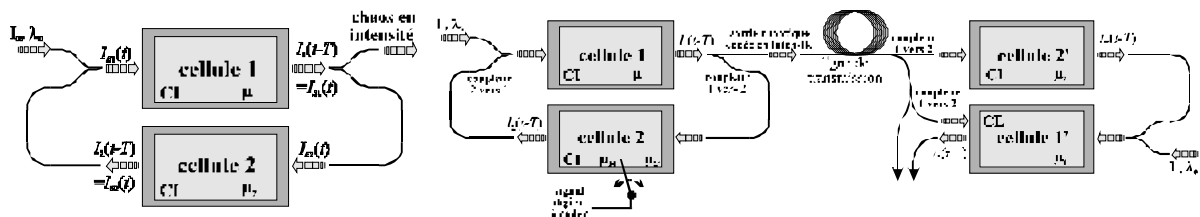


Figure III.6 : cellule de base utilisée dans une réalisation de cryptage par chaos en intensité [II.4].

b. Codage et décodage

Pour atteindre la synchronisation entre un émetteur chaotique et un récepteur, l'auteur a cherché à appliquer une technique semblable à celle de Pecora. Le problème consiste à diviser la cellule de base pour en extraire 2 sous systèmes. Ce dernier ne comportant qu'une seule boucle, il a fallu choisir une cellule de base plus complexe pour pouvoir ensuite en extraire un sous ensemble, le sous système stable. La nouvelle structure est représentée à la figure III.7.1. Son utilisation dans la chaîne complète de codage et décodage est illustrée à la figure III.7.2.



III.7.1 : oscillateur avec Mach-Zehnder à structure dédoublée.

III.7.2 : ensemble du système de codage, émetteur et récepteur.

Figure III.7 : codage par chaos en intensité [II.4].

Le nouvel oscillateur (figure III.7.1) ne présente plus un diagramme de bifurcation classique typique des systèmes d'Ikeda. Même dans le cadre d'un modèle discret, les régimes dynamiques sont plus complexes. On voit sur la figure III.7.1 qu'une cascade de 2 cellules à Mach-Zehnder est mise en oeuvre. Cette double structure présente 2 niveaux de contre réaction non linéaire. Une contre réaction optoélectronique interne module sur chaque Mach-Zehnder le retard optique en fonction de l'intensité des interférences de sortie (commande interne CI). D'autre part, une contre réaction toute optique est réalisée en fibrant d'une cellule à l'autre les interférences. Ainsi, la sortie de la cellule 1 alimente optiquement l'entrée de la cellule 2, et la sortie de cette dernière est ajoutée par un coupler 2 vers 1 au

faisceau source (I_0, λ_0) pour alimenter la 1^{ère} cellule. Le faisceau signal transmis sur la ligne est une partie prélevée sur le faisceau de sortie du 1^{er} Mach-Zehnder grâce à un coupleur 1 vers 2. Le paramètre sur lequel est effectué le codage CSK est le gain électronique de la tension d'accord du 2^{ème} Mach-Zehnder. Ces gains, sur chaque cellule, sont notés $\mu_i (i=1,2)$.

La réception (figure III.7.2) reconstitue la chaîne d'oscillation de l'émission à partir de l'endroit où le faisceau codé a été prélevé. Remarquons au passage que les divisions successives des faisceaux impliquent une amplification côté réception. La nécessaire similitude entre récepteur et émetteur impose une remise à niveau des intensités optiques. Cette amplification est supposée être réalisable par des fibres dopées terre-rares. Compte tenu de cette hypothèse, on voit que le signal transmis (analogue de \vec{v}) entrant dans la cellule 2' (bloc $\vec{w}' = \vec{h}(\vec{v}, \vec{w}')$) est le même que celui qui alimente la cellule 2 de l'émetteur (bloc $\vec{w} = \vec{h}(\vec{v}, \vec{w})$). Si ces cellules 2 et 2' fonctionnent de manière synchrone, les sorties \vec{w} et \vec{w}' sont égales. La transformation suivante fait intervenir les cellules 1 et 1'. On remarque alors que la cellule 1' n'est pas autonome, puisque la commande du retard optique est réalisée par l'entrée optique externe, en injectant sur la photodiode de 1' le signal interne de la cellule 1 (précisément \vec{v}). Toujours en supposant les composants et paramètres (entre autres I_0 et λ_0 côté récepteur) identiques, la sortie de 1' doit recopier \vec{v} (synchronisation) lorsque le paramètre de codage est μ_{20} (bit « 0 »), alors que cette sortie est décorrélée (perte de synchronisation) pour un paramètre de codage μ_{21} (bit « 1 »).

c. Discussion

Après l'analyse succincte que nous avons cherchée à faire, certaines questions sont restées en suspend. Nous allons poser quelques unes d'entre elles sans trop chercher à y répondre, ceci n'étant pas l'objet de notre travail. Ces questions pourront ultérieurement orienter certaines réflexions pour mieux comprendre ce type de codage, et éventuellement l'appliquer de manière plus rigoureuse à notre générateur de chaos en longueur d'onde.

Comme nous l'avons déjà remarqué, la dynamique de l'oscillateur chaotique en intensité n'a plus rien à voir avec le modèle d'Ikeda. Elle est décrite par 2 équations différentielles non linéaires à retard, couplées entre elles. Ces équations font de plus intervenir une nouvelle variable dynamique qui avait le statut de paramètre dans le système d'Ikeda : l'intensité optique d'entrée des modulateurs. Ces différences fondamentales éloignent les possibilités d'adaptation à notre système chaotique d'Ikeda, que nous avons délibérément choisi simple dans une première approche. La complexité est un atout pour augmenter le degré de confidentialité du codage, mais elle apporte des problèmes de réalisation expérimentale que nous voulions éviter.

D'autre part, d'un point de vue d'opticien, nous remarquons que l'auteur fait apparaître des sommateurs de faisceaux sur les entrées des cellules 1, sans se soucier de l'aspect cohérent de ces faisceaux. Pour que les Mach-Zehnder donnent lieu à des interférences, la longueur de cohérence doit être choisie inférieure au retard optique entre les bras. Mais compte tenu du développement théorique, la cohérence semble devoir être supérieure aux longueurs de fibre permettant de réaliser les retards temporels. Sans cela, la sommation des faisceaux par les

coupleurs 2 vers 1 s'effectue sur les amplitudes et non sur les intensités. Dans notre cas, il s'agirait de pouvoir sommer des longueurs d'onde, ce qui est une opération plus délicate.

D'un point de vue théorique, le calcul des exposants conditionnels de Lyapounov a permis de trouver une valeur de paramètre μ_2 pour laquelle ces exposants sont négatifs (sous système stable, synchronisation possible). Ce calcul est effectué à partir d'un modèle à temps discret des 2 cellules. Compte tenu de la complexité de l'ensemble, on peut se demander si le comportement en régime chaotique d'un modèle continu réel possède les mêmes propriétés de synchronisation. Le codage par modulation CSK a été par contre simulé numériquement en utilisant un modèle continu (calcul de l'évolution temporelle par intégration pas à pas des différentes équations différentielles à retard couplées). Le résultat montre que les niveaux « 0 » et « 1 » sont reconnus correctement si les différences entre les paramètres μ_{20} et μ_{21} sont suffisantes. Le bruit de l'erreur de synchronisation est alors inférieur au bruit du signal non synchronisé.

Dans le schéma de décodage, le signal de commande externe du retard du modulateur 1' est le signal optique reçu \bar{v} . La sortie de 1' et ce signal doivent être les mêmes en cas de synchronisation. Ceci signifie que la cellule 1' pourrait être à commande interne. Le problème est alors de savoir si cette cellule initialement passive est toujours stable en tant que sous système autonome par rapport au signal d'excitation fourni par 2'. Autrement dit, la synchronisation est-elle toujours effective si on remplace la commande externe de cette cellule par une commande interne ?

Une discussion, ou mieux une collaboration scientifique, avec l'auteur (P. Celka, [II.5]) aurait été sûrement enrichissante. Nous ne disposons pas hélas à l'époque d'une connaissance suffisante du domaine par rapport à ses travaux, et notre système de codage était encore loin de montrer les résultats actuels. Nos travaux respectifs étant achevés, nous espérons que cette collaboration pourra maintenant démarrer avec de bonnes bases.

C. Codage digital, méthode OGY

E. Ott, C. Grebogi et J.A. Yorke [III.6] ont inventé un procédé permettant de stabiliser l'une quelconque des multiples orbites instables d'une oscillation chaotique de faible dimension. Un attracteur étrange possède un grand nombre d'orbites instables, puisque celles-ci forment un ensemble dense dans l'espace des phases. En agissant sur un paramètre dynamique, ces orbites peuvent être individuellement stabilisées. Le procédé OGY a été ensuite rapidement appliqué avec succès sur de nombreux systèmes [III.7], soit pour éviter un comportement chaotique, soit au contraire pour le contrôler et en tirer parti. Le principe de cette idée va être présenté dans un premier temps, puis nous verrons comment ses auteurs ont suggéré de l'appliquer à un type de cryptage nouveau et original [III.8].

1. Technique OGY de contrôle d'un chaos dans une coupe de Poincaré

Soit un système dynamique du même type que (III.1), pour lequel on dispose d'un paramètre dynamique p , accessible expérimentalement. L'idée est d'utiliser l'influence de p sur les propriétés dynamiques locales de l'espace des phases, et même plus spécifiquement, dans un plan de coupe de Poincaré de cet espace. Ce n'est donc pas l'équation (III.1) qui est utilisée, mais les propriétés dynamiques

locales des points expérimentaux observés dans la coupe, $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_k$. Ces points appartiennent à la trajectoire chaotique dans un plan de coupe, pour une valeur de paramètre p normalisée à 0. Lorsque le paramètre est légèrement modifié ($\bar{p} \neq 0$), ceci entraîne une légère modification des points de passage successifs $\vec{\xi}_i$, dans le plan de coupe.

La première phase de la méthode consiste à observer et à mesurer les propriétés dynamiques autour du point fixe instable de l'orbite que l'on veut stabiliser, et ceci pour différentes valeurs du paramètre de contrôle. Soit $\vec{\xi}_F(0)$ ce point pour la valeur de repos du paramètre de contrôle. Par les techniques habituelles d'analyse des trajectoires chaotiques, on extrait dans la coupe au voisinage de $\vec{\xi}_F(0)$ les vecteurs propres et les valeurs propres correspondant aux directions stables et instables. Dans une coupe à 2 dimensions, on extrait : $\vec{e}_s, \lambda_s, \vec{e}_u, \lambda_u$. Lors d'une action sur p , faisant passer ce paramètre de 0 à \bar{p} , on observe un changement du point fixe $\vec{\xi}_F(\bar{p})$.

. On en déduit une sensibilité de déplacement du point fixe : $\vec{g} = \left. \frac{\partial \vec{\xi}_F}{\partial p} \right)_{p=0} \approx \frac{\vec{\xi}_F(\bar{p})}{\bar{p}}$.

La traduction du flot dans la coupe est une transformation discrète, une itération bidimensionnelle, définie par une matrice de transformation, qui relie 2 passages successifs au travers du plan. Cette itération est écrite dans un voisinage du point fixe que l'on cherche à stabiliser :

$$\vec{\xi}_{n+1} - \vec{\xi}_F(\bar{p}) = M \cdot (\vec{\xi}_n - \vec{\xi}_F(\bar{p})) \quad (III.6)$$

Cette expression (III.6) peut être écrite en fonction des vecteurs propres des directions stables et instables de la dynamique, moyennant l'introduction de vecteurs de base contravariants \vec{f}_s , et \vec{f}_u qui vérifient : $\vec{f}_s \cdot \vec{e}_s = \vec{f}_u \cdot \vec{e}_u = 1$ et $\vec{f}_u \cdot \vec{e}_s = \vec{f}_s \cdot \vec{e}_u = 0$. (III.6) devient :

$$\vec{\xi}_{n+1} = p_n \cdot \vec{g} + [\lambda_u \cdot \vec{e}_u \cdot \vec{f}_u + \lambda_s \cdot \vec{e}_s \cdot \vec{f}_s] \cdot (\vec{\xi}_n - p_n \cdot \vec{g}) \quad (III.7)$$

où p_n est la petite perturbation que l'on cherche à appliquer lors du $n^{\text{ième}}$ passage dans la coupe, au voisinage $\vec{\xi}_F(p_n) = p_n \cdot \vec{g}$. Cette perturbation paramétrique a pour but de faire converger la trajectoire toujours plus près du point fixe, c'est-à-dire, en termes mathématiques, à rendre nulle la composante instable du prochain passage $\vec{\xi}_{n+1}$. Ce critère permet l'évaluation quantitative de cette $n^{\text{ième}}$ perturbation, il s'écrit :

$$\vec{\xi}_{n+1} \cdot \vec{f}_u = 0 \text{ soit } p_n = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \cdot \left(\frac{\vec{\xi}_n \cdot \vec{f}_u}{\vec{g} \cdot \vec{f}_u} \right) \quad (III.8)$$

Cette dernière expression impose la condition $\vec{g} \cdot \vec{f}_u \neq 0$. Si p_n est trop grand, la méthode n'est pas efficace : elle ne fonctionne que dans un voisinage suffisamment proche du point fixe, et pour des valeurs suffisamment petites du paramètre de contrôle. L'observation initiale de la dynamique dans la coupe de Poincaré définit en général un intervalle d'action $[-p^*, p^*]$ pour lequel la méthode s'applique. Une importante question traitée dans la littérature concerne le temps moyen nécessaire pour contrôler un système chaotique par ce procédé.

Diverses applications ont pu bénéficier de cette méthode. Un des principaux avantages est qu'il n'est pas nécessaire de connaître l'équation déterministe à l'origine de la dynamique chaotique. Une reconstruction de l'espace des phases à partir d'une série temporelle expérimentale remplace la connaissance de la loi dynamique. Ensuite, une phase d'observation de la dynamique dans un plan de coupe permet de mettre en oeuvre la méthode OGY. Citons brièvement certains succès de cette méthode : la stabilisation des oscillations en intensité d'un laser à cristal doubleur de fréquence [III.9], le contrôle des produits d'une réaction chimique chaotique [III.10], la stabilisation de périodes jusqu'au 23^{ème} harmonique d'un circuit électronique chaotique à diode [III.7], ou encore la réalisation d'un oscillateur chaotique électronique musical [III.10], les sons générés étant issus du contrôle d'orbites périodiques instables. Enfin, une technique de cryptage par codage de l'espace des phases a également été réalisée.

2. Application au codage [III.8]

L'idée d'associer les dynamiques chaotiques aux systèmes de codage est aussi venue à la suite d'une comparaison entre la théorie du chaos et celle de l'information. La théorie de l'information (Shannon) décrit effectivement un message comme une suite plus ou moins aléatoire de symboles qui forment des mots, puis des phrases, puis expriment des idées complètes. La richesse du langage et de toutes nos expressions font que l'ensemble des possibilités de message est extrêmement grand, à l'image de l'ensemble des chemins suivis par une trajectoire chaotique sur son attracteur étrange.

S'il est possible de réaliser une correspondance entre ces 2 ensembles très riches, de telle sorte que chaque mot soit associé à une orbite chaotique, une succession d'orbites est capable d'exprimer un message. La méthode OGY de contrôle des trajectoires dans l'espace des phases est dans ce cas capable, avec un système approprié de traduction des mots en commandes contrôlant la dynamique, de réaliser un codage de l'information sous forme de trajectoire chaotique.

De manière plus précise et plus simple, nous allons considérer un message binaire. Il se présente sous la forme d'une succession quelconque de « 0 » et de « 1 ». Soit également un attracteur étrange du type de celui du modèle de Lorenz, ou celui du circuit de Chua. Les trajectoires effectuent des aller-retour entre les 2 « lobes » de l'attracteur, en réalisant un nombre plus ou moins grand d'oscillations sur chaque lobe. L'idée consiste alors à partitionner l'attracteur en portions représentatives des « 0 » et des « 1 ». Toute succession binaire correspond dans ce cas à une trajectoire bien précise de la dynamique, qu'il « suffit » de contrôler grâce à la méthode OGY. Le décodage s'effectue simplement en observant l'évolution dans l'espace des phases. Grâce à la connaissance de la partition de l'attracteur, il est possible de reconstituer la succession de « 0 » et de « 1 ». La fonction de codage est l'application qui transforme une série de bits en une trajectoire sur l'attracteur.

Une partition moins simpliste est évidemment conseillée pour disposer d'un degré de confidentialité plus élevé, mais le principe reste le même. La mise en oeuvre pratique de la méthode OGY nécessite une technique numérique pour calculer les perturbations nécessaires à l'orientation des trajectoires. Ces calculs sont bien sûr coûteux en temps, ils limitent donc les potentialités en rapidité de cette méthode de codage. De par son principe même, cette technique est dédiée au codage numérique, et non analogique. La méthode est aussi surtout adaptée à des

dynamiques chaotiques de faible dimension, afin de limiter la complexité des calculs de contrôle des trajectoires.

D. Dynamiques chaotiques contrôlées par contre réaction

Une dernière méthode de synchronisation a été proposée récemment [III.11-13]. Elle ressemble à la méthode OGY dans le sens où son but concerne la stabilisation d'orbites périodiques instables. Elle possède l'avantage d'être analogique, donc de ne pas avoir besoin d'un calcul numérique permanent de contrôle de la trajectoire au travers d'une coupe de Poincaré. Il n'est pas nécessaire non plus de connaître la loi dynamique. Le moyen d'action s'effectue par une variable accessible du système dynamique, et non sur un paramètre. Cette variable est mesurée, comparée à une référence, le résultat de la comparaison est ensuite amplifié et injecté dans la loi d'évolution dynamique. Cette technique se rapproche d'une sorte d'asservissement de la trajectoire par rapport à une trajectoire de référence. Deux méthodes pratiques ont été proposées sur ce schéma. L'une utilise un générateur externe de trajectoires pour synthétiser la trajectoire de référence, l'autre utilise le signal issu de la variable chaotique observable, mais retardée d'une durée dont la valeur est liée à la période de l'orbite à stabiliser.

Soit un système dynamique (III.1), mais décomposé selon une variable scalaire y et un vecteur \vec{x} tel que $\vec{u} = (\vec{x}, y)$:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{Q}(\vec{x}, y) \quad (III.9)$$

$$\dot{y} = P(\vec{x}, y) + F(t) \quad (III.10)$$

$F(t)$ est le terme de forçage (la contre réaction) qui modifie la loi dynamique de y sans affecter celle de \vec{x} . Sans aucune action ($F=0$), le système possède une dynamique chaotique, il évolue sur un attracteur étrange dans l'espace des phases. Le signal décrit par la composante y lorsque \vec{u} décrit une de ces orbites instables, est noté $y_i(t)$, et sa période est T_i .

Supposons que l'on dispose d'un générateur pouvant délivrer le signal périodique $y_i(t)$. La fonction $F(t)$ sera alors simplement obtenue par amplification de la différence entre l'évolution de la variable y et la trajectoire de référence y_i , soit :

$$F(t) = K \cdot [y_i(t) - y(t)] \quad (III.11)$$

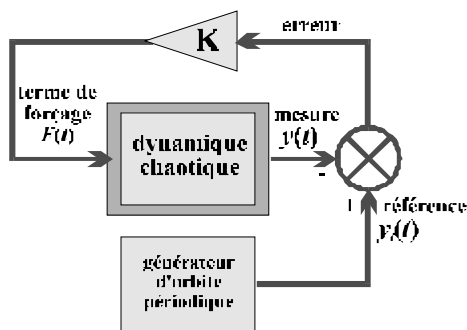
Selon les valeurs de K , on observe une stabilisation de la dynamique chaotique complète de \vec{u} sur l'orbite initialement instable.

Dans l'autre cas expérimentalement plus pratique, il n'est pas nécessaire de disposer d'un générateur de l'orbite scalaire à stabiliser, il suffit de mesurer le signal y , de le retarder, puis de s'en servir comme trajectoire de référence. L'expression (III.11) devient :

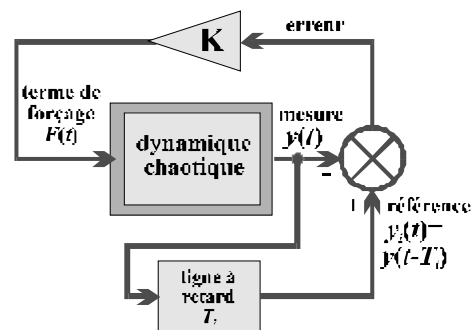
$$F(t) = K \cdot [y(t-T) - y(t)] \quad (III.12)$$

La valeur du retard T permet de privilégier une des nombreuses orbites instables de la dynamique chaotique. Bien que moins robuste, cette méthode simple a déjà donné des résultats positifs lors de simulations sur des systèmes chaotiques connus

(Rössler, Lorenz, Duffing). Les figures III.8 exposent le schéma de principe appliqué à un montage expérimental.



III.8.1 : par générateur externe d'orbite



III.8.2 : par retard de durée adaptée

Figure III.8 : mise en place expérimentale du principe de stabilisation d'orbites instables par asservissement.

Une interprétation intéressante de cette technique est fournie en conclusion de [III.11] sur la base de l'application logistique. Le fait d'ajouter une variable (y_i ou $y_i(t-T)$) à la loi dynamique peut être vu comme un accroissement de 1 unité de la dimension de l'espace des phases global. Cette nouvelle dimension permettrait de répartir les multiplicateurs de Lyapounov entre la direction naturelle de y , et celle nouvellement ajoutée. Les nouveaux multiplicateurs sur ces 2 directions seraient globalement stables, alors que l'ancien multiplicateur sur une seule direction était instable.

Cette méthode, tout comme la méthode OGY, semble préférentiellement adaptée à la stabilisation sur des orbites périodiques. Que se passe-t-il en fait, lorsqu'à la place du signal de référence $y_i(t)$ on impose une trajectoire chaotique ? Ce schéma reviendrait à une configuration maître-esclave qui nécessite a priori une possibilité de décomposition en un sous système (III.9) à exposants conditionnels de Lyapounov tous négatifs ou nuls. Or notre préoccupation est bien de synchroniser 2 ondes chaotiques, et non de rendre périodique une orbite instable d'un attracteur étrange. Ce schéma d'asservissement est tout de même intéressant à décrire, car il nous permet d'envisager une première méthode de contrôle de dynamique chaotique à partir de notre système d'Ikeda.

II. Méthode utilisée

Comme pour les travaux de codage par chaos en intensité optique, des problèmes d'adaptation des différentes techniques de synchronisation se sont posés. Certaines voies ont pu être rapidement écartées (méthode OGY) pour des raisons d'incompatibilité. D'autres voies ont conduit à des méthodes dérivées, moyennant certaines modifications. Les résultats sur le système de chaos en intensité n'ont pu être connus suffisamment tôt (travaux récents) pour pouvoir être directement adaptés à notre système de chaos en longueur d'onde. Ceci nous a par contre forcé à développer une solution propre, qui semble bien moins complexe, mais dont la réalisation expérimentale a pu être menée à bien.

A. Discussion sur les différentes méthodes décrites

1. Solutions écartées

La méthode OGY, bien que très attractive dans son principe rigoureux, ne pouvait être retenue. D'une part elle ne s'adapte facilement qu'à des systèmes à faible degré de liberté, et d'autre part, elle nécessite un calcul numérique permanent pour contrôler la trajectoire dans l'espace des phases. Ces calculs semblent trop pénalisant pour permettre un codage / décodage suffisamment rapide pour des débits télécoms.

La solution utilisée par P. Celka avec un générateur de chaos à Mach-Zehnder, a également été écartée, pour des raisons d'adaptabilité immédiate. La manipulation de la variable longueur d'onde est encore trop délicate pour envisager des montages complexes, tel qu'un oscillateur chaotique à plusieurs étages. Quelque soit la méthode choisie, les paramètres de la dynamique chaotiques doivent pouvoir être contrôlés de manière assez précise pour permettre une synchronisation entre émetteur et récepteur. Il est donc préférable d'avoir un générateur chaotique de base aussi simple que possible. C'est pourquoi nous voulions garder le système d'Ikeda en longueur d'onde tel qu'il a été présenté au chapitre précédent.

Enfin, les idées de synchronisation de Pecora et Carroll, semblaient trop difficiles à adapter à notre système. Trouver un sous système stable revenait à compliquer le système de base comme dans l'expérience de P. Celka. Le principe d'un récepteur stable par rapport au signal pilote de l'émetteur apparaissait pourtant comme une idée incontournable.

2. Idées directrices

La notion d'asservissement semblait au départ la plus adaptée. En effet, une dynamique chaotique ne peut par essence « suivre » une solution très longtemps, 2 trajectoires voisines finissant systématiquement par diverger pour être totalement décorréélées. Pour que 2 trajectoires se suivent, seul un rattrapage permanent de l'erreur pouvait résoudre le problème.

Dans le cas de notre système dynamique, une trajectoire chaotique particulière se définit entièrement par la donnée des conditions initiales sur un intervalle de durée T . L'évolution ultérieure peut être ensuite partagée en intervalle égaux de durée T . Chacun de ces intervalles représente en fait les conditions initiales de l'intervalle suivant de durée T . La propriété de sensibilité aux conditions initiales entre 2 trajectoires se manifeste alors par un écartement croissant au cours du temps, entre ces conditions initiales successives. Si l'on arrive à maintenir ces conditions initiales suffisamment proches, malgré la tendance naturelle à diverger, il en résultera pratiquement une synchronisation entre les 2 trajectoires.

3. Mélange de l'information

La synchronisation entre 2 générateurs de chaos n'est pratiquement qu'une étape. Ensuite il faut encore choisir le moyen permettant d'insérer l'information dans la porteuse chaotique. Cette insertion constitue a priori une perturbation de l'onde chaotique, qui peut gêner le processus de synchronisation.

Une première méthode consiste à mélanger le signal informatif à l'extérieur de l'oscillateur chaotique. C'est le procédé utilisé dans les travaux de Pecora et Carroll. Cette solution présentait l'inconvénient de nécessiter 2 lignes de transmission pour atteindre le décodage côté récepteur : une ligne transportant le message codé, et une autre ligne sans message, servant de signal de synchronisation. Une réalisation sur ce modèle a été envisagée à l'aide d'un modulateur de phase externe pour coder l'information. La figure III.9 représente le principe de cette configuration. A la réception, la synchronisation d'un oscillateur chaotique local permet de générer un faisceau dont la longueur d'onde suit les variations chaotiques de la longueur d'onde du faisceau reçu. Le faisceau local n'étant pas modulé en phase, une détection hétérodyne par battements doit permettre de restituer l'information dans la phase.

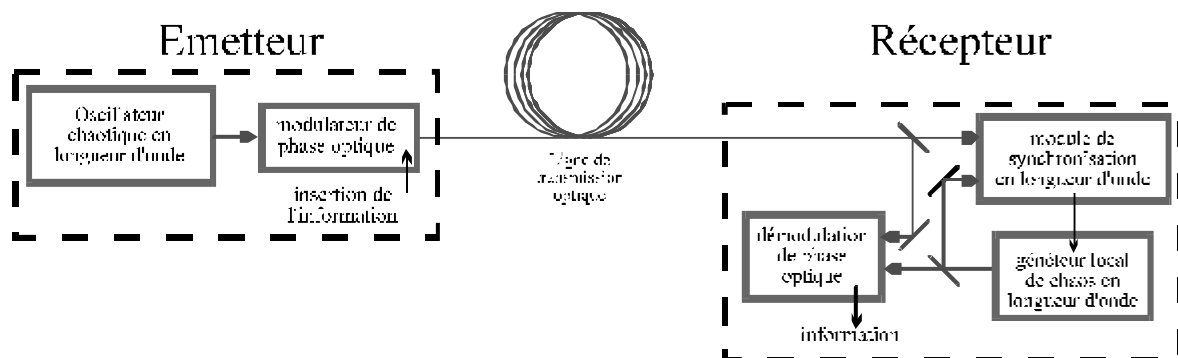


Figure III.9 : codage par modulateur de phase externe.

Ce principe, grâce à l'utilisation d'un codage par la phase d'un faisceau chaotique en longueur d'onde, évite l'inconvénient d'une 2^{ème} ligne de transmission. Mais ceci suppose que le procédé de détection de la longueur d'onde (utilisé dans le module de synchronisation) soit insensible à la phase, et que le générateur de chaos à la réception produise une onde lumineuse de phase optique suffisamment stable malgré la variation en longueur d'onde. Cette solution de principe semble malheureusement peu réaliste, car la démodulation de phase implique que le chaos local soit parfaitement synchronisé en longueur d'onde (erreur nulle en longueur d'onde). La moindre différence de longueur d'onde provoquerait un battement de phase très important, qui masquerait l'information contenue dans une modulation de phase.

Le CSK est une solution qui ne pose pas de problème de principe pour son d'adaptation à n'importe quel type d'oscillateur chaotique synchronisable. La synchronisation équivaut au décodage, puisqu'elle correspond soit à un bit « 0 », soit à un bit « 1 ». La seule limitation concerne éventuellement le débit, pour des raisons de temps de synchronisation.

Enfin, une dernière solution peut être envisagée pour mélanger l'information dans le chaos. Elle se rapproche du principe utilisé dans la méthode OGY, pour laquelle l'information est partie intégrante de la dynamique chaotique. Pour cela, nous proposons, comme dans le système de Pecora et Carroll, d'ajouter simplement l'information au signal chaotique, mais non plus à l'extérieur de la chaîne d'oscillation, mais à l'intérieur. L'information, dont l'amplitude reste faible par rapport à celle de l'onde chaotique, peut être vue comme une perturbation continue de la succession de conditions initiales. Cette méthode ne demande pas non plus une 2^{ème} ligne de transmission, puisque le décodage consiste à détecter la petite erreur de synchronisation.

4. Premier schéma de réalisation

Le montage de la figure III.10 correspond au premier essai que nous avons réalisé. La ligne de transmission a été choisie électronique au départ, pour des raisons de facilité. Le signal transmis est une image de la longueur d'onde modulée, puisqu'il s'agit de la commande électronique de la diode laser accordable. La fonction de transfert entre la longueur d'onde et le signal de commande étant supposée linéaire, le signal transmis est bien équivalent à la longueur d'onde.

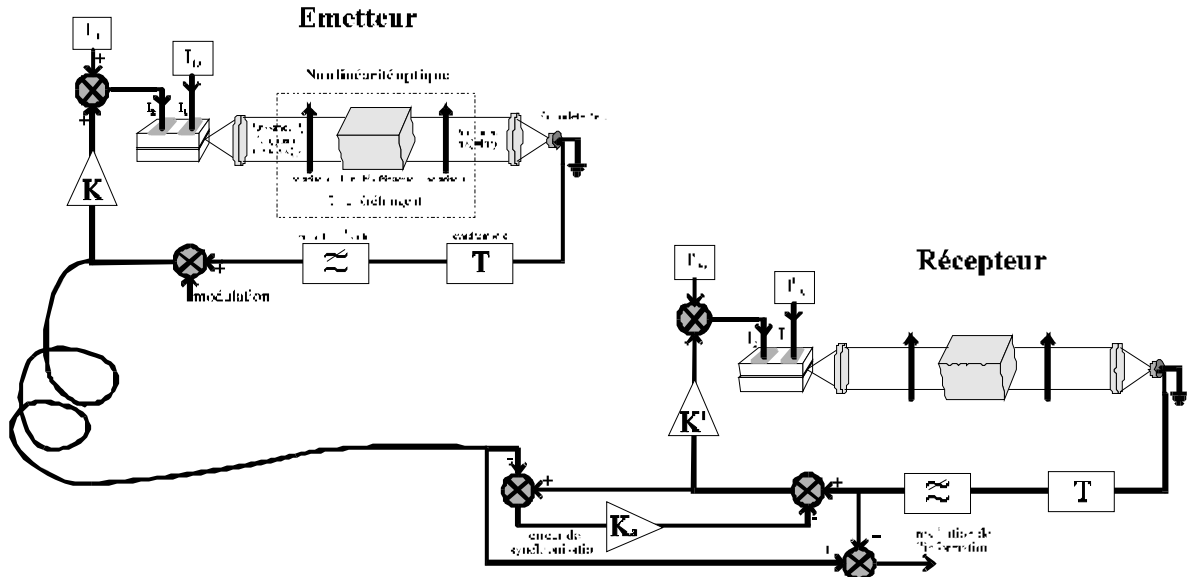


Figure III.10 : schéma d'ensemble de la première solution essayée pour réaliser une chaîne de codage / décodage par chaos en longueur d'onde.

Sur la figure III.10 on remarque que le signal transmis est prélevé côté émetteur juste après l'insertion de l'information dans la boucle d'oscillation. Ce signal arrive au récepteur sur un soustracteur qui le compare avec le signal chaotique local. La différence est l'erreur de synchronisation. Cette erreur provient, lorsqu'il n'y a pas de signal, de l'écart entre les paramètres du récepteur et ceux de l'émetteur. En présence d'une information noyée dans le chaos, l'erreur de synchronisation correspond à l'information qui a été extraite de sa porteuse chaotique.

En l'absence de signal reçu, l'oscillateur chaotique de réception, avec sa boucle de comparaison, est équivalent à un même oscillateur sans boucle de comparaison, mais dont le gain de la boucle de retour K' est remplacé par $K'/(K_a+1)$. Or nous avons vu dans les chapitres précédents, d'une part que le gain de la boucle de retour agit proportionnellement sur le paramètre de bifurcation β , et d'autre part que plus ce paramètre est grand, plus la dynamique du système est complexe. En diminuant ce gain, on a donc tendance à simplifier le régime dynamique de l'oscillateur de réception. L'oscillateur avec un gain K' sans boucle de comparaison peut être chaotique, alors que le même oscillateur avec la boucle de comparaison peut être stable, puisque son gain effectif est diminué.

Cette remarque correspond en fait aux principes utilisés par Pecora et Carroll. Au lieu de chercher un sous système stable, nous avons rajouté une boucle, dont l'effet est de stabiliser le système initialement instable.

D'un autre point de vue, cette configuration ressemble également à la méthode de Pyragas de stabilisation d'orbite périodique instable par contre réaction d'une erreur de synchronisation.

Dans ces conditions, on peut se demander pour quelles valeurs du paramètre d'asservissement K_a les meilleurs résultats sont-ils obtenus ? On observe par simulation, ainsi que par l'expérience, que des valeurs très faibles (quelques 10^{èmes}) suffisent à obtenir une synchronisation tant qu'il n'y a pas de message. Dès qu'une information est ajoutée au chaos d'émetteur, le récepteur a du mal à rester correctement synchronisé. En théorie des asservissements linéaires, on sait qu'un asservissement proportionnel est d'autant plus efficace que son facteur de proportionnalité est important. Pour améliorer la synchronisation, on peut alors augmenter le gain K_a . Que se passe-t-il alors à la limite K_a infini ? Ce cas limite correspond en fait à une chaîne d'oscillation ouverte côté récepteur : le système de réception n'est plus un oscillateur, mais simplement un système dynamique passif de transformation non linéaire du signal venant de l'émetteur.

Une telle configuration a débouché sur le principe finalement adopté pour le décodage. Le récepteur n'est plus un oscillateur, mais plutôt un calculateur analogique de dynamique non linéaire.

B. Cas limite : calculateur non autonome de dynamique non linéaire

1. Mise en équations

La figure III.11 illustre le principe final qui a été choisi pour réaliser le système complet de codage / décodage. L'émetteur est identique à celui de la partie A. Il est résumé à la figure III.11 en 3 blocs principaux, la non linéarité $NL[X]$, le retard temporel T , et le passe bas ($\{*\}$ est l'opération de convolution, $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre, ou encore la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert $1/[1+\tau.p]$). Un simple sommateur est encore utilisé pour introduire l'information dans la chaîne d'oscillation.

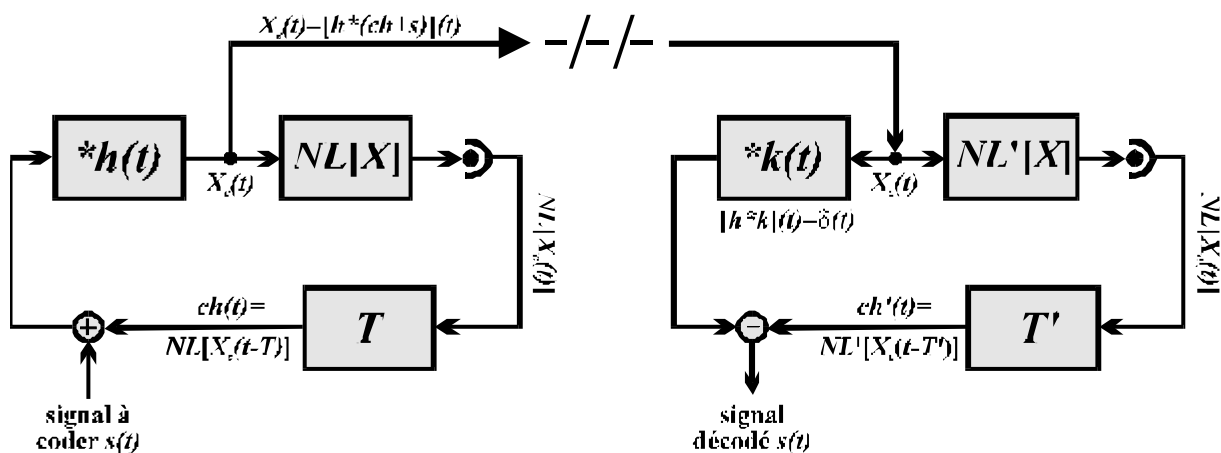


Figure III.11 : schéma de principe de codage / décodage

Le récepteur est représenté de manière symétrique à l'émetteur, avec les mêmes éléments, excepté en ce qui concerne le passe bas qui a été remplacé par la transformation inverse dans le domaine de Laplace ($[1+\tau.p]$), c'est-à-dire un passe haut, de réponse impulsionnelle $k(t)$. On remarque bien que le récepteur n'est pas un

oscillateur, puisqu'il ne possède pas de bouclage sur lui-même. C'est en ce sens qu'il est qualifié de calculateur (et non oscillateur) non autonome (il traite un signal reçu, et n'en génère aucun s'il n'en reçoit pas). Le bloc de réception reconstitue la chaîne bouclée de l'émetteur, cette chaîne étant ouverte au niveau du point d'insertion de l'information. Un soustracteur permet de restituer l'information noyée dans le signal chaotique, en faisant la différence entre le signal reçu et le résultat du calcul non linéaire local.

La traduction en équation se fait simplement en suivant le signal le long de la chaîne d'oscillation et en écrivant les opérations successives qu'il subit dans chaque bloc :

signal codé issu de l'émetteur : (III.13)

$$X_e(t) = h^*[ch+s](t) = (h^*s)(t) + \int h(\theta - t) \cdot ch(\theta) d\theta = (h^*s)(t) + \int h(\theta - t) \cdot NL[X_e(\theta - T)] d\theta$$

réception : (si $(k^*h)(t) = \delta(t)$) (III.14)

- argument instantané : $[k^*(h^*[ch+s])](t) = [(k^*h)^*(ch+s)](t) = ch(t) + s(t)$ (III.15)

- calcul retardé : $ch'(t) = NL^\uparrow[X_e(t-T)]$ (III.16)

- résultat de la soustraction : $ch(t) + s(t) - ch'(t) = s(t) + \{NL[X_e(t-T)] - NL^\uparrow[X_e(t-T)]\}$
 $s'(t) = s(t) + \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) = \{NL[X_e(t-T)] - NL^\uparrow[X_e(t-T)]\}$ (III.17)

On remarque donc que l'erreur de décodage provient de la différence entre les 2 transformations non linéaires, celle de l'émetteur et celle du récepteur.

Une autre formulation des 2 calculs non linéaires est possible à l'aide des équations différentielles d'évolution, au lieu des formes intégrales (opérateurs de convolution). Le signal transmis $X_e(t)$ suit la loi :

$$X_e(t) + \frac{dX_e}{dt}(t) = s(t) + NL^\uparrow[X_e(t-T)] \quad (III.18)$$

Côté récepteur, l'opérateur $k(t)$ réalise la transformation inverse de $h(t)$. Si on note $Y_r(t)$ la sortie de ce bloc (un des arguments de la soustraction), la relation différentielle entrée/sortie s'écrit :

$$Y_r(t) = X_e(t) + \frac{dX_e}{dt}(t) \quad (III.19)$$

Le deuxième argument de la soustraction est simplement le résultat côté réception de la non linéarité retardée : $ch'(t) = NL^\uparrow[X_e(t-T)]$. Le résultat du décodage est alors bien la même expression :

$$s'(t) = Y_r(t) - ch'(t) = s(t) + \varepsilon(t) \quad (III.20)$$

avec $\varepsilon(t) = \{NL[X_e(t-T)] - NL^\uparrow[X_e(t-T)]\}$

2. Interprétation en termes de système inverse

La technique du système inverse [III.22 & III.23], bien que différente, est à rapprocher de la méthode de Pecora et Carroll. Il s'agit en effet de rechercher les conditions d'une synchronisation entre 2 oscillateurs (chaotiques), mais cette fois-ci sans nécessairement en extraire un sous-système pour constituer l'oscillateur esclave. Le principe (figure III.12) est de définir des signaux d'entrée et de sortie de l'oscillateur maître, et de transmettre vers le récepteur esclave la sortie du maître. Cette sortie joue le rôle de signal d'entrée du récepteur. L'esclave est dit synchronisé, si son signal de sortie, correspondant à l'entrée côté émetteur, recopie asymptotiquement ce que fait l'oscillateur maître.

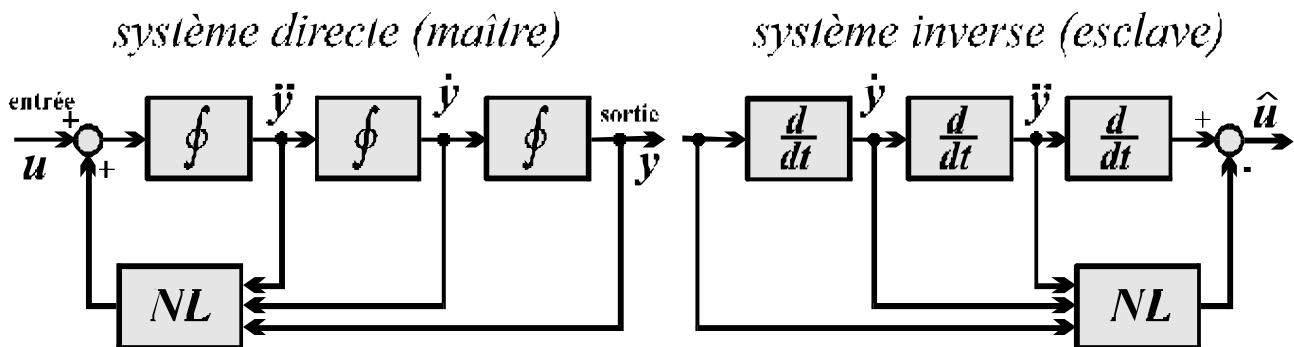


Figure III.12 : méthode du système inverse

D'après la configuration de la figure III.12, il est clair que les intégrateurs du système font intervenir des conditions initiales dans la caractérisation complète de son évolution dynamique. Nous pouvons également remarquer que le système inverse, contrairement au système direct, n'est pas fermé sur lui-même comme un oscillateur. Il s'agit donc également d'une succession de transformations dont le résultat n'est pas autonome : une entrée nulle donne lieu à une sortie nulle, contrairement au système direct (boucle fermée en oscillateur).

L'analogie de cette approche avec la solution finalement retenue paraît alors évidente. Les signaux $u(t)$ et $\hat{u}(t)$ sont respectivement les informations à coder et à décoder, le signal $y(t)$ correspond à la porteuse chaotique contenant l'information. Les conditions initiales à définir pour les intégrateurs de la figure III.12, trouvent leur analogie dans la donnée des valeurs initiales de l'oscillateur d'émission sur un intervalle de temps de durée correspondant au retard T . La présence du retard pur T est un peu inhabituelle dans ce contexte des systèmes inverses. Une réflexion plus approfondie est encore nécessaire pour intégrer les dynamiques non linéaires à retard dans le cadre des systèmes inverses. A ce sujet, nous proposons à la figure III.13 une structure parallèle à celle de la figure III.12, dans le cas du système de codage/décodage que nous avons réalisé.

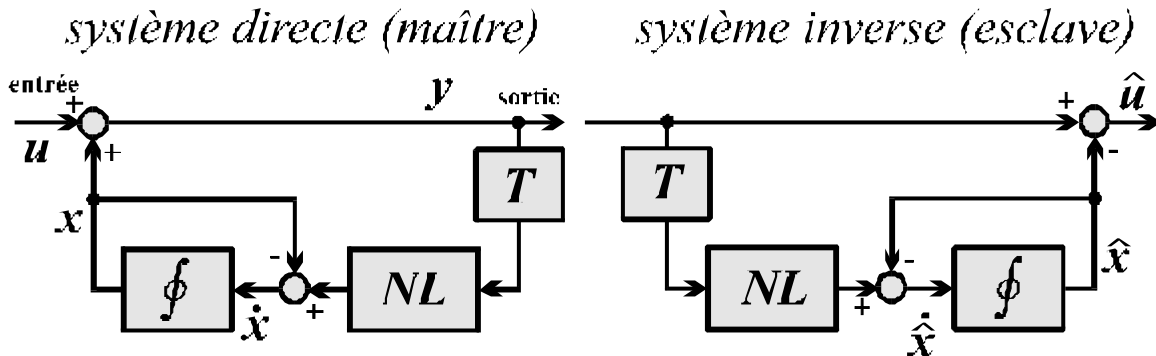


Figure III.13 : méthode de codage adoptée, dans une approche de système inverse

La boucle interne formée entre la sortie et l'entrée de l'intégrateur pur, est l'équivalent du passe-bas du 1^{er} ordre. On peut remarquer que la chaîne direct, avant le prélèvement du signal de sortie du système maître $y(t)$, ne comporte pas d'intégration. Ainsi, le système inverse correspondant n'a pas besoin de fonction dérivée, ce qui pratiquement est synonyme de bruit supplémentaire dans les hautes fréquences. Ce détail ne semble pas pourtant une différence essentielle entre la solution proposée et le principe du système inverse. En effet, à la figure III.12, il suffit d'extraire le signal de sortie juste après le soustracteur du maître, et remplacer chez l'esclave les dérivateurs dans la branche directe par des intégrateurs dans la branche avant la non linéarité (figure III.14), pour retrouver un système inverse sans dérivation, comme dans la solution que nous avons adoptée.

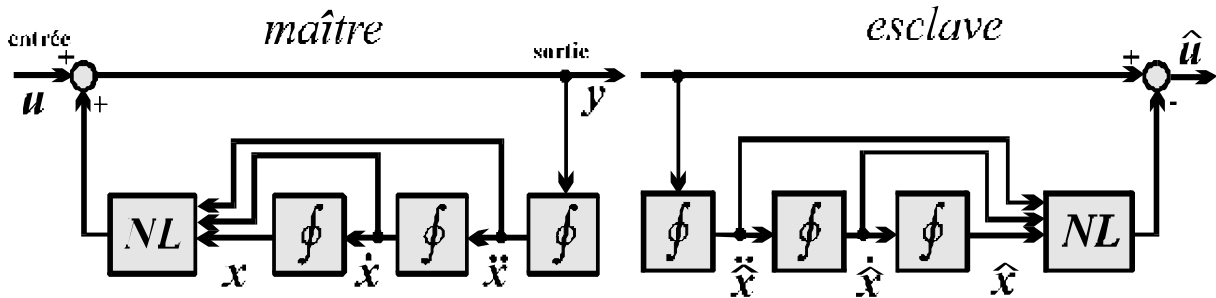


Figure III.14 : autre représentation du système inverse

Avec cette dernière représentation, il semble effectivement que la méthode de décodage utilisée est semblable en certains points à l'approche du système inverse, dont le principe a été connu seulement après la mise en oeuvre de notre montage final.

3. Influence des écarts de paramètres entre émetteur et récepteur

L'origine de l'erreur de décodage se trouve naturellement dans les différences entre les éléments de la réception et ceux de l'émission. Dans une première approche nous allons estimer cette erreur en fonction des écarts de paramètres ($\Delta\beta = \beta - \beta'$ et $\Delta\Phi = \Phi - \Phi'$) entre émetteur et récepteur, afin de discuter qualitativement de l'importance de la précision sur chaque paramètre. Une intégration numérique de l'équation différentielle déterminant la dynamique de l'erreur sera effectuée dans le chapitre IV. Elle permettra de vérifier de manière chiffrée l'influence des écarts paramétriques sur la qualité du décodage.

- estimation de l'erreur de décodage $NL = NL_{\beta, \Phi} [X]$ donc $\varepsilon_{\Delta T=0} = \frac{\partial NL}{\partial \beta} \cdot \Delta \beta + \frac{\partial NL}{\partial \Phi} \cdot \Delta \Phi$

$$\text{avec : } \frac{\partial NL}{\partial \beta} = \sin^2(\) \leq 1 \text{ et } \left| \frac{\partial NL}{\partial \Phi} \right| = 2 \cdot \beta \cdot |\sin(\)| \leq 2 \cdot \beta$$

- de (II.14) on tire : $\left| \frac{dX}{dt} \right| = |NL[X(t-T)] - X(t)| \leq |NL_{Max} - X_{min}| = \beta$

$$\text{donc, } \left| \varepsilon_{\substack{\Delta \beta=0 \\ \Delta \Phi=0}} \right| = \left| \frac{dNL}{dX} \cdot \frac{dX}{dt} \cdot \Delta T \right| \leq \beta \cdot \left| \frac{dNL}{dX} \right| \cdot |\Delta T| \leq 2 \cdot \beta^2 \cdot |\Delta T|$$

d'où $|\varepsilon| \leq |\Delta \beta| + 2 \cdot \beta \cdot |\Delta \Phi| + 2 \cdot \beta^2 \cdot |\Delta T|$ (III.21)

4. Discussion

(III.13) est une majoration grossière de l'influence des différents paramètres sur l'erreur de décodage. Elle ne peut toutefois être discutée dans l'absolu, car il faut tenir compte des critères relatifs à la qualité du décodage ($\langle s^2 \rangle$ par rapport à $\langle \varepsilon^2 \rangle$, signal extrait du bruit de décodage) et aussi à la qualité du codage ($\langle s^2 \rangle$ par rapport à $\langle X^2 \rangle$, signal noyé dans la porteuse chaotique). En termes plus précis, on peut écrire que le bruit du décodage sans information impose une relation entre la qualité du masquage de l'information et la qualité du décodage : un compromis est à faire.

$$\frac{\langle s^2 \rangle}{\langle X^2 \rangle} = \frac{\langle s^2 \rangle}{\langle \varepsilon^2 \rangle} \cdot \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{\langle X^2 \rangle} \quad (III.22)$$

soit : **[Masquage]_{dB} = [Qualité du signal restitué]_{dB} + [Bruit de décodage]_{dB}.**

En première approche, on peut dire que le terme prédominant dans (III.21) semble être le troisième. Les 2 premiers sont sensiblement du même ordre de grandeur. Le dernier fait intervenir β^2 , avec nécessairement $\beta \gg 1$ (régime chaotique), et, de plus, il faut savoir que le retard T a été normalisé par rapport à la constante de temps τ , et que l'on s'est fixé $T \gg 1$ pour obtenir un régime dynamique « hyperchaotique » de grande dimension. La précision de T sera donc à soigner plus particulièrement dans la réalisation expérimentale, cette précision étant ramenée à la constante de temps beaucoup plus petite que le retard.

Une étude reste encore à faire pour caractériser complètement la qualité du décodage, elle concerne l'influence du bruit rajouté par la ligne : bruit en intensité, et dispersion des longueurs d'onde. Des modèles existent pour exprimer quantitativement l'influence de ces perturbations de ligne sur l'onde lumineuse [III.14] [II.10].

Remarques :

- Le passe haut $k(t)$ présente pratiquement le désavantage de rajouter beaucoup de bruit dans les hautes fréquences (fonction de dérivation). On peut voir par le calcul qu'il est possible de se passer de $k(t)$, en réalisant un passe bas $h(t)$, qui s'applique à $ch'(t)$, l'argument retardé du soustracteur. Le signal $s'(t)$ est toujours l'information, mais filtrée par le même passe bas ($s' = s * h$). Si la bande passante de l'information est incluse dans celle du passe bas, il n'y a pas de déformation de l'information.

- Symboliquement, le retard temporel a pour effet d'ajouter une seconde ligne de transmission nécessaire à une sorte de synchronisation (calcul retardé). Le signal qui arrive est doublement utilisé par le récepteur, une fois pour en extraire l'information qui y est cachée, et une autre fois, à un instant T -ultérieur, pour effectuer le calcul non linéaire du chaos sans l'information. C'est une sorte de multiplexage temporel de l'information, et de son signal de « synchronisation ».

- Une autre interprétation de cette technique de codage par chaos à dynamique non linéaire retardée est possible. Elle se rapproche curieusement, et sans rapport initial, d'un des domaines d'activités du laboratoire d'Optique de Besançon : la modulation de cohérence. Bien que l'analogie reste encore éloignée et imprécise, elle peut se faire en ces termes : la lame de retard optique serait l'analogie du retard temporel, elle permet de générer sur une même ligne 2 signaux séparés dans le temps par une durée très supérieure au temps de cohérence ($T \gg \tau$, ou $\Delta \gg L_C$, avec L_C =longueur de cohérence). Un nouveau retard optique (Δ') à la réception effectue une recombinaison temporelle ($T'=T$ ou $\Delta'=\Delta$) des 2 paquets qui redeviennent cohérents, et peuvent donner lieu à une recombinaison (interférences) non linéaire (détection d'énergie, module au carré de l'amplitude) des 2 signaux.

CHAPITRE IV :
DYNAMIQUES CHAOTIQUES EN
LONGUEUR D'ONDE, SIMULATIONS
NUMÉRIQUES

Certains régimes dynamiques de notre oscillateur en longueur d'onde ont déjà été brièvement évoqués au chapitre II. Nous avons principalement cherché les conditions de stabilité des points fixes, et nous avons montré la possibilité d'oscillations pour un système différentiel non linéaire, du 1^{er} ordre, à retard. Ces discussions ont été faites en imposant relativement peu de restrictions sur la non linéarité : qu'elle présente un extremum. A la fin du chapitre II, cette transformation non linéaire a été fixée dans le cadre de la modélisation du montage expérimental. C'est une loi de Malus réalisée par un filtre biréfringent qui a été retenue.

Ce chapitre expose les résultats obtenus par simulation du système dynamique modélisé en fin du chapitre II, avec un filtre biréfringent comme non linéarité. De nombreux régimes de fonctionnement sont attendus. Des oscillations périodiques à différentes fréquences, mais aussi et surtout des régimes chaotiques. Pour d'autres types de fonctions non linéaires, les calculs qui seront présentés devront être refaits, car même si les scénarios des différentes bifurcations se retrouvent sans doute, le comportement quantitatif est propre à la loi dynamique. A chaque non linéarité correspondent des régimes dynamiques différents, ou autrement dit dans le contexte de notre application de cryptage, a chaque non linéarité correspond une clé de codage différente.

La figure IV.1 rappelle brièvement le modèle normalisé du filtre biréfringent, ainsi que les paramètres qui interviennent.

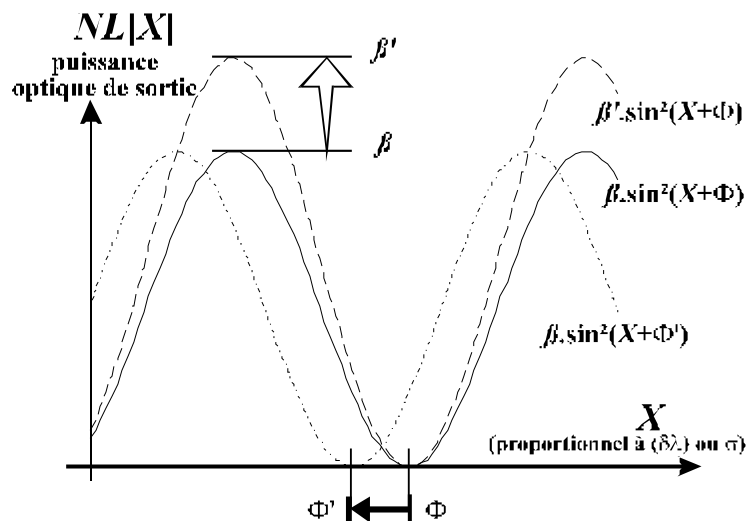


Figure IV.1 : Fonction normalisée du filtre biréfringent

Dans sa forme simplifiée $NL[X]=\beta.\sin^2[X+\Phi]$, la non linéarité est bornée inférieurement par 0, et supérieurement par β . Il y a donc toujours au moins une intersection avec la première bissectrice, c'est-à-dire au moins un point fixe. La variable X dépend linéairement de la différence de chemin optique, elle varie physiquement à cause de la modulation de la longueur d'onde de la lumière laser entrant dans le filtre. Le déphasage physique Φ est théoriquement nul si X est directement proportionnel à la différence de chemin optique. En fait X est une petite variation, et Φ symbolise la valeur moyenne modulo π de ce chemin optique, qui est très grand devant X . Φ a donc pour effet de translater sur l'axe des abscisses la cannelure sinusoïdale (translation de l'origine), et l'action sur β correspond à un étirement ou une affinité selon l'axe des ordonnées. La fonction NL possède une

pende maximum de β en valeur absolue pour $(X+\Phi)=\pi/4$ [modulo $\pi/2$]. β est appelé paramètre de bifurcation car il agit directement sur la pente de la non linéarité, c'est-à-dire sur la condition de stabilité d'un point fixe. Φ peut également être considéré comme un paramètre de bifurcation, puisqu'une variation de Φ aura pour effet de faire glisser le point fixe, donc de changer la pente. Une action sur Φ est périodique de période π .

Dans une première partie nous traiterons des résultats obtenus à l'aide du modèle discret. Bien que très approximatif, ce modèle simple permet de décrire avec des arguments graphiques parlants, un certain nombre de comportements dynamiques du système. Une vision plus proche de la réalité sera apportée par la seconde partie qui intégrera le modèle complet de l'équation différentielle à retard. Ces simulations beaucoup plus lourdes sont toutefois indispensables pour se faire une idée correcte du comportement effectif du générateur de chaos en longueur d'onde, et du système complet de codage / décodage.

I. Modèle discret

A. Principe d'étude

1. Principe de l'itération $X_{n+1}=NL(X_n)$

Comme nous l'avons déjà évoqué, le modèle discret est obtenu en négligeant le terme différentiel de l'équation complète (II.24). Cette approximation dite adiabatique consiste à faire tendre la constante de temps τ vers zéro. Physiquement, cette condition asymptotique est atteinte lorsque τ est très petit devant T , le retard temporel. Si on suit l'évolution de la variable dynamique dans la boucle d'oscillation, cela revient à dire que les transitions d'un état d'entrée de la non linéarité vers son état de sortie se fait très rapidement, et que cet état d'entrée n'est ainsi pas modifié tant que la sortie n'a pas patienté pendant le retard T . Après quoi, la sortie se retrouve en entrée, et une nouvelle transformation non linéaire a lieu.

Le modèle discret se justifie par ses capacités de prédiction dans le cas physique qui nous préoccupe (τ/T petit) ; mais lorsque τ/T devient grand, on a prouvé que cette approximation adiabatique perd toute signification.

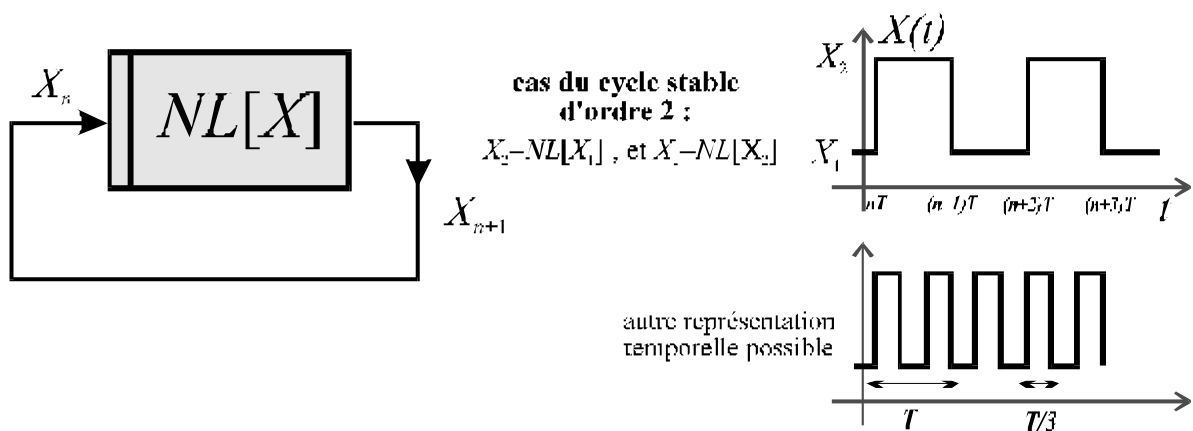


Figure IV.2 : Machine à itérer, cas d'un fonctionnement périodique.

L'évolution dans le temps de la variable dynamique discrète X est schématisée figure IV.2. On passe du terme de la suite à une valeur échantillonnée en posant $X_n = X(n.T)$.

Les valeurs prises par le signal $X(t)$ entre 2 échantillons sont a priori quelconques, pourvu qu'ils vérifient $X(t)=X(t-T)$ [terme $(dx)/(dt)$ nul dans le modèle continu]. Puisque nous considérerons dans un premier temps des solutions périodiques stables, nous adopterons la représentation suivante : une série de termes successifs de la suite correspond à une évolution temporelle dans laquelle ces termes apparaissent les uns après les autres, en restant constants pendant une durée T (figure IV.2, chronogramme supérieur).

Une représentation physique de la suite impose en chaque instant les relations $X(t)=X(t-T)$ et $(dx)/(dt)=0$, sauf aux instants de transition entre 2 termes successifs $((dx)/(dt) \neq 0)$. Ce type d'évolution correspond effectivement à ce qui est observé expérimentalement pour les régimes périodiques, mais d'autres évolutions sont possibles (figure IV.2, chronogramme inférieur) et effectivement observables [IV.1] comme nous le verrons au prochain chapitre.

Notre oscillateur chaotique se ramène dans ces conditions à une machine à itérer, il calcule physiquement les termes successifs d'une suite mathématique :

$$X_{n+1} = \beta \cdot \sin^2(X_n + \Phi) \tag{IV.1}$$

Nous allons maintenant utiliser ce modèle pour essayer de caractériser tous les ensembles de termes successifs que l'on peut obtenir, en fonction des différentes valeurs de Φ , β , et de la condition initiale X_0 .

2. Termes de la suite et graphe de la non linéarité

a. Généralités, rappels

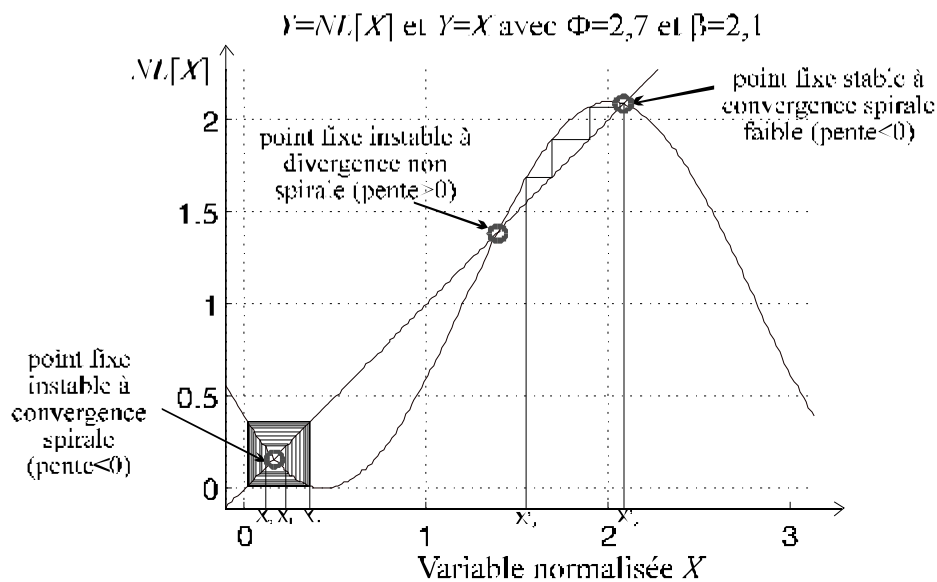


Figure IV.3 : Itération graphique.

Quelles peuvent être les valeurs permises pour les termes de la suite X_n ? De part la nature bornée de la fonction non linéaire dans l'intervalle $[X_{min}(=0), X_{Max}(=\beta)]$, on voit que, quelle que soit la condition initiale X_0 , le premier itéré X_1 se trouvera ramené dans l'intervalle $[X_{min}, X_{Max}]$ où évolueront forcément tous les termes ultérieurs. Il suffit donc de représenter la partie de la non linéarité dans un voisinage de

l'intervalle image de $[X_{min}, X_{Max}]$, soit $NL\{[X_{min}, X_{Max}]\}$. Cet intervalle contiendra inévitablement l'attracteur de l'ensemble des termes de la suite.

La méthode graphique de recherche des termes successifs fait intervenir la droite de contre-réaction $Y=X$. Un terme X_0 aura une image X_1 qui sera l'ordonnée de la courbe $NL[X]$ pour l'abscisse X_0 . Pour connaître X_2 , il faut répéter la même opération en remplaçant X_0 par X_1 . Le fait de ramener l'ordonnée X_1 en abscisse, revient à prendre son symétrique par rapport à la droite $Y=X$. Cette méthode de construction est illustrée à la figure IV.3.

b. Transitoires

La construction de la figure IV.3 illustre la recherche des itérés successifs à partir de la donnée d'un initial X_0 . Les termes apparaissant sur le graphe sont en fait des termes transitoires qui nous intéressent peu, contrairement au comportement stationnaire de la suite. Dans tous les résultats qui seront présentés, on aura pris soin de n'étudier les itérés successifs qu'après un certain nombre (tout à fait subjectif) d'itérations. Celles-ci sont précisément chargées de faire passer les transitoires pour ne plus avoir à en tenir compte. La partie transitoire ne sera pas étudiée.

c. Condition initiale

La figure IV.3 fait également apparaître 2 points particuliers vers lesquels convergent chacune des itérations construites graphiquement. La seule différence entre ces 2 constructions réside dans la donnée de la condition initiale, elles correspondent au même système dynamique, avec les mêmes paramètres. La condition initiale constitue un paramètre supplémentaire qui n'apparaissait pas a priori. Dans les régimes dynamiques qui seront trouvés à partir des simulations, il faudra garder à l'esprit qu'ils dépendent dans certains cas de la condition initiale. L'ensemble asymptotique des termes de la suite pourra se diriger vers différents attracteurs selon la valeur de la condition initiale.

d. Points fixes

Trois points particuliers apparaissent sur la représentation graphique, il s'agit des valeurs de X solutions de l'équation $X=NL[X]$. Ces points sont obtenus en cherchant les intersections de la non linéarité avec la première bissectrice. Ils sont les points fixes d'ordre 1 de la suite. Si un de ces points fixes est atteint, la suite ne donnera pas lieu à de nouvelles valeurs, le point se répétera à chaque itération. Physiquement, cette situation correspond à une longueur d'onde fixe de la lumière laser émise par la diode. Une constance théorique ne signifie pas forcément une stabilité pratique. Le système expérimental ne va rester autour d'un point fixe, que si ce point est stable, c'est-à-dire si le système bouclé a tendance à revenir vers ce point lorsqu'il en est un peu écarté (physiquement à cause des fluctuations dues au bruit).

Rappelons brièvement le formalisme permettant d'aboutir à la condition de stabilité. Soit X_F un point fixe vérifiant $X_F=NL(X_F)$. Soit $(\delta X)_n$ un petit écart d'un terme X_n arrivant dans le voisinage de X_F : $X_n=X_F + (\delta X)_n$. X_F est stable revient à dire X_F est

attractif. Donc la suite des $(\delta X)_n$ converge vers 0, c'est-à-dire les $(\delta X)_n$ successifs sont de plus en plus petit en valeur absolue :

$$\left| \frac{(\delta X)_{n+1}}{(\delta X)_n} \right| < 1, \text{ soit : } \left| \frac{X_{n+1} - X_F}{X_n - X_F} \right| = \left| \frac{NL[X_n] - NL[X_F]}{X_n - X_F} \right| \cong \left| \frac{dNL}{dX} \right|_{X=X_F} < 1 \quad (IV.2)$$

Nous retrouvons donc le résultat déjà établi au chapitre II, le point fixe est stable si la pente de la non linéarité est inférieure à 1 en valeur absolue. Les différentes évolutions locales de la suite au voisinage des points fixes sont illustrées à la figure IV.4. L'évolution globale est représentée à la figure IV.3, où l'on peut remarquer qu'une source (point fixe instable de pente supérieure à 1) constitue la séparatrice entre 2 bassins d'attractions, l'un faisant évoluer l'itération vers un noeud stable (point fixe inférieur, à pente négative), et l'autre vers un puits (point fixe supérieur, à pente faiblement positive).

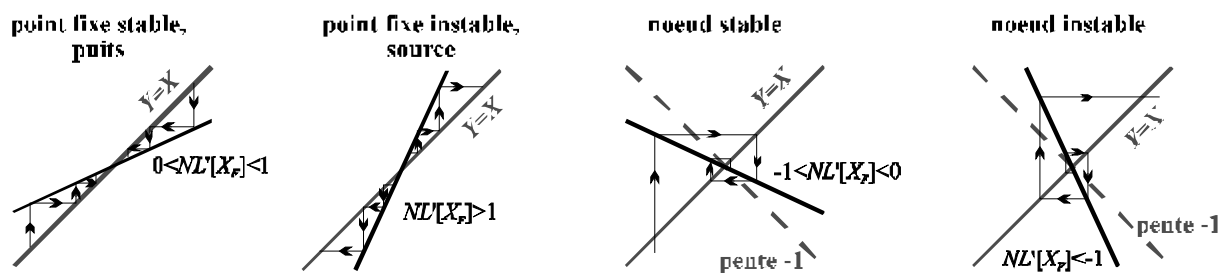


Figure IV.4 : Différentes stabilités locales de points fixes.

Compte tenu de la fonction particulière que nous considérons, la dérivée s'écrit sous la forme : $NL'[X] = \beta \cdot \sin[2 \cdot (X + \Phi)]$. La pente maximum est donc égale à β , elle est atteinte par le point fixe si celui-ci vaut $\Phi - \pi/4$. Lorsque β croît en partant de zéro, le point fixe stable au départ, perd inévitablement sa stabilité (sauf si $\Phi = k\pi \text{ mod } \pi$, cas de la pente toujours nulle, quel que soit β).

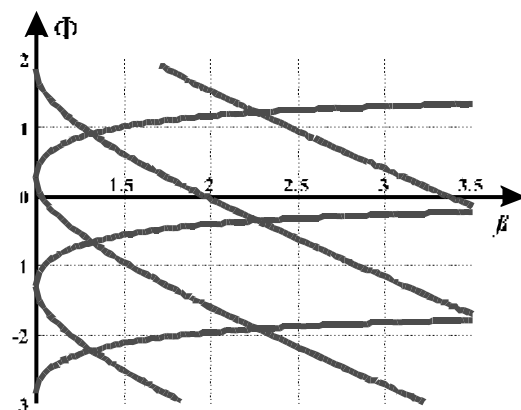


Figure IV.5 : Frontière de la 1^{ère} bifurcation dans le plan (β, Φ) .

La valeur limite de stabilité est obtenue en résolvant : $\beta \cdot \sin[\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} + 2 \cdot \Phi] = \pm 1$

$$(IV.3)$$

La figure IV.5 représente le tracé des courbes solutions de l'équation (IV.3).

Les croisements des courbes illustrent le fait que plusieurs points fixes stables peuvent exister en même temps. On peut remarquer également que la figure obtenue est bien périodique en Φ .

3. Evolution d'un point fixe avec β

Nous venons de voir qu'en agissant sur le paramètre β , tout point fixe stable devient inévitablement instable. Différentes configurations peuvent alors se présenter suivant la valeur du paramètre Φ .

a. Cas marginal $\Phi = \pi/4 - 1/2$

Ce cas particulier correspond à une limite de stabilité ($NL'[X]=1=\beta \sin[2(X_F+\Phi)]$), concernant un point fixe confondu avec un point d'inflexion de la sinusoïde (pente maximum $\sin[2(X_F+\Phi)]=1$, $X_F+\Phi=\pi/4$, d'où $\Phi=\pi/4-1/2$, donc aussi $\beta=1$, $X_F=\beta/2=1/2$). Pour cette valeur de Φ , l'évolution du point fixe avec le paramètre de bifurcation se fait de la façon suivante (figure IV.6).

Pour des valeurs de β très faibles, on observe un point fixe stable à pente positive (puits). Lorsque β augmente, le point fixe se déplace en montant sur la sinusoïde, la pente en ce point croît jusqu'à la valeur limite 1. En ce point limite, la droite $Y=X$ est tangente à la non linéarité. Lorsque β est augmenté un peu à partir de cette valeur de 1, le point fixe continue de glisser vers le lobe supérieur de la sinusoïde, mais sur des portions à pente inférieure à 1. En glissant vers le maximum de la non linéarité, la pente diminue de façon continue, en passant par zéro, pour finir par prendre des valeurs de plus en plus négatives, jusqu'à atteindre la limite de stabilité pour une pente de -1. Il se produit alors le dédoublement caractéristique décrit à la partie c., avec apparition d'un cycle stable d'ordre 2.

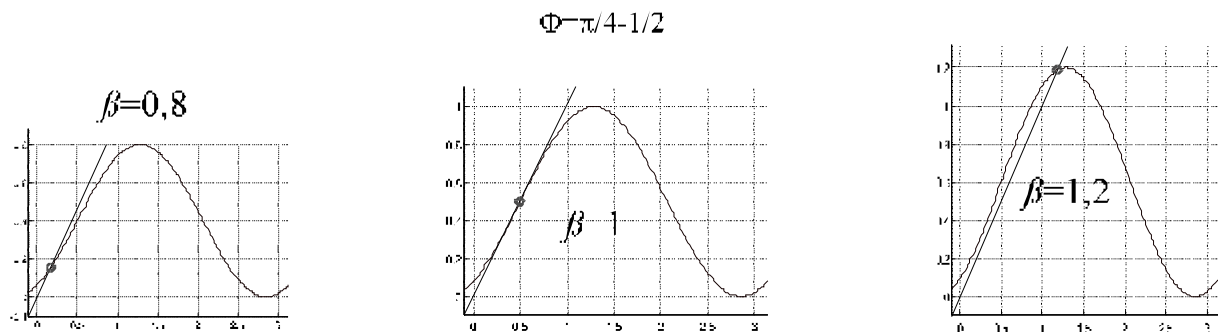


Figure IV.6 : évolution du point fixe pour la cas limite $\Phi=\pi/4-1/2$.

- Lorsque Φ est supérieur à cette valeur limite de $(\pi/4-1/2)$, le point fixe glisse de la même façon sur la sinusoïde, mais les pentes atteintes au cours de cette évolution sont toujours strictement inférieures à 1. Les pentes parcourues prennent des valeurs positives croissantes, puis décroissantes en passant par zéro (maximum de NL). La pente continue de décroître jusqu'à la valeur -1, où il y a bifurcation.

- Si Φ est inférieur à la valeur critique (mais positif pour avoir un point fixe de départ sur la partie à pente positive du minimum), il se produit pour une certaine valeur de l'étirement β un contact tangent de la sinusoïde avec la droite $Y=X$ (figure IV.7).

b. Point fixe initial de type puits, avec contact tangent.

L'évolution d'un puits pour $\Phi \in [0, \pi/4 - 1/2[$ est décrite à la figure IV.7. Le point fixe s'élève tout d'abord très légèrement lorsque β est augmenté. Pour une valeur particulière de β , le lobe supérieur entre en contact tangent avec la première bissectrice : il y a création d'un nouveau point fixe, double, à stabilité critique puisque le contact est tangent (pente 1). En continuant d'augmenter β , le point double se sépare et il apparaît une paire puits-source qui s'écarte de plus en plus. Le puits monte vers le maximum de la non linéarité, alors que la source (séparatrice des

bassins d'attraction des 2 puits) se dirige rapidement vers le puits initial du lobe inférieur. Dans ces conditions où 2 centres attractifs (les 2 puits) existent simultanément, la suite évolue vers l'un ou l'autre suivant la valeur de la condition initiale. Ces 2 bassins d'attraction coexistent tant que β ne dépasse pas une valeur limite pour laquelle le puits inférieur disparaît. Seul le puits supérieur subsiste ensuite en tant que point fixe.

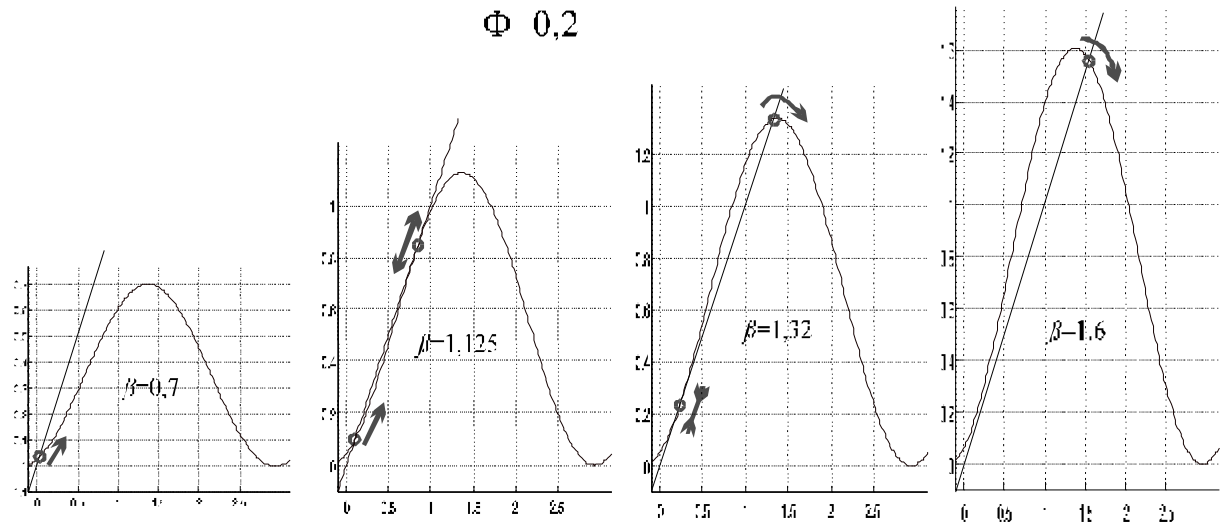


Figure IV.7 : évolution du puits pour $\Phi < \pi/4 - 1/2$.

La disparition du puits inférieur se produit selon un scénario inverse de celui qui a donné naissance à un point double : lorsque les 2 points fixes se confondent, la droite $Y=X$ est tangente à la non linéarité ; le point double à pente unité est prêt à disparaître dès que l'on augmente β , car le contact tangent est rompu.

Si la condition initiale avait orienté le système vers le point fixe stable inférieur, le système dynamique saute de manière discontinue vers le point fixe supérieur qui n'a pas disparu. Si ce point fixe est toujours stable, il évolue ensuite avec β le long de la non linéarité vers les zones à pente négative, c'est-à-dire vers la perte de sa stabilité par dédoublement. Pour certaines valeurs de Φ , le point fixe supérieur peut déjà avoir perdu sa stabilité. Il y a dans ce cas toujours saut du point fixe inférieur disparu vers le lobe supérieur, mais la dynamique de la suite est plus complexe (cycle d'ordre n , ou régime chaotique).

c. Bifurcation vers un cycle d'ordre 2

Lorsque le système se trouve dans un état de noeud stable (point fixe à pente négative inférieure à 1 en valeur absolue), un accroissement de β entraîne une augmentation de la valeur absolue de la pente : le noeud stable perd brutalement sa stabilité pour la pente -1 . Il existe alors 2 localisations sur la non linéarité pour lesquelles un noeud peut perdre sa stabilité : soit à droite d'un maximum, soit à gauche d'un minimum (figure IV.8).

Dans le cas d'un noeud stable (voir figure IV.4), la construction graphique de la suite vers le point fixe se fait en tournant autour de ce point fixe : les itérés successifs sont alternativement inférieurs et supérieurs au noeud stable, tout en se rapprochant. Lorsque le noeud perd sa stabilité, une perturbation à partir du point fixe s'amplifie, également en tournant autour du point fixe. Il est alors logique de penser que cette

perturbation peut se stabiliser sur 2 points images l'un de l'autre par l'itération. L'un de ces points se situe dans une zone à pente plus forte que celle du noeud instable (vers le point d'inflexion), l'autre est localisé proche de l'extremum voisin du noeud instable, donc à pente moins forte. Le point proche de l'extremum (pente nulle) possède un caractère convergent par rapport à l'itération, l'autre un caractère divergent. C'est le caractère convergent qui l'emporte comme le montre l'étude de l'itération double.

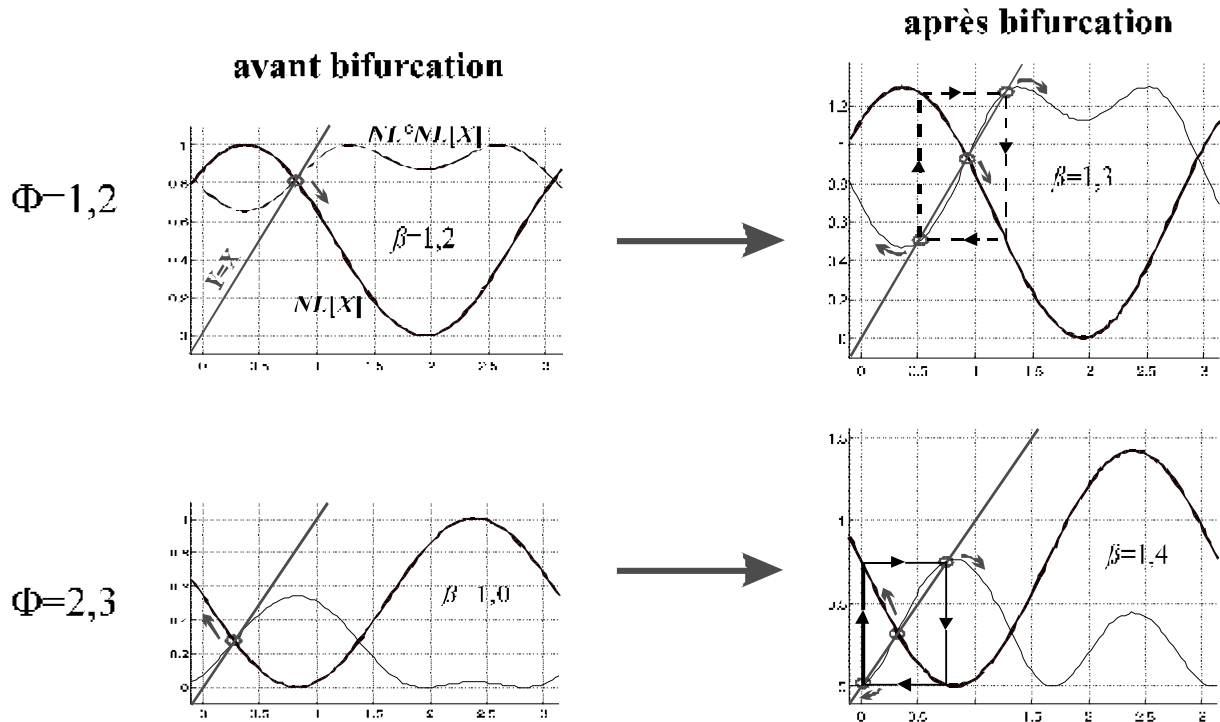


Figure IV.8 : bifurcation d'un noeud, itération simple et double.

La figure IV.8 représente la forme graphique de la non linéarité et de son itération double pour 2 cas ($\Phi=1,2$ et $\Phi=2,3$) où on observe une bifurcation d'un noeud stable vers un cycle stable. Avant la bifurcation, chacune des 2 fonctions possède le même point fixe stable : c'est un noeud stable pour NL , et un puits pour $NL \circ NL$. A la bifurcation, l'itération double est tangente à la droite $Y=X$, le puits devient critiquelement instable, il est prêt à se transformer en une source, et à se dédoubler en même temps en 2 puits. Le triplet (une source, 2 puits) de l'itération double correspond à un cycle stable d'ordre 2 pour l'itération simple.

Le cycle discret d'ordre 2 est à rapprocher de l'exemple du pendule réel décrit au chapitre 1 (figure I.6) : un cycle limite existe en présence de répulseurs, un à l'intérieur, et un (ici en \pm) autour.

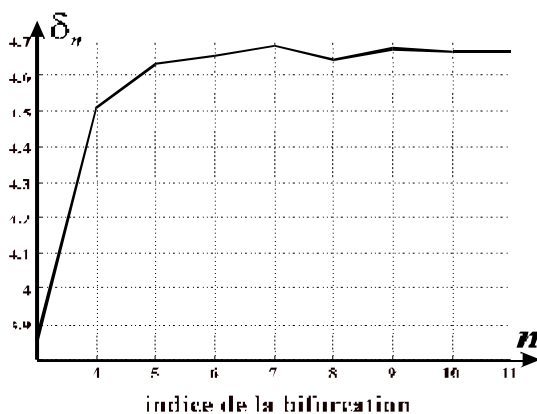
4. Itérations multiples

a. Cycles en 2^n

Les 2 puits de $NL \circ NL$ évoluent de la même façon que ce qui a été décrit pour les puits de l'itération simple. En augmentant β , ils vont se diriger vers des zones à pente négatives de plus en plus forte, pour finir par se dédoubler à leur tour,... et ainsi de suite pour toutes les itérations d'ordre 2^n de la fonction non linéaire de départ. La perte de stabilité d'un point fixe de l'itération d'ordre 2^n , s'accompagne de

la création de 2 nouveaux points fixes stables pour l'itération d'ordre 2^{n+1} . Autrement dit, du point de vue de l'itération simple, un cycle d'ordre 2^n perd sa stabilité au profit d'un cycle d'ordre 2^{n+1} . C'est la fameuse *cascade par dédoublement de période*. Si on observe l'évolution dans le temps des termes de la suite, la bifurcation transforme une onde périodique, dite en « T_p », en une autre de période 2 fois supérieures, dite en « T_{2p} », chacun des p niveaux s'étant dédoublé. En terme d'analyse spectrale, il y a apparition de sous harmoniques de fréquence 2 fois plus faible.

La cascade par dédoublement ne se poursuit pas indéfiniment avec β , mais elle s'accélère géométriquement par rapport à une valeur dite d'accumulation, notée β^* . Si on note (Δ_n) la suite de la différence entre 2 valeurs de β pour lesquelles on observe 2 bifurcations successives (β_n pour le passage du cycle d'ordre 2^{n-1} au cycle d'ordre 2^n), cette suite converge vers zéro de manière asymptotiquement géométrique. La raison géométrique δ est un nombre transcendant qui ne dépend que de l'allure de l'extremum local de la non linéarité (Feigenbaum). La fonction NL étant localement parabolique comme l'application logistique étudiée par Feigenbaum, nous devons retrouver la même constante de 4,669... Les résultats concernant l'étude des bifurcation de NL sont résumés à la figure IV.9.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta^* = 2,009131571\dots$$

$$\Delta_n = \beta_n - \beta_{n-1} = \delta_n \cdot \Delta_{n-1}$$

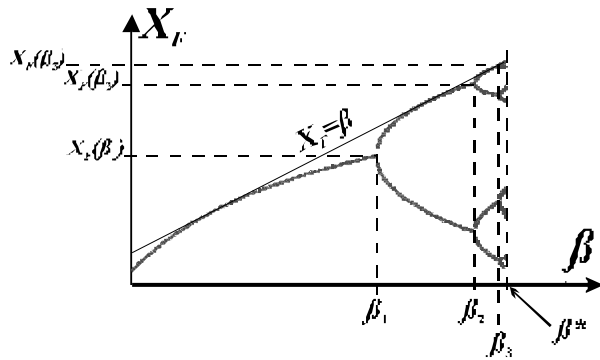
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$$

$$\delta_n = \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - \beta_{n-2}}$$

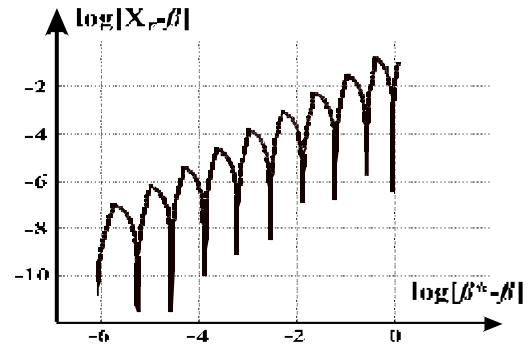
$$\delta = 4,669\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$$

Figure IV.9 : Convergence des bifurcations successives ($\Phi=0,3$).

La série de bifurcations peut se résumer sur un graphe multivalué représenté à la figure IV.10.1. On y observe une structure arborescente des valeurs X (en ordonnée) des cycles stables successifs. A chaque valeur de bifurcation de β (reportée en abscisse), les branches se dédoublent. Ce graphe représente *le diagramme de bifurcation* des régimes périodiques des cycles en 2^n . Il présente une structure fractale de branches en branches qui a été mise en évidence à la figure IV.10.2. L'échelle logarithmique de la fonction tracée, et la répétition par translation du motif illustre le caractère fractal de la cascade de bifurcations par dédoublement.



IV.10.1 : diagramme de bifurcation des cycles en 2^n ($\Phi=0,3$)



IV.10.2 : structure fractale

Figure IV.10 : Bifurcations et structure fractale.

b. Cascade inverse

Juste après le point d'accumulation β^* , il n'existe plus de régime périodique stable en 2^n , les régimes chaotiques commencent, et ils évoluent en cascade inverse avec l'accroissement de β .

Au delà du point d'accumulation β^* , le système ne possède plus de cycle périodique stable d'ordre 2^n , et l'on voit apparaître des séries chaotiques. Ce chaos est toutefois organisé, il est structuré en intervalles disjoints où évoluent les termes successifs de la suite. Les points d'un intervalle I_k donné se transforment tous par NL en des points qui appartiennent au même intervalle I_{k+1} . Et ainsi de suite, jusqu'à retomber au bout d'un nombre p d'itérations sur l'intervalle $I_k = I_{k+p}$. Un tel régime dynamique chaotique sur p intervalles périodiques sera dans la suite appelé « chaos en T_p ».

Entre 2 intervalles voisins, il existe des intervalles interdits qui correspondent à des valeurs de X non accessibles lors du régime chaotique permanent. Ces intervalles interdits agissent comme des centres répulseurs entre lesquels on trouve les intervalles I_k . Les centres répulseurs correspondent graphiquement au prolongement des anciens points fixes stables, maintenant tous instables pour ces valeurs élevés de β .

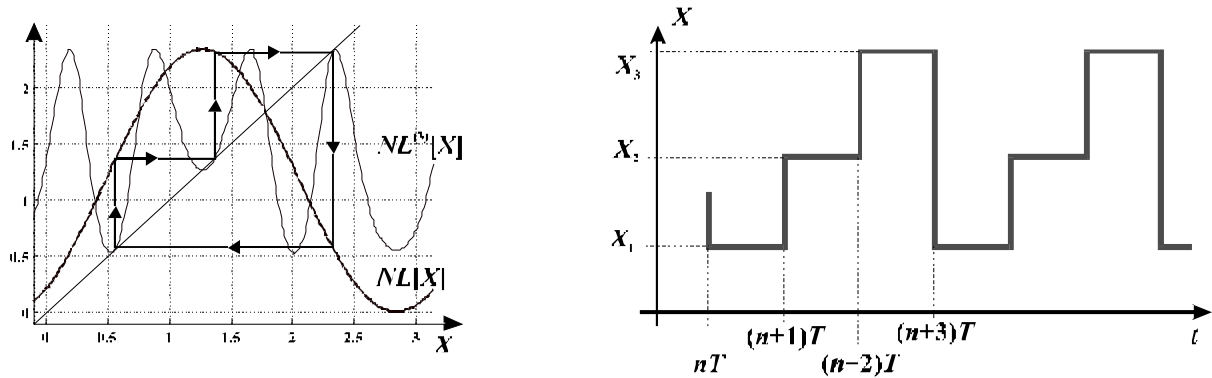
En traversant le point d'accumulation, nous avons transformé de manière symétrique les cycles périodiques de points fixes stables en cycles chaotiques d'intervalles stables. La transformation est symétrique dans le sens où le nombre d'intervalles est en $p=2^n$. Lorsque β augmente, on assiste également à des bifurcations, avec cette fois des valeurs de n qui sont décrémentées. Le nombre d'intervalles diminue ainsi de manière géométrique inverse (les bifurcations sont de plus en plus espacées), jusqu'à n'avoir plus qu'un seul intervalle ($n=0$, ou $p=1$). Le chaos est alors dit complètement développé (*fully developed chaos*).

c. Fenêtres de périodicité

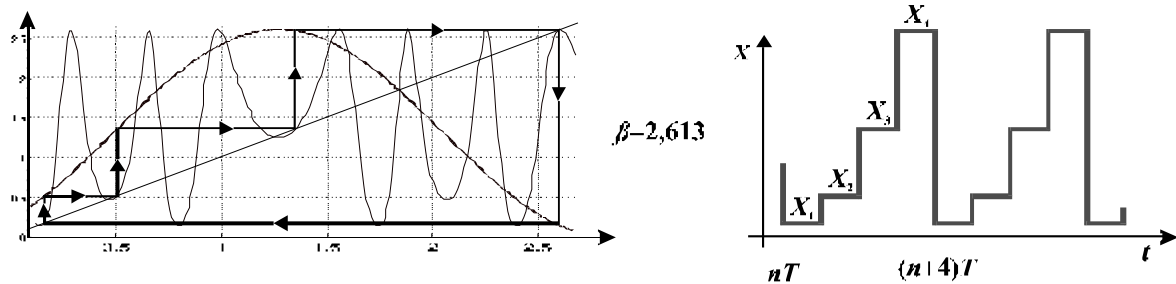
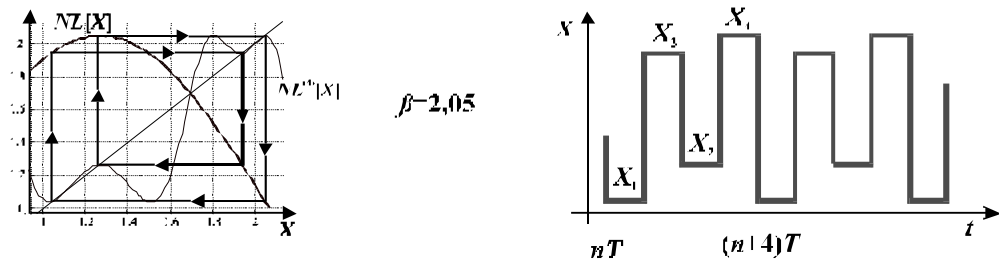
Nous avons pour l'instant uniquement évoqué les cycles périodiques stables possédant un ordre en 2^n , qui correspondent à des points fixes de la fonction itérée 2^n fois. Mais il peut exister a priori des points fixes pour la fonction itérée 3 fois (figure IV.11.1), ou 5 fois... Ces configurations se retrouvent effectivement pour certaines valeurs du paramètre de bifurcation, au delà du point d'accumulation β^* . Lorsqu'un tel régime dynamique est atteint, il subit avec β le même scénario de

bifurcations par dédoublement, jusqu'à un point d'accumulation propre à la fenêtre périodique. Il apparaît ainsi des cascades de régimes périodiques pour $\beta > \beta^*$.

Les fenêtres périodiques sont denses dans une fenêtre chaotique, et inversement, les régimes chaotiques sont également denses au delà du point d'accumulation de la fenêtre périodique. Les fenêtres périodiques sont elles-mêmes denses dans le diagramme de bifurcation. Fenêtres de périodicité et fenêtres chaotiques s'imbriquent dans le diagramme de bifurcation à l'image des poupées russes.



IV.11.1 : Période 3, $\Phi=0,3$ et $\beta=2,35$.



IV.11.2 : Période 4, $F=0,3$, $b=2,05 < b^*$, et $b=2,613 > b^*$.

Figure IV.11 : Itérations multiples et régimes périodiques après β^* .

Le nombre de branches au début de la cascade est souvent impair, les bifurcations successives donnant lieu à des cycles d'ordre $p=(2.q+1).2^n$. Mais des cycles paires du type 2^n peuvent réapparaître, avec toutefois une petite différence : l'ordre de succession des points fixes du cycle change. Si on classe ces points par valeurs croissantes (X_1, X_2, X_3, X_4 pour un cycle d'ordre $2^2=4$), leur succession après itération lors d'un cycle obtenu pour $\beta < \beta^*$, donnera un certain ordre (par exemple (figure IV.11.2) $X_1, X_3=NL[X_1], X_2=NL[X_3], X_4=NL[X_2]$). Un cycle obtenu pour un $\beta > \beta^*$, se fera selon une permutation différente des 4 termes définis par ordre croissant (par exemple $X_1, X_2=NL[X_1], X_3=NL[X_2], X_4=NL[X_3]$).

Les cycles des fenêtres de périodicité se suivent selon la "séquence universelle". Cette séquence définit l'ordre, dans le sens de sa périodicité, mais aussi dans le

sens de la succession des X composant le cycle. Les cycles possibles d'un système à bifurcations par dédoublement sont données par la série de Sharkovski : $1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots, 9 \cdot 2^n, 7 \cdot 2^n, 5 \cdot 2^n, 3 \cdot 2^n, \dots, 9 \cdot 2, 7 \cdot 2, 5 \cdot 2, 3 \cdot 2, \dots, 9, 7, 5, 3$.

5. Autres représentations graphiques

La figure IV.12 donne 3 exemples de régimes dynamiques. Ce mode de représentation est adapté à la reconnaissance d'un cycle stable de faible degré, ainsi qu'à la caractérisation des différents bassins d'attractions possibles selon la valeur de X_0 . On a tracé également la fonction non linéaire pour bien mettre en évidence la localisation du régime dynamique par rapport aux extrema de $NL[X]$.

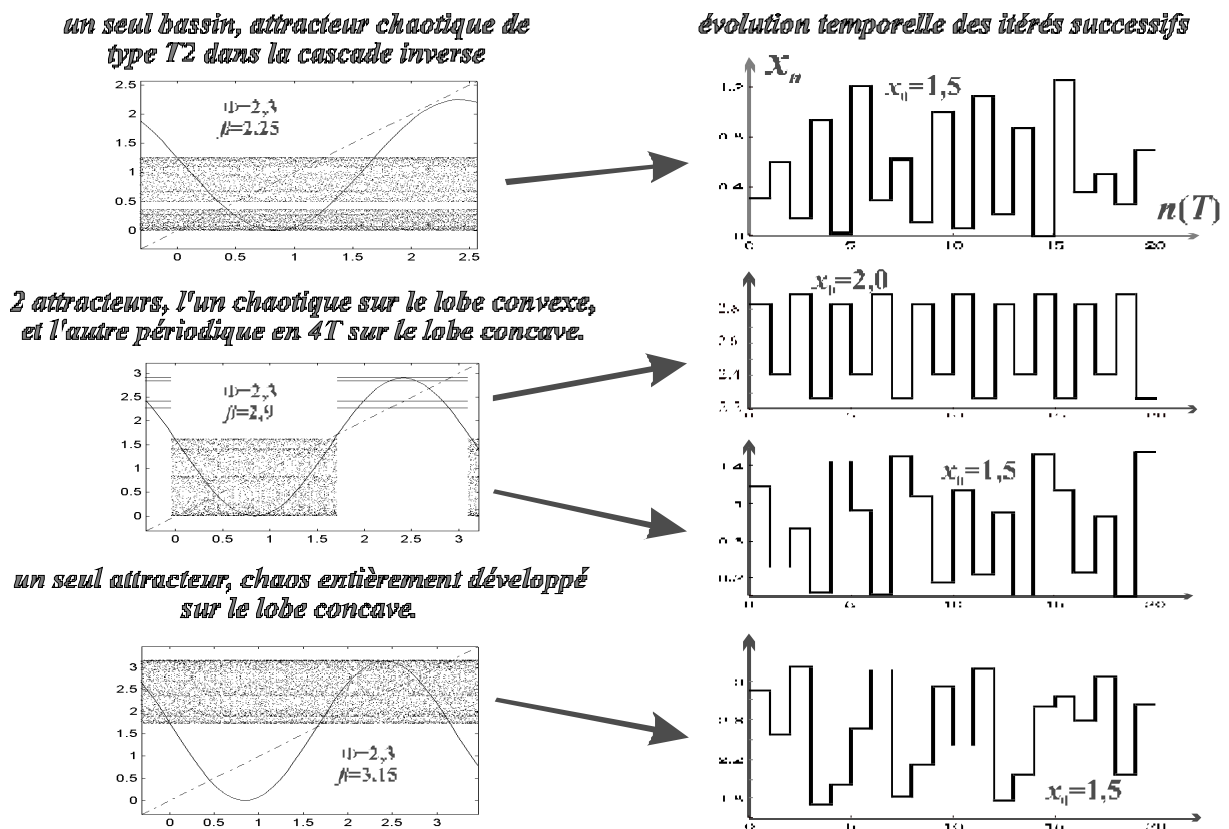


Figure IV.12 : représentation du régime dynamique par N termes de la suite, après transitoire, en fonction de la condition initiale

On trouve en abscisse l'axe des conditions initiales. L'axe des ordonnées sert à représenter d'une part la fonction NL , et d'autre part un nombre N ($=1000$) de termes atteints par la suite pour les différentes valeurs de condition initiale en abscisse, après avoir laissé tombé les Q ($=100$) premiers termes transitoires. Chaque graphe est paramétré en Φ et β . On remarque que lorsque plusieurs attracteurs coexistent, la séparatrice est constituée par un point fixe instable de NL .

Nous venons de passer en revue les différents comportements dynamiques possibles de la suite mathématique décrivant le système étudié par un modèle discret. Cette première approche est locale dans l'espace des paramètres, dans le sens où nous avons décrit à chaque fois un seul régime dynamique. Les quelques cas évoqués ne font apparaître qu'une partie de la richesse de l'ensemble des

comportements. Une équation très simple en est à l'origine (IV.1), et 2 paramètres suffisent (parfois 3 avec la condition initiale) pour donner lieu à autant de diversité.

Toute cette richesse est ordonnée, elle est déterministe. Le chaos lui-même peut être organisé de façon très précise, pour évoluer sur des intervalles stables, en passant de l'un à l'autre dans un ordre précis, en évitant des zones "répulsive"... La description plus détaillée ne peut plus se faire en considérant uniquement un point de la suite et ses itérés successifs. Nous allons poursuivre l'étude du modèle discret par une vision plus globale du système, en choisissant des représentations des régimes dynamiques qui résument l'influence des paramètres de la non linéarité.

B. Diagrammes de bifurcation

1. Description

a. Définition

Les bifurcations sont des changements qualitatifs des propriétés d'une solution dynamique. Elles interviennent lors de l'évolution d'un paramètre du système, ce paramètre sera dans notre cas principalement β , mais des changements sur Φ ou T (dans le cas du modèle continu) donnent également lieu à des bifurcations. Le sens de variation choisi du paramètre est en général celui qui entraîne un accroissement des effets non linéaires, c'est-à-dire une évolution de la dynamique de l'ordre vers le désordre. β sera donc augmenté. Nous verrons plus loin que ce sens conventionnel de variation est, sous certaines conditions, limitatif pour l'étude des solutions dynamiques. Ainsi, pour le modèle continu, une variation par valeurs décroissantes de β , fait apparaître des régimes dynamiques qui n'existent pas lorsque β est augmenté. Par rapport au diagramme obtenu par valeurs croissantes de β , on observe également des phénomènes d'hystérésis dus à la coexistence de plusieurs bassins d'attraction.

b. Méthode de calcul

Dans le mode de représentation choisi, le diagramme de bifurcation revient à une mesure statistique des termes de la suite en fonction des différentes valeurs du

paramètre de bifurcation. Le paramètre β est porté en abscisse, l'intervalle d'évolution des termes X_n est en ordonnée, et la statistique est représentée par une échelle de couleur, par exemple du blanc pour les valeurs de X improbables, au noir pour les valeurs certaines. La statistique est établie sur un nombre fini de N ($=1000$) termes successifs, après une suppression des phénomènes transitoires (calcul de $Q=100$ termes de départ non retenus pour la statistique).

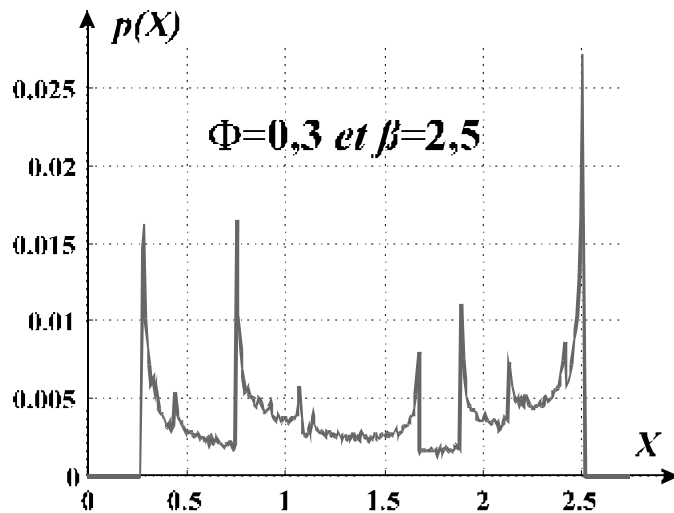


Figure IV.13 : Statistique des X_n sur 100 000 itérations pour, $\Phi=0,3$
 $X_0=1,8$ et $\beta=2,5$.

Le calcul est effectué à partir d'une valeur de départ X_0 . On sait que la condition initiale peut donner à des évolutions vers différents bassins d'attraction, mais ceux-ci sont peu nombreux, 2 tout au plus. Il faudra donc garder à l'esprit qu'un régime dynamique peut éventuellement coexister avec un autre suivant la valeur de départ X_0 choisi.

Φ est un paramètre à préciser sur le diagramme de bifurcation. Il donnera lieu à différents diagrammes selon sa valeur, mais n'oublions pas que le modèle dynamique est π -périodiques en Φ .

L'échantillonnage des valeurs de β est réalisé par $P=300$ valeurs entre 1 et 3 environ. Avec cet intervalle de valeurs de β , il est possible d'observer un grand nombre de régimes dynamiques allant du point fixe jusqu'aux régimes chaotiques. Une partition des valeurs de X permet d'établir une statistique des valeurs atteintes. P intervalles égaux à l'intérieur de $[X_{min}(=0), X_{max}(=\beta_{Max})]$ réalisent cette partition. Au cours du calcul des itérés successifs, on relève le nombre de fois que chaque intervalle est atteint. La figure IV.14 est un exemple d'un diagramme de bifurcation obtenu par cette méthode de calcul.

La figure IV.13 est le résultat d'un calcul précis de la statistique des valeurs atteintes par la suite, dans le cas d'un régime chaotique. On remarque la présence de pics discontinus de probabilité. Les valeurs atteintes ne se répartissent pas uniformément sur l'ensemble de l'intervalle.

c. Exemple, discussion

Le diagramme de la figure IV.14 se lit de la façon suivante. La partie à gauche à une seule branche correspond au régime du point fixe stable, un seul point est atteint en régime permanent, d'où une probabilité unité. Cette branche se divise en 2, c'est la première bifurcation vers un cycle d'ordre 2. La cascade par dédoublement continue jusqu'en β^* , puis commence le régime chaotique. On distingue le chaos en T_4 , puis en T_2 , puis le chaos entièrement développé : c'est la cascade inverse. Le régime chaotique est interrompu pour certaines valeurs de β : on distingue une fenêtre de périodicité en T_6 dans la zone de chaos en T_2 , puis 3 fenêtres successives en T_5 , T_3 et T_4 dans la zone de chaos entièrement développé. Tous ces détails existent à l'infini à des échelles plus petites, mais il faut un calcul plus précis pour les déceler.

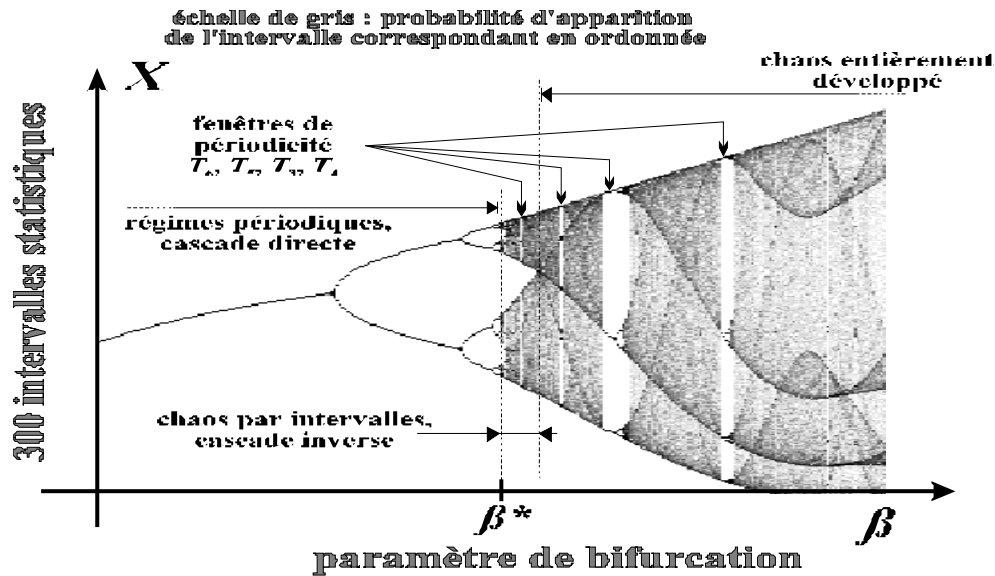
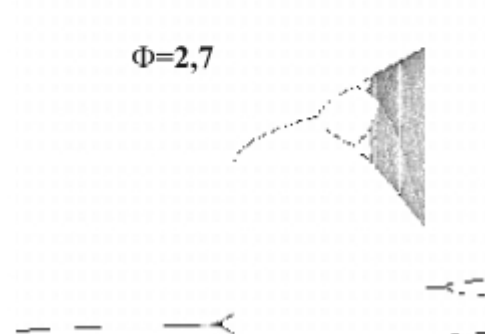
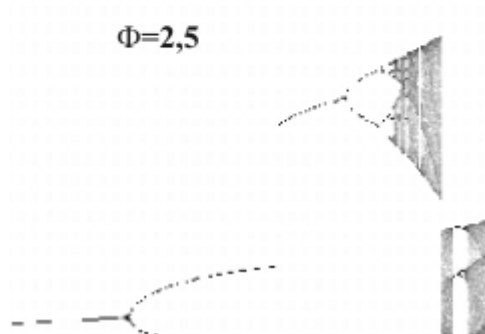
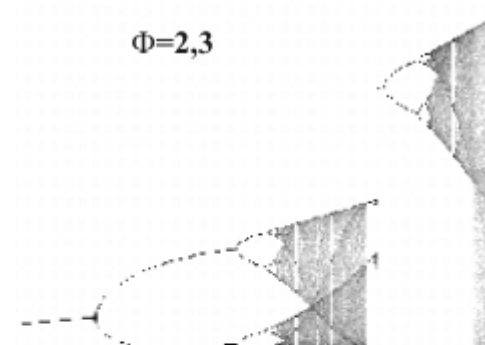
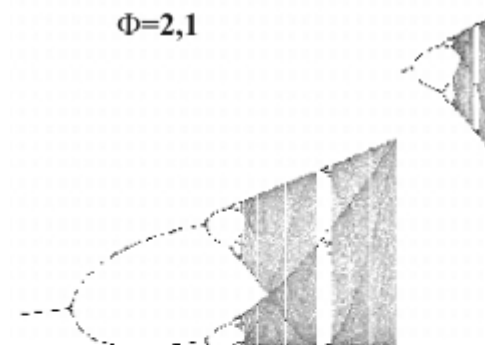
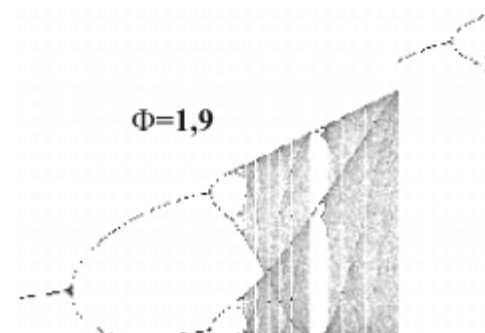
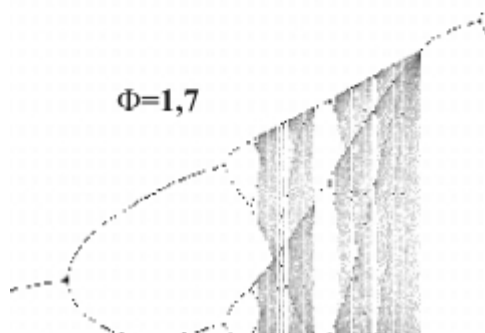
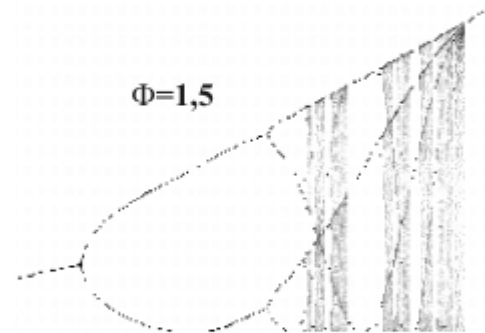
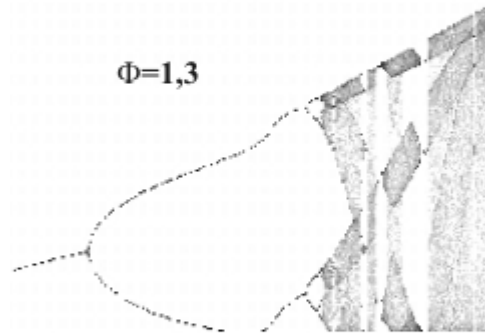
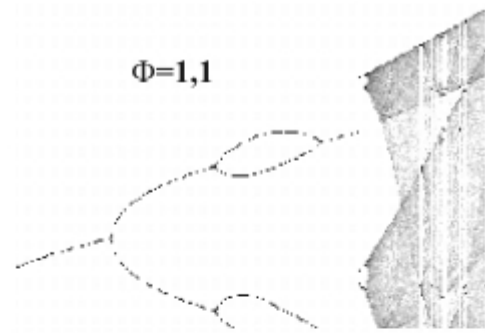
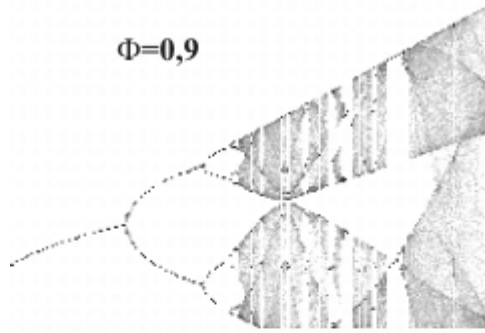


Figure IV.14 : Exemple de diagramme de bifurcation sur le modèle discret, $\Phi=0,3$, $X_0=1,8$ et $\beta=1,1$ à 3 .

Pour différentes raisons, la signification de ces diagrammes doit être considérée d'un point de vue qualitatif. Compte tenu de l'approximation adiabatique, les diagrammes de bifurcation du modèle discret ne nous indiquent que grossièrement le degré de complexité en fonction des paramètres Φ et β des régimes dynamiques du système réel. Ils constituent toutefois une première approche plus simple et plus rapide par rapport à l'intégration numérique pas à pas du modèle continu.

2. Influence du paramètre ϕ

Ce paramètre peut être expérimentalement facilement réglé comme nous l'avons vu dans la partie modélisation du chapitre II. Il est donc intéressant de voir dans quelles mesures Φ est susceptible de modifier les régimes dynamiques accessibles au cours de la variation de β . Les graphes de la figure IV.15 représentent les diagrammes de bifurcation pour différentes valeurs de Φ couvrant un intervalle de π (périodicité par rapport à ce paramètre), avec un pas de $0,2$ radian.



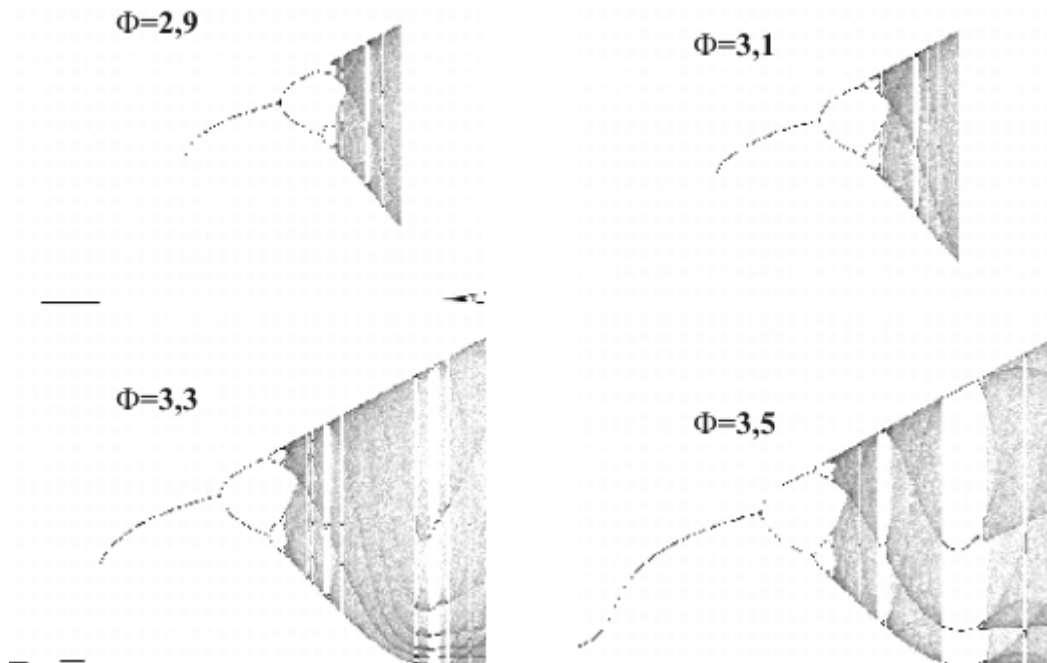


Figure IV.15 : diagrammes de bifurcation pour différentes valeurs de Φ .

Les formes de ces diagrammes sont variées. Le régime dynamique qui sera choisi pour réaliser le masquage de l'information devra répondre à certains critères, tels que :

- la complexité du régime dynamique pour masquer correctement l'information ; cette complexité correspond sur les diagrammes de bifurcation aux zones fortement chaotique, c'est-à-dire loin des régimes périodiques.
- la stabilité du régime dynamique ; on peut voir sur certains diagramme que des sauts discontinus d'intervalles d'évolution ont lieu ($\Phi > 2,1$). Ces sauts peuvent être la manifestation de bassins d'attraction mal définis. Une dynamique chaotique instable n'est a priori pas souhaitée, elle peut entraîner des problème de décodage.

3. Non linéarité et diagramme de bifurcation

La figure IV.16 est un mode de représentation particulier qui permet d'illustrer la notion de bassin d'attraction. On a représenté la non linéarité comme une nappe en 3 dimensions qui dépend de la variable dynamique X , et du paramètre de bifurcation. Il est alors intéressant de tracer le lieu d'évolution du diagramme de bifurcation sur cette non linéarité en nappe. On peut voir que les lobes concaves ou convexes forment des attracteurs pour les différents régimes dynamiques, et que selon la localisation de la condition initiale par rapport à ces lobes (1,5 est en dessous du lobe convexe, 2 est plus proche du lobe concave), des régimes dynamiques différents peuvent exister pour les mêmes valeurs de β et Φ .

La conséquence de cette observation est que l'on peut assister à un changement d'attracteur, donc a fortiori un changement de régime dynamique, si la valeur moyenne de X dérive au cours du temps. Ce type de comportement a effectivement été observé expérimentalement. Le point de fonctionnement du régime chaotique devra donc être choisi suffisamment loin des frontières de ces phénomènes.

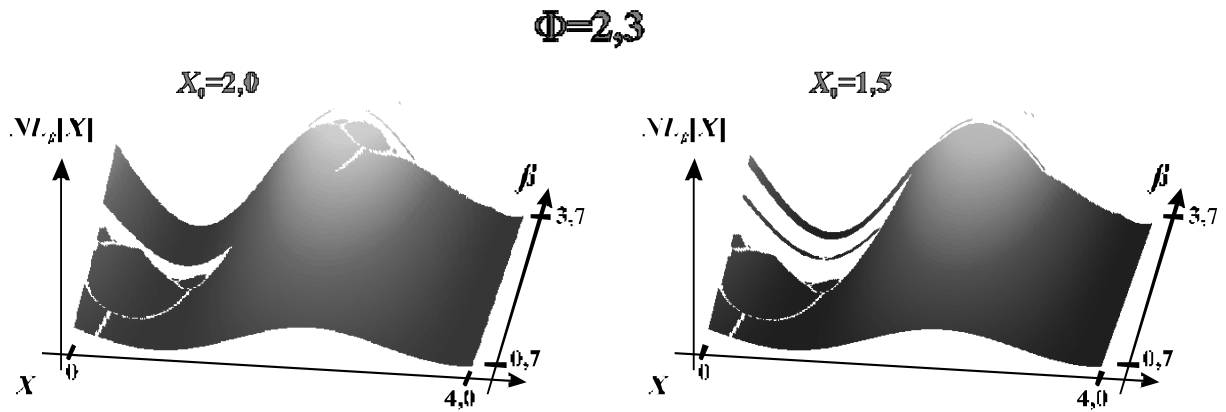


Figure IV.16 : bassins d'attraction visualisés par le tracé du diagramme de bifurcation sur la non linéarité en 3 dimension.

C. Diagrammes entropiques

Les diagrammes de bifurcation ont permis d'estimer en fonction des valeurs des paramètres β et Φ la complexité des régimes dynamiques. Un diagramme de bifurcation étant paramétré par Φ , il a fallu en tracer plusieurs pour rendre compte de l'influence de Φ . L'entropie définie au chapitre I permet de résumer en un seul graphique tous les régimes dynamiques en fonction des 2 paramètres.

1. Mesure du régime dynamique

L'entropie est une grandeur monovaluée $\Omega(\Phi, \beta)$ qui est d'autant plus grande que le régime dynamique est désordonné, donc chaotique. Un graphe en 3 dimensions va pouvoir être établi dans l'espace (Ω, Φ, β) . Son expression a été donnée au chapitre I :

$$\Omega(\rho) = -\sum_i \rho(P_i) \cdot \ln[\rho(P_i)] \quad (IV.4)$$

P_i correspond dans notre cas au petit intervalle de valeurs X dont on a calculé la probabilité $\rho(P_i)$ pour les diagrammes de bifurcation. Un point fixe stable d'ordre 0 correspond à une entropie nulle [$\rho(P_i)=1$], un point fixe stable d'ordre 2 est associé à une entropie de $\ln(2)$. A chaque bifurcation il y a discontinuité de l'entropie, et entre 2 bifurcations, pour un fonctionnement périodique, l'entropie est constante. En régime chaotique, l'entropie croît à mesure que le régime devient plus chaotique (chaos en T_4 , T_2 , puis entièrement développé). Les fenêtres de périodicité se manifestent par des chutes discontinues de l'entropie.

La croissance de l'entropie avec la complexité du régime dynamique est toutefois assez faible. Cette caractéristique est typique des comportements chaotiques par opposition aux systèmes purement aléatoires. Pour ces derniers l'entropie augmente continûment, et beaucoup plus fortement. Dans le cas des dynamiques chaotiques, il y a saturation de l'entropie, signature d'un déterminisme sous-jacent.

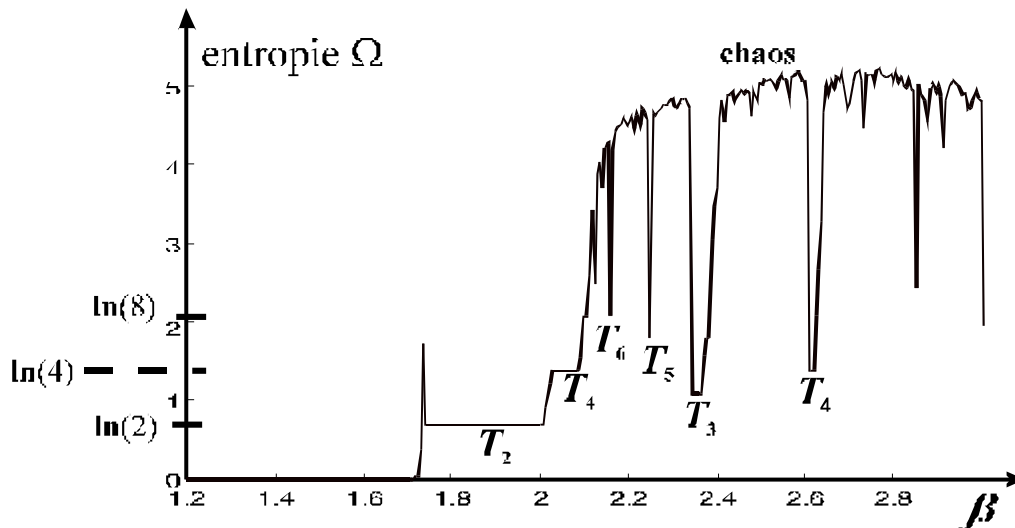


Figure IV.17 : Diagramme entropique correspondant aux conditions du diagramme de bifurcation de la figure IV.13.

Dans la partie des régimes périodiques, il est fréquent d'observer des artefacts de calcul lors des bifurcations (figure IV.17, pic entre le point fixe stable et le cycle T_2). Ceci est dû entre autre au calcul de la statistique à partir d'un nombre fini de termes. La suppression des phénomènes transitoires est également en cause, elle demande un nombre de termes calculés plus ou moins grand suivant le régime dynamique. Il est facile de comprendre qu'au voisinage des bifurcations, le système hésite à adopter un des 2 comportements dynamiques.

2. Diagramme entropique en 3 dimensions

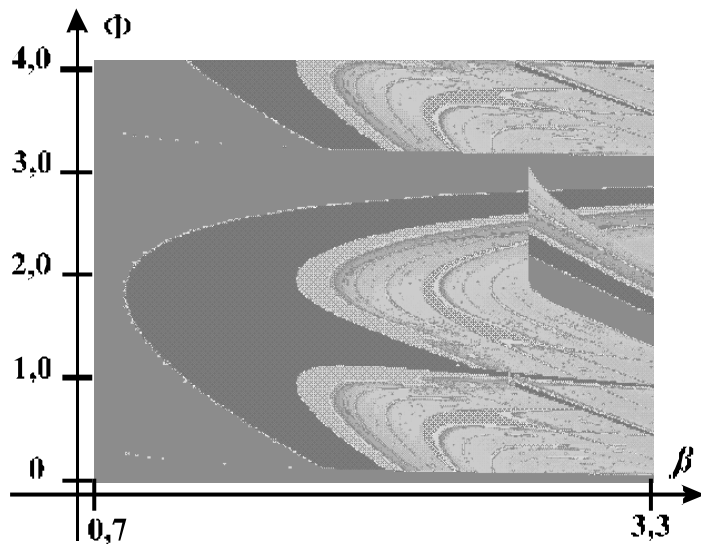


Figure IV.18 : Diagramme entropique en 3 dimensions, vue de dessus. L'échelle de couleur code l'entropie. Condition initiale $X_0=3,1$.

Le diagramme entropique permet ainsi de repérer facilement un régime chaotique complexe d'un régime périodique. Les fenêtres de périodicité apparaissent sous la forme de « vallées » (en sombre) à l'intérieur des « montagnes » (en clair) chaotiques. Une représentation en 3 dimensions devient intéressante pour identifier dans le plan (β, Φ) les zones chaotiques dans lesquelles nous chercherons à faire

fonctionner le système. Un seul graphique peut résumer la série de diagrammes de bifurcation de la figure IV.15.

Ce diagramme entropique est bien périodique en Φ , de période π . L'influence de la condition initiale n'est pas clairement illustrée ici, bien qu'elle apparaisse tout de même sous forme de discontinuités traduisant la coexistence de différents bassins d'attraction.

En observant une coupe verticale, et en faisant croître β , on commence par les régimes de point fixe. On arrive ensuite à la première frontière en forme de parabole horizontale, la bifurcation vers le cycle d'ordre 2. Cette première frontière correspond bien aux limites théoriques tracées à la figure IV.6. Lorsque Φ est proche de $0 \pmod{\pi}$ il faut de très grandes valeurs de β pour atteindre cette frontière. Ce cas correspond à une intersection proche d'un minima de NL , c'est-à-dire là où la pente est nulle. Dans le cas de coïncidence exacte avec le minimum, il faut une valeur infinie de β pour dépasser la pente 1 en ce point d'intersection critique.

En continuant d'augmenter le paramètre de bifurcation, à Φ constant mais différent des valeurs critiques $0 \pmod{\pi}$, on atteint le cycle d'ordre 4, puis 8, etc... : la cascade se rapproche du point d'accumulation β^* . On distingue ensuite les zones chaotique en clair, avec des portions discontinues plus sombres, les fenêtres de périodicité. Une bande particulière apparaît pour les fortes valeurs de β et des valeurs de Φ entre 1,9 à 3,5. Elle correspond dans les diagrammes de bifurcation à l'apparition d'une nouvelle cascade directe au voisinage d'un maximum de NL . Autrement dit, l'étirement vers le haut de la non linéarité par accroissement de β est tel, qu'un lobe supérieur de la sinusoïde devient tangent avec la droite $Y=X$, pour ensuite donner naissance à 2 points fixes, l'un à pente supérieure à 1, l'autre à pente stable, positive, et inférieure à 1.

Nous allons maintenant passer à la dernière représentation des régimes du modèle discret, celle des exposants de Lyapounov. Ces grandeurs caractéristiques d'une solution asymptotique particulière de la suite, vont nous permettre, entre autres choses, d'expliquer les artefacts qui apparaissaient au niveau des points de bifurcation sur les diagrammes entropiques.

D. Exposants de Lyapounov

1. Signification

Leur définition a été donnée au chapitre I. Ils concernent l'évolution dynamique d'un petit écart δX_n à partir d'une solution asymptotique de la suite. Si on suppose que cette évolution est gouvernée en moyenne par un comportement exponentiel, l'exposant de Lyapounov est donné par :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[\left| \frac{\delta X_{i+1}}{\delta X_i} \right| \right] \quad (IV.5)$$

ou encore, à partir de la loi dynamique $X_{n+1} = NL[X_n]$, $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[\left| NL'(X_i) \right| \right]$ (IV.6) Si

l'écart δX_n diminue au cours des itérations, la solution asymptotique considérée est stable, et l'exposant associé est négatif ; il s'agira alors d'un régime dynamique « normal », de type point fixe ou cycle stable. Si l'écart δX_n augmente au cours d'une évolution, il y aura sensibilité aux conditions initiales : l'exposant est positif, la

solution associée est considérée comme chaotique. Cette solution chaotique est stable si les termes évoluent asymptotiquement toujours sur le même intervalle.

Grâce à ce calcul, un critère binaire (exposant positif ou négatif) permet de discriminer facilement le comportement chaotique ou non du système, alors que cette discrimination à partir des diagrammes précédents était plus subjective. Le résultat du calcul ne donne pas qu'un signe, mais aussi une amplitude de l'exposant. Plus précisément, l'inverse de l'exposant est homogène à un temps, ou mathématiquement à un nombre d'itérations. L'unité physique du nombre d'itérations est en T , le retard temporel. Ce nombre est caractéristique de la durée d'évolution du système pour se stabiliser dans un régime donné. S'il est très grand, cela signifie qu'il faudra longtemps (beaucoup d'itérations) pour supprimer les transitoires, et inversement. Ce nombre est également une mesure de la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Pour un régime chaotique, plus ce nombre sera petit, plus la solution considérée sera sensible aux petits écarts.

Mais les expressions (IV.5) ou (IV.6) ont-elles une limite ? Ce n'est pas forcément le cas puisque $NL'[X]$ peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de la valeur nulle (extremum de la non linéarité), ce qui donnera une contribution infinie (logarithme) au calcul de γ . C'est pour cette raison que certains auteurs [1.3] ne qualifient pas de chaotique certaines itérations discrètes telle que celle étudiée, ou telle que l'application logistique. Le terme chaotique signifie dans ce cas qu'il est possible de trouver une limite fixe d'un exposant de Lyapounov. Nous avons laissé de côté ces discussions d'ordre plus fondamental pour nous limiter au caractère qualitatif de la sensibilité aux conditions initiales (exposant moyen positif), même si le modèle exponentiel de cette sensibilité ne convient pas en toute rigueur.

2. Principe du calcul

D'après les relations (IV.5) et (IV.6), il y a 2 façons différentes pour calculer les exposants de Lyapounov. L'une consiste à calculer l'évolution de 2 suites en parallèles, celles-ci différant légèrement dans leur condition initiale de $(X_0 - X'_0) = \delta X_0$. Les écarts ultérieurs δX_n sont calculés simplement en soustrayant les termes des 2 suites, $(X_n - X'_n)$. L'exposant de Lyapounov est obtenu en appliquant la relation (IV.5) jusqu'à une limite n subjective. Cette limite est telle que l'écart doit rester petit par rapport aux termes X_n (cas divergent de la SCI), mais il doit aussi rester grand par rapport à la précision de calcul sur chaque terme X_n (cas des régimes « normaux », exposant négatif). Le terme de départ X_0 est issu d'un calcul préliminaire visant à supprimer les transitoires après une première condition initiale arbitraire.

La seconde méthode utilise l'expression (IV.6), elle est a priori moins sensible à la propagation des erreurs d'arrondi, puisqu'un simple calcul de dérivée permet d'obtenir l'exposant de Lyapounov à partir d'une fonction analytique et à partir des termes successifs d'une seule suite :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[\beta \cdot \left| \sin \left\{ 2 \cdot (X_i + \Phi) \right\} \right| \right] \quad (IV.7)$$

Dans les 2 cas nous avons dû soumettre le calcul à des limites concernant certaines valeurs trop faibles de γ . En effet, pour ces petites valeurs, le système met beaucoup de temps à entrer dans son état stationnaire. Un calcul précis de γ dans ce cas nécessite également un grand nombre d'itérations. Nous avons évité cela en passant systématiquement à un nouveau calcul (nouveau couple (β, Φ)) dès qu'une

première valeur estimée de γ passait en dessous d'un certain seuil, en valeur absolue (temps de convergence ou de divergence très grand).

Les résultats qui vont être présentés sont qualitativement les mêmes quelle que soit la méthode employée. Le calcul de 2 suites en parallèle est plus rapide, mais un résultat précis semble plus facile à obtenir avec la 2^{ème} méthode.

3. Résultats

a. Convergence de la valeur calculée de γ

La figure IV.19 représente la valeur obtenue de γ en fonction du nombre d'itération, et pour différents régimes dynamiques. Le cas du point fixe stable semble converger rapidement, et de manière directe. Le cycle d'ordre 2 converge par alternances, selon que l'écart se situe vers l'un ou l'autre des 2 points fixes de l'itération double. Un de ces points semble attractif, l'autre semble répulsif. La résultante moyenne des 2 est attractive, de sorte que l'exposant de Lyapounov est négatif. Le cycle d'ordre 4 fait également apparaître une alternance, cette fois-ci sur 4 valeurs typiques d'évolution de l'écart.

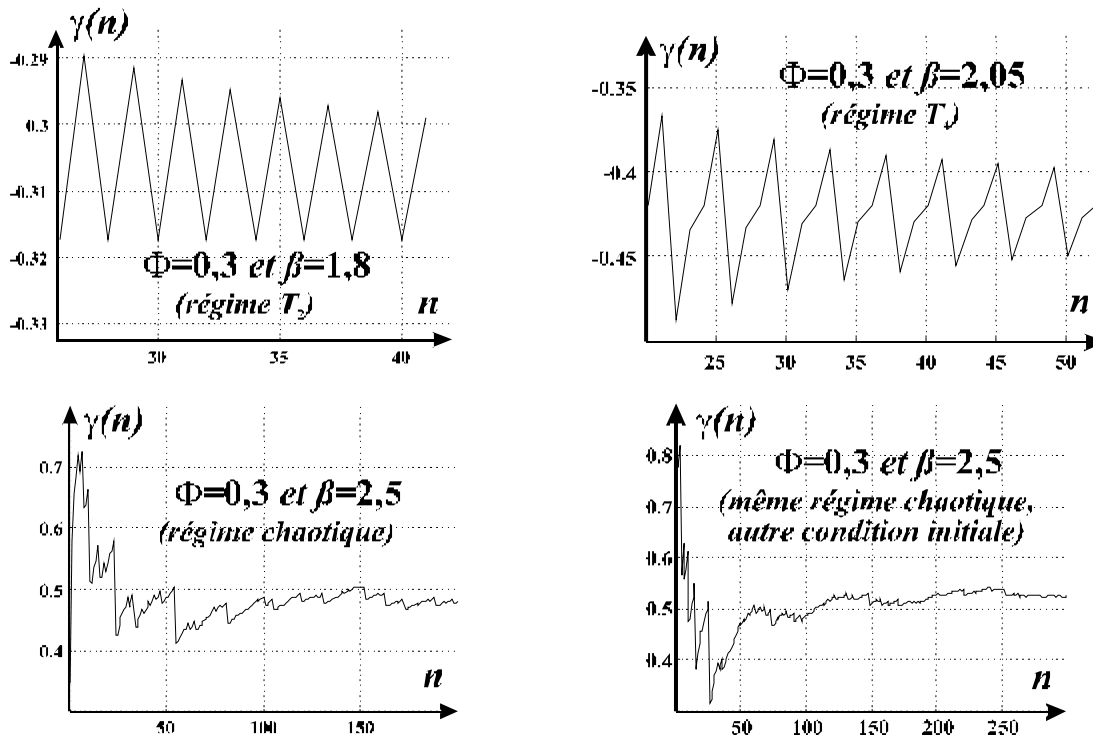


Figure IV.19 : convergence du calcul de l'exposant de Lyapounov pour différents régimes dynamiques.

En régime « chaotique », malgré les réserves formulées quant à la convergence de l'expression (IV.7), le résultat du calcul semble se stabiliser autour d'une certaine valeur. Cette stabilisation est quelquefois un peu erratique, mais les fluctuations de la valeur de γ restent faibles par rapport à sa valeur absolue. On peut donc conclure que, même si la limite n'est pas rigoureusement convergente, elle semble évoluer dans un intervalle de valeurs assez peu dispersées, de telle sorte que la notion d'exposant de Lyapounov prenne un sens.

b. Evolution de γ à Φ constant

La figure IV.20 représente le résultat du calcul de l'exposant de Lyapounov pour plusieurs valeurs du paramètre de bifurcation. Les régimes périodiques déjà repérés sur les diagrammes de bifurcation et d'entropie sont indiqués, de manière à pouvoir comparer avec les figures IV.14 et IV.17. On note que de nouveaux points remarquables en β apparaissent grâce à cette représentation. Il s'agit de maximum de stabilité, ou encore de stabilité très rapide (pic vers les « γ » négatifs) entre 2 bifurcations de la cascade directe.

Les bifurcations par dédoublement sont toujours bien mise en évidence, avec une information supplémentaire : γ tend vers 0 à l'approche d'une bifurcation, c'est-à-dire que le système, bien que stable, mais un temps très long (voire infini) à se stabiliser. On obtient ici une explication aux artefacts observés sur le diagramme entropique : le temps nécessaire à un calcul correct de l'entropie est plus important qu'ailleurs, d'où un pic erroné si on ne prend pas de précautions. Cet artefact apparaissait aussi quelques fois dans la zone du point fixe stable. Nous constatons, comme nous l'avions déjà suggéré, qu'à la transition puits / noeud de ce point fixe (sur le maximum de NL , pente nulle), la stabilité est critique. La stabilité des fenêtres de périodicité est assez faible, les valeurs correspondantes de γ étant proches de 0.

Les régimes chaotiques sont encore plus faciles à repérer sur ce type de graphe. L'amplitude de la sensibilité aux conditions initiales est toutefois faible comparée à la rapidité de convergence des régimes périodiques de la cascade directe. Elle se situe autour de 0,4 à 0,7, ce qui correspond à des temps caractéristiques en unité d'itération T de l'ordre de $1,4T$ à $2,5T$.

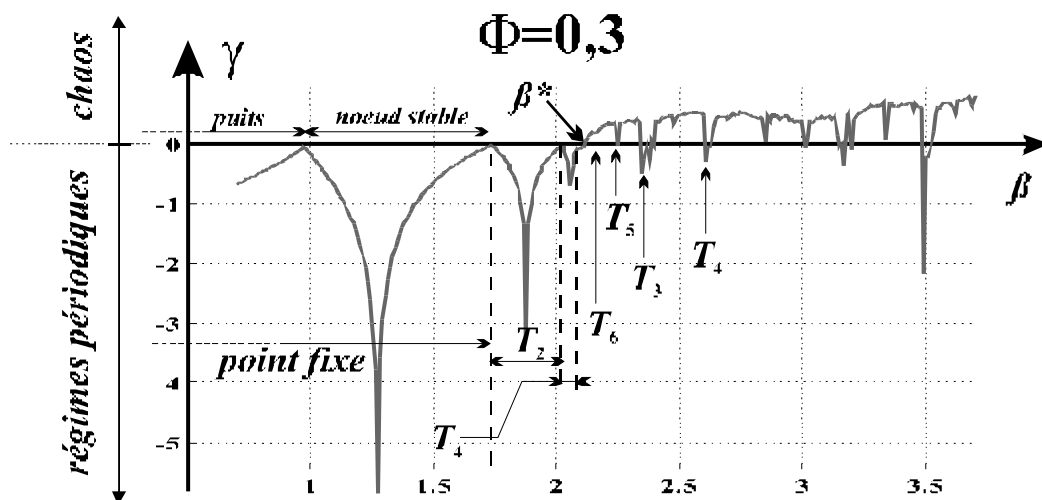


Figure IV.20 : Exposant de Lyapounov en fonction de β à $\Phi=0,3$ (à comparer avec les figures IV.14 et IV.17).

Le graphe en 3 dimensions faisant intervenir l'influence du paramètre Φ est plus intéressant à représenter en $1/\gamma$, pour concentrer la variation des échelles de couleurs (la 3^{ème} dimension) autour des faibles valeurs de la cote. On aura alors une lecture en nombre d'itérations caractéristiques de la divergence ou convergence, au lieu de l'exposant de Lyapounov.

c. Représentation de $1/\gamma$ dans le plan (β, Φ)

On remarque que ce graphe (figure IV.21) est grossièrement superposable au diagramme entropique. A nouveau on note l'allure déjà évoquée de la frontière de la première bifurcation dans le plan (β, Φ) .

Les trous isolés que l'on observe pour les faibles valeurs de β sont les passages critiques du point fixe par un maximum de la non linéarité. Ces passages n'ont lieu que pour les valeurs de Φ (et de la condition initiales) pour lesquelles il y a au départ (β faible) un point fixe à pente positive.

Les exposants de Lyapounov sont également intéressants quantitativement parce qu'ils correspondent, en régime chaotique, à une mesure de la vitesse maximum avec laquelle 2 oscillateurs chaotiques vont diverger l'un par rapport à l'autre. Si l'on cherche à synchroniser ces 2 oscillateurs, il va falloir être capable de le faire plus rapidement que cette divergence naturelle. Cette ordre de grandeur correspond à un temps caractéristique de quelques unités T .

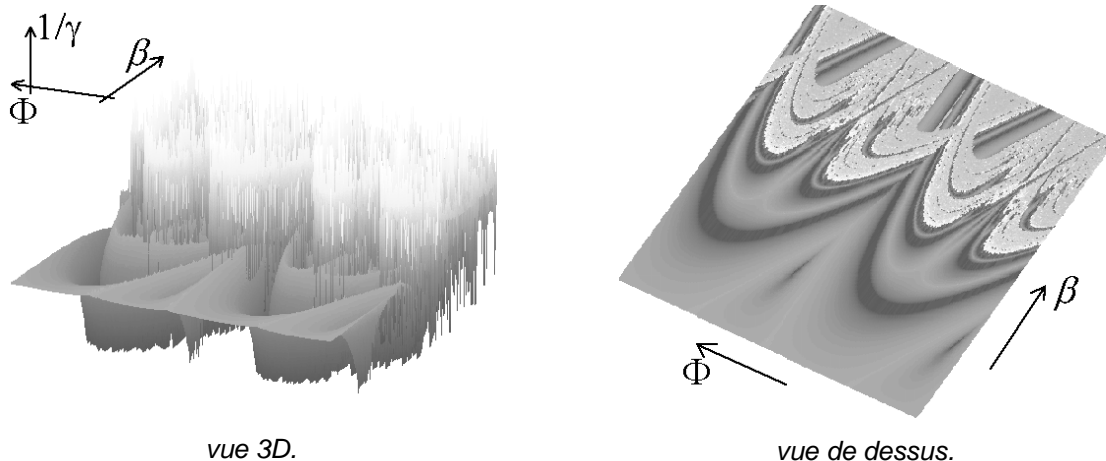


Figure IV.21 : Inverse de l'exposant de Lyapounov dans le plan (β, Φ) . A comparer avec la figure IV.18.

E. Conclusions sur le modèle discret

De nombreux calculs de caractérisation des différents régimes dynamiques ont pu être faits grâce au modèle discret. Celui-ci est relativement simple à implémenter sur des logiciels de simulation, puisqu'il revient au calcul des itérés successifs d'une suite. La facilité de manipulation par rapport au système différentiel continu est incomparable. Des grandeurs dynamiques globales telles que la statistique des points atteints, l'entropie, ou encore les exposants de Lyapounov ont pu être estimées. Ces simulations ont toutefois nécessité dans certains cas plusieurs heures de calcul (Pentium 120 Mhz).

On comprend alors aisément que la tâche équivalente pour un modèle différentiel continu est une opération autrement plus coûteuse en temps. L'itération qui permettait de trouver l'état du système à un instant T -ultérieur est remplacée par une intégration numérique dont le pas doit permettre de résoudre des durées de l'ordre du temps caractéristique τ . Celui-ci est par hypothèse au moins 10 fois plus faible que le retard, de manière à obtenir un système dynamique de grande dimension (celle-ci variant comme le rapport τ/T).

Le modèle discret nous a permis de comprendre un certain nombre de mécanismes de bifurcations du système dynamique. Par des considérations graphiques assez simples on a pu expliquer ces mécanismes. L'étude du modèle continu plus proche de la réalité va bénéficier des acquis du modèle discret. Nous allons maintenant voir de manière plus précise les limites d'équivalence entre les 2 modèles, en reprenant dans le cas continu certaines des investigations qui viennent d'être faites à partir de l'itération discrète.

II. Modèle continu

Une évolution physique « réelle » du système dynamique est représentée figure IV.22, dans le cas d'un cycle d'ordre 2. Elle a été obtenue par l'intégration numérique du modèle continu (I.1), et correspond très bien à ce qui est observé expérimentalement (voir chapitre V). Le chronogramme du modèle discret est tracé en traits discontinus clairs. Abstractions faites des transitions, les 2 calculs semblent en bon accord. Le temps de ces transitions est à l'origine d'un écart de périodicité léger mais remarquable entre les 2 modèles. Les plateaux constants ($dx/dt=0$) vérifient nécessairement la relation récursive de l'itération : $x(t) = \beta \cdot \sin^2[x(t-T) + \Phi]$. Sur une grande partie du temps, on aura effectivement,

$$X_2 = NL[X_1] = NL[NL[X_2]] \quad (IV.8)$$

$$\text{avec } X_2 = x(t) = \beta \cdot \sin^2[x(t-T) + \Phi] = NL[x(t-T)] = NL[X_1] \quad (IV.9)$$

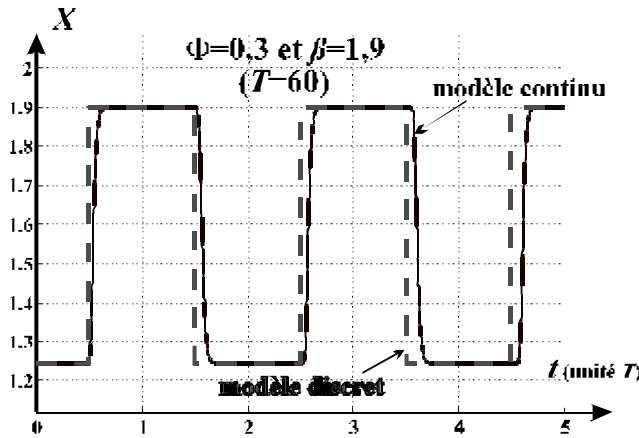


Figure IV.22 : cycle d'ordre 2

Statistiquement, une moyenne temporelle des valeurs atteintes donnera une densité de probabilité assez proche de celle obtenue dans le même régime dynamique du modèle discret. Aux instants de transition, par contre, la vitesse finie d'évolution de X_1 vers X_2 et X_2 vers X_1 , donne lieu à des densités de probabilité non nulles des « longueurs d'onde » situées entre les 2 valeurs du cycle. Sur une période du cycle, le temps passé par la variable dynamique entre X_1 et X_2 est proportionnel à τ , la constante de

temps d'évolution du système. Lorsque ce temps est négligeable par rapport à la période, la densité de probabilité des longueurs d'onde intermédiaires sera également négligeable. D'où la condition déjà évoquée pour avoir une bonne correspondance (tout au moins statistique) entre les modèles discrets et continus :

$$\tau \ll T \xrightarrow{\text{cycle d'ordre 2}} \rho(x)_{x \in]X_1, X_2[} \ll \rho(X_1) \approx \rho(X_2) \approx 1/2 \quad (IV.10)$$

On considère alors que l'approximation adiabatique est valable :

$$X_n = NL[X_{n-1}] \xrightarrow{\tau \ll T, \text{ cycle d'ordre 2}} x(t) + \frac{dx}{dt}(t) = NL[x(t-T)] \quad (IV.11)$$

Un autre point à considérer dans la comparaison des 2 modèles concerne la stabilité. Les plateaux à X_1 et X_2 étant stables, toute perturbation va s'atténuer au cours du temps, et l'oscillation sur 2 niveaux va persister. Lors d'une transition, le système traverse rapidement la séparatrice entre ces 2 valeurs, le point fixe instable entre X_1 et X_2 (voir figure IV.8). Au cours de l'évolution, une perturbation, même importante, ne va pas modifier l'oscillation à 2 niveaux tant qu'elle ne force pas la variable à traverser ce point fixe instable. Les perturbations par rapport aux niveaux stables du cycle sont d'ailleurs continûment générées lors de chaque transition, en

plus du bruit externe. Autrement dit, les niveaux d'un cycle sont stables si l'inverse de l'exposant de Lyapounov (temps caractéristique de la stabilité du régime) est suffisamment petit par rapport au temps passé sur un niveau du cycle.

Pour des régimes dynamiques plus complexes que T_2 , tels que ceux à 4 ou 8 niveaux, les points fixes instables séparateurs sont beaucoup plus proches des points stables du cycle. La sensibilité devient beaucoup plus grande par rapport à l'amplitude des perturbations, et la stabilité globale de l'évolution périodique est fortement diminuée. C'est une des raisons qui peut expliquer la difficulté d'observer expérimentalement des cycles d'ordre élevé.

Numériquement, les perturbations peuvent provenir des erreurs d'arrondi et de la précision de la méthode d'intégration. Or même lors des simulations, pour lesquelles les perturbations restent relativement faibles, il est rare d'observer des cycles d'ordre élevé. L'origine profonde de l'instabilité de ces cycles tient sans doute à un aspect théorique indépendant des imperfections expérimentales (voir la remarque plus haut concernant les perturbations générées par chaque transition).

Une autre cause d'instabilité pourrait être un effet de résonance entre les niveaux n et $(n-1)$ du cycle. En effet, pour certains des cycles stables observés (T_2 , T_4 ou T_8 au plus), la transition entre 2 niveaux successifs du cycle donne lieu à un rebond. Ce type de rebond est habituellement observé pour des dynamiques linéaires d'ordre supérieur à 1 (au moins une dérivée seconde du temps dans l'équation différentielle), ils traduisent un retour de phase constructif d'une des variables dynamique : il y a oscillation, amortie si le système est suffisamment dissipatif. Notre système dynamique est du 1^{er} ordre, mais il est non linéaire, et à retard. Comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre II, ce retard est susceptible de donner lieu à déphasage de retour constructif, et peut permettre de satisfaire une condition de phase nécessaire à l'oscillation. On comprend alors que la combinaison de la non linéarité et du retard important par rapport à la constante de temps puissent entraîner un effet de résonance, d'où les rebonds observés. Des investigations expérimentales simples peuvent être entreprises pour vérifier cette hypothèse : en changeant la valeur du rapport T/τ , les rebonds doivent apparaître ou disparaître selon que la condition de phase est remplie ou non.

Nous venons de voir qu'une différence notable apparaît entre les modèles discret et continu dès que le régime dynamique devient trop complexe (au delà de T_4 , dans la cascade directe). Le modèle continu semble donc indispensable si l'on cherche à étudier quantitativement le comportement réel de notre oscillateur pour les dynamiques complexes, donc surtout en régime chaotique.

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus par simulation numérique du modèle continu, principalement au travers de représentations graphiques déjà utilisées pour le modèle discret (dans le cas où le rapport τ/T du système physique continu reste suffisamment petit). Ceci nous permettra de mieux estimer les principales différences entre les 2 modèles. Notons que les simulations par intégration pas à pas sont de gros consommateurs de temps de calcul. Ce temps important nous a fait défaut pour aboutir à une caractérisation aussi « complète » que celle, plus simple et plus rapide, faite à partir du modèle discret. Des travaux ultérieurs seront nécessaires pour finir cette étude du modèle continu, notamment en ce qui concerne le calcul de la dimension des attracteurs et des exposants de Lyapounov.

Une brève présentation des résultats déjà obtenus sera faite. Nous essaierons ensuite de discuter les méthodes d'intégration que nous avons employées, puis nous verrons quelques résultats de simulation concernant quelques simulations du système complet de codage et de décodage.

A. Diagrammes de bifurcation

Le diagramme de bifurcation nous permet à nouveau de résumer en termes statistiques les différents régimes de fonctionnement. Alors que le modèle discret possède dans notre cas précis une répartition statistique discontinue (figure IV.13), le modèle différentiel présente une statistique relativement continue sur tout l'intervalle des longueurs d'onde atteintes $[X_1, X_2]$ (inversement, d'autres modèles différentiels peuvent présenter une distribution de probabilité discontinue). La figure IV.23 représente l'analogue de la statistique du modèle discret de la figure IV.13, avec laquelle on remarque le peu de ressemblance, mise à part le domaine de variation de la variable dynamique.

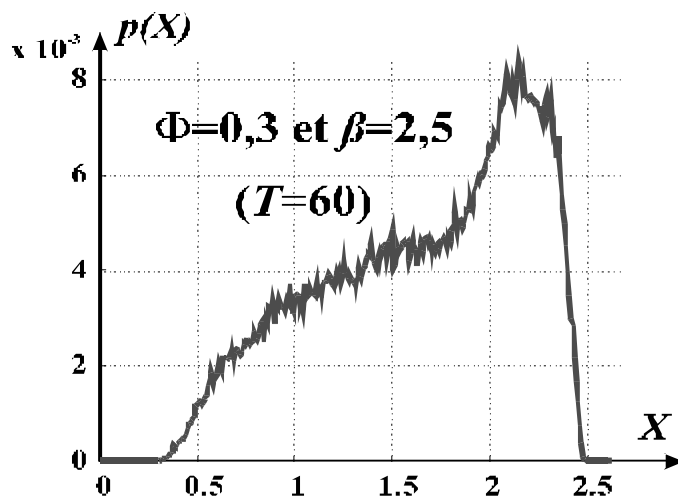


Figure IV.23 : Statistique du modèle continu, à comparer avec la statistique du modèle discret de la figure IV.13.

Les valeurs prise dans cet exemple correspondent à un régime chaotique entièrement développé, dont l'évolution sur la non linéarité s'effectue sur un lobe supérieur. Des valeurs plus importantes de β donnent lieu, comme dans le cas discret, à une évolution sur plusieurs lobes de la non linéarité. Des études [II.11] ont montré que la statistique tend alors vers une distribution gaussienne. Pour des raisons expérimentales développées plus loin (chapitre V), ce régime de fonctionnement n'a pas été accessible. Un tel régime serait pourtant intéressant dans le

cadre de notre application puisqu'il correspond statistiquement à une répartition encore plus aléatoire, c'est-à-dire à un comportement dynamique encore plus proche d'un bruit non déterministe (masquage très efficace). Des progrès technologiques sur la plage d'accord des sources laser (augmentation de la plage d'accord), ou des modifications de caractéristique de la non linéarité (faible intervalle spectral libre) permettront peut-être de travailler dans un régime dynamique offrant une répartition statistique très proche d'une gaussienne.

1. Principe du calcul

Le paramètre β est balayé par pas suffisamment fins (environ $N=300$ valeurs entre 0,7 et 3,5), à Φ constant. Pour chaque valeur de β , on effectue un calcul de suppression de transitoire sur une durée de $50 T$. L'ensemble des valeurs accessibles par la variable dynamique X est préalablement partitionné en cellules de taille δX , un compteur n_i étant attaché à chacun de ces N intervalles élémentaires $[X_i, X_{i+1}=X_i+\delta X]$. Au cours du calcul d'intégration de la loi différentielle, un compteur est incrémenté à chaque fois qu'un échantillon tombe dans l'intervalle correspondant. Lorsqu'une des cellules atteint un total de 1500 visites environ, la

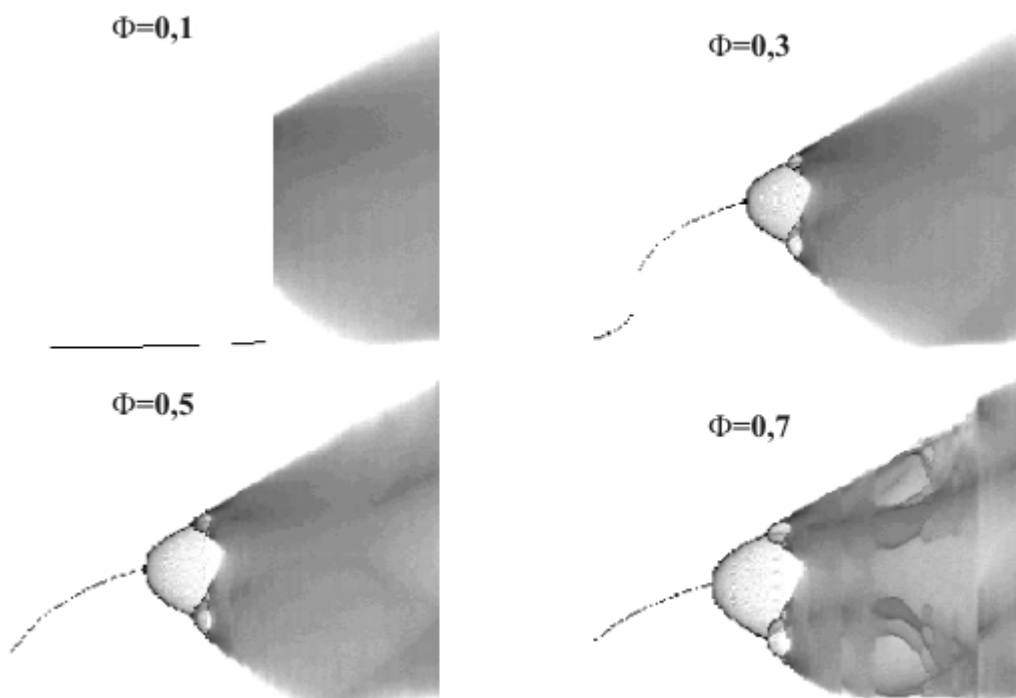
statistique est considérée comme établie. Les valeurs des compteurs sont normalisées par rapport au nombre total N_e d'échantillons de manière à obtenir une densité de probabilité en chaque point X_i : $\rho(X_i, \beta) = \frac{n_i}{N_e \cdot \delta X}$.

β est ensuite incrémenté, et le même type de calcul reprend. Une nappe dans un espace à 3 dimensions est finalement obtenue, la cote (codé en niveaux de gris) représentant la densité de probabilité dans le plan $(\beta, [X_m, X_M])$. L'entropie peut alors être facilement calculée à partir de cette nappe pour donner un graphe monovalué dans le plan (β, Ω) . La répartition des dégradés de gris selon la densité de probabilité a été transformée de manière logarithmique pour avoir une visualisation plus contrastée des reliefs. L'amplitude réelle de la probabilité peut être estimée d'après de la figure IV.23, où l'on observe des centièmes en régime chaotique, alors qu'un régime de point fixe stable correspond à l'unité.

Le calcul d'un diagramme de bifurcation par cette méthode nécessite près de 10 heures alors que quelques minutes suffisent pour le modèle discret. La méthode d'intégration numérique utilisée ici est la plus simple, et surtout la plus rapide ; il s'agit de la méthode d'Euler. Elle est faite par étapes de durée $T=60$ (ce qui correspond approximativement au cas expérimental), chaque étape effectuant le calcul de 300 échantillons (faible sur-échantillonnage). L'unité de temps est en constante de temps τ , comme cela apparaît dans la loi différentielle (1.1) normalisée où τ a été supprimé. Une brève discussion des différentes méthodes est faite à la partie D ci-dessous.

2. Résultats

Nous avons effectué une série de calculs de diagrammes de bifurcation (figure IV.24) pour des conditions paramétriques analogues à celles des diagrammes de la figure IV.15 représentant les résultats du modèle discret. Le paramètre Φ a été incrémenté entre chaque diagramme de 0,2 radian, sur un intervalle couvrant la périodicité théorique en Φ des régimes dynamiques.



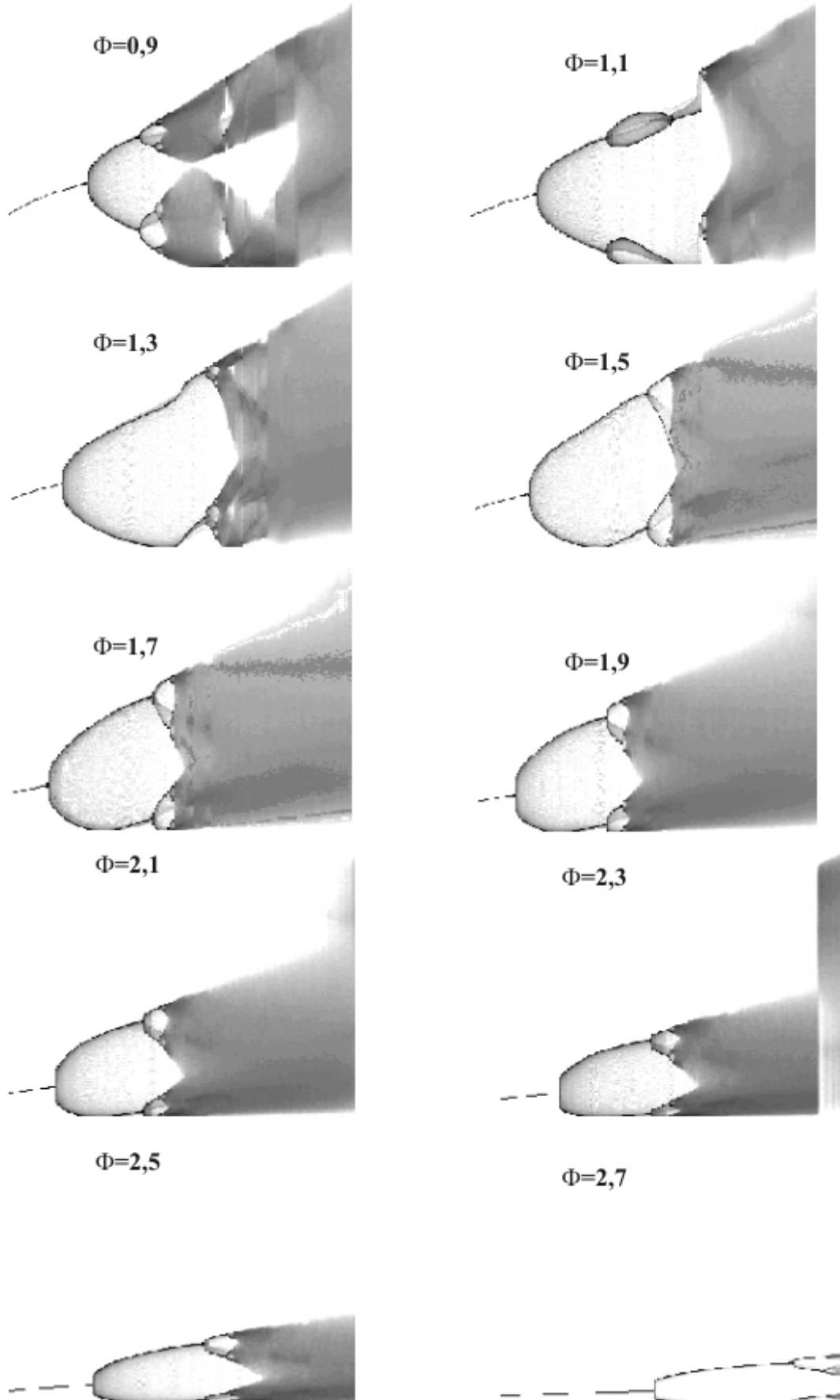


Figure IV.24 : Diagrammes de bifurcation dans le cas d'une description continue de la dynamique, à comparer avec les résultats du modèle discret de la figure IV.15.

3. Discussion

L'enveloppe des diagrammes est très bien conservée par rapport au résultat discret, tant en régime périodique simple qu'en régime chaotique. Le domaine de variation de la variable dynamique, ainsi que son évolution avec β , est donc bien décrit par le modèle discret. Les mêmes phénomènes de glissement des branches périodiques s'observent pour les valeurs de β et Φ . Les sauts de domaine de variation (bassin d'attraction) se produisent également comme dans le cas discret.

Par contre, la structure fine du diagramme est très différente. Comme nous l'avons déjà remarqué, même en régime périodique, les valeurs atteintes forment nécessairement un ensemble continu. En régime chaotique la différence se fait encore plus ressentir. Les fenêtres de périodicité n'apparaissent ni sous la même forme, ni pour les mêmes valeurs de β . La figure IV.25 représente un chronogramme de régime pseudo-périodique complexe de la partie chaotique du diagramme. Cet exemple est qualifié de pseudo-périodique car il possède une structure à la fois périodique et chaotique.

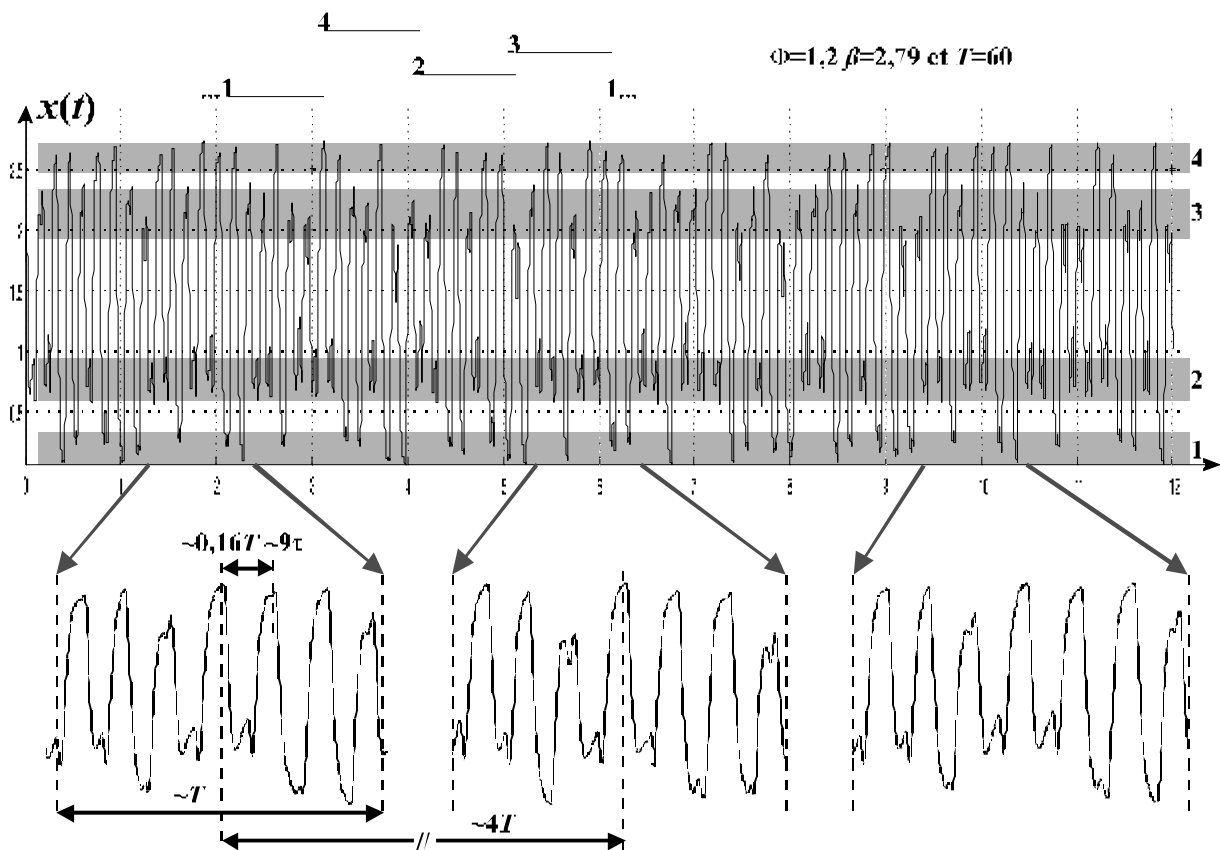


Figure IV.25 : Chronogramme d'un régime périodique dans la zone chaotique du système continu.

Le signal complet est composé de plusieurs périodes très différentes. Une demi période courte de $0,08T$ correspond à un motif de base d'amplitude plus ou moins grande. Chacune de ces amplitudes appartient nécessairement à un des 4 intervalles indiqués en sombre sur le chronogramme supérieur de la figure IV.25. Ces amplitudes ne se répètent pas de manière rigoureusement périodique, mais leur regroupement en 4 zones fait penser à un régime dynamique chaotique en T_4 . En observant les amplitudes séparées d'une durée T , on remarque que l'ordre de leur succession dans les 4 intervalles est régulier (1-4-2-3), ce qui confirme la structure

d'un régime chaotique en T_4 . Toutefois, avec plus de recul, on retrouve une périodicité approchée sur une durée plus grande, de l'ordre de $4T$. Ceci est mis en évidence sur 3 agrandissements à la partie inférieure de la figure IV.25, où l'on a représenté une structure (2-4-2-4-1-3-2-4-2-4-1-4-1-3) qui se répète tous les $4T$. La « phrase » complète de la structure périodique est : (2-4-2-4-1-3-2-4-2-4-1-4-1-3-2-3-2-4-1-3-2-3-2-4-2-4-1-3-1-3-2-4-1-3-1-3-2-3-2-4-1-4-1-3-2-4-1-4-1-3-1-3), soit 52 ($\sim 4/0,08$) motifs de la demi-période de base.

Cet exemple très particulier ne représente qu'une des nombreuses configurations possibles de régimes dynamiques. Il illustre également l'ordre intérieur caché dans tout régime chaotique, c'est-à-dire son déterminisme, même s'il ne s'agit pas ici d'un fonctionnement purement périodique. Des études fondamentales plus poussées sont sûrement très intéressantes pour expliquer correctement l'origine physique de ces cycles particuliers en fonction des valeurs des différents paramètres Φ , β , et T/τ .

D'un point de vue pratique, ce régime n'est pas assez complexe pour l'application de masquage que l'on cherche à effectuer. Expérimentalement, un spectre de raies a été relevé. Une information cachée dans ce spectre est alors susceptible d'être récupérée, simplement par filtrage. Il s'agira donc d'éviter que le système puisse s'accrocher sur un tel mode d'oscillation. C'est dans ce sens qu'il est utile de dresser un cartographie paramétrique des régimes dynamiques pour choisir une plage de fonctionnement où le système possède un comportement suffisamment complexe.

En observant la structure des diagrammes du modèle continu, il va être possible de dégager des critères de choix des valeurs de Φ et β . Pour des valeurs de β assez importantes, il semble peu probable d'avoir un fonctionnement périodique. Le chaos semble être un régime dynamique stable (structure forte de l'attracteur chaotique) sans risque de dérive vers un régime périodique ou pseudo-périodique dont le spectre serait inefficace pour effectuer du masquage. Le paramètre Φ doit être tel que le diagramme de bifurcation correspondant, présente une importante fenêtre chaotique, toujours de manière à ne pas risquer un accrochage du générateur de chaos sur un régime périodique.

Un choix de paramètres moyennement restrictif ($\beta > 3$ et Φ relativement quelconque), semble permettre un régime chaotique convenable. Le calcul systématique pour des valeurs plus élevées de β n'a pas été fait, mais la littérature [I.10] [II.11] ne reporte pas de régime périodique pour les fortes valeurs du paramètre de bifurcation. Les valeurs élevées de ce paramètre seront en fait limitées expérimentalement (plage d'accord continu en longueur d'onde). D'autres critères sont encore éventuellement à développer pour améliorer, par exemple, la qualité du décodage.

B. Entropie

Les diagrammes entropiques confirment la comparaison entre modèles discret et continu qui vient d'être faite grâce aux diagrammes de bifurcation. La figure IV.26 donne un exemple variation d'entropie pour le modèle continu.

On remarque que l'entropie du modèle continu sature également à une valeur autour de 5-6, ce qui est caractéristique d'une structure cachée déterministe (différentiation d'un système purement aléatoire). Les accrochages sur un mode d'oscillation pseudo-périodique se repère facilement sur ce diagramme par de légers « trous » dans la partie de saturation (à $\beta \sim 2,75$ sur la figure

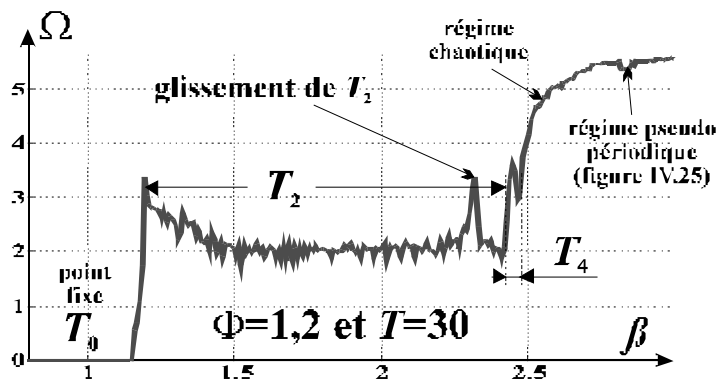


Figure IV.26 : Exemple de variation d'entropie avec β dans le cas du modèle continu.

IV.26).

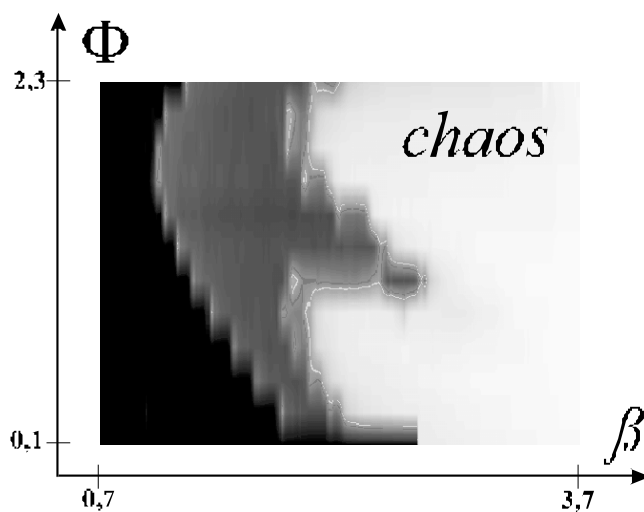


Figure IV.27 : Entropie $\Omega(\beta, \Phi)$ du modèle continu (II.25) ; du noir (point fixe stable) jusqu'au blanc (chaos).

La figure IV.27 représente la variation d'entropie dans le plan (β, Φ) , en 3 dimensions. Il s'agit d'un résumé des diagrammes de bifurcation de la figure IV.24, avec un maillage grossier en Φ . Un maillage plus fin demanderait des temps de calcul beaucoup plus importants. Le diagramme en vue de dessus nous permet de repérer les zones importantes de régime chaotique, à partir desquelles on choisira le domaine de fonctionnement en (β, Φ) .

C. Dimension et exposants de Lyapounov

1. Problèmes rencontrés et principes

Nous n'avons hélas pas eu le temps d'étudier plus en détail ces notions sur notre modèle. Bien que plus abstraites, elles sont utiles dans le sens où elles permettent de quantifier la complexité du système pour un régime dynamique donné. Cette complexité n'a pratiquement été qu'estimée de manière très subjective en fonction de l'« allure » temporelle et spectrale de l'évolution, en fonction de la répartition statistique observée sur un diagramme de bifurcation, ou encore par rapport à la valeur de l'entropie.

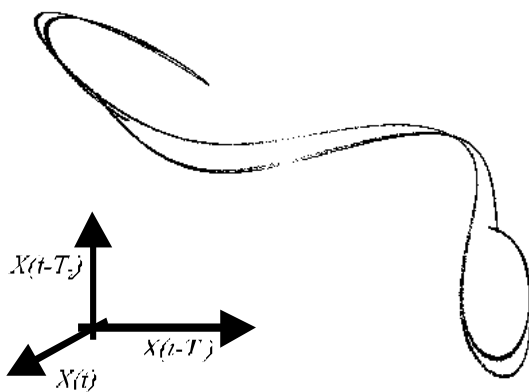
Le problème le plus délicat que nous avons rencontré, a été la mise en oeuvre et la maîtrise, pour un néophyte du chaos, des techniques de calculs. Les principes de calcul permettant d'obtenir les valeurs de la dimension et des exposants de Lyapounov ont été présentés dans le chapitre I. Ils utilisent la représentation de la trajectoire dans un espace des phases virtuels à plusieurs dimensions, à partir de la donnée d'échantillons successifs du signal chaotique (méthode des retards).

Dans un premier temps il faut calculer la trajectoire par intégration numérique pas à pas, puis on en extrait certaines valeurs, les échantillons de base, qui permettent de construire les vecteurs de base de l'espace virtuel. Ces vecteurs seront soit étudiés par la manière dont ils remplissent l'espace des phases (dimension), soit dans la façon avec laquelle ils divergent les uns des autres (exposants de Lyapounov).

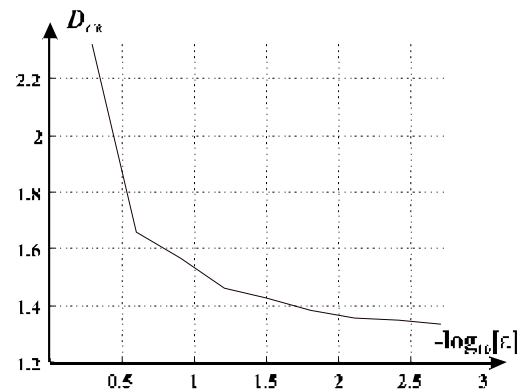
2. Calcul de dimension pour un régime faiblement chaotique

La méthode numérique a été testée dans un premier temps sur un régime dynamique faiblement chaotique, de manière à pouvoir vérifier visuellement la cohérence des résultats dans un espace en 3 dimensions. Les valeurs choisies ($T=3$, $\beta=2,5$ et $\Phi=0,3$) de paramètres ne correspondent donc pas du tout à celles de l'expérience, les régimes faiblement chaotique étant difficile à obtenir si T est important.

La trajectoire reconstituée dans un espace des phases à 3 dimensions est obtenue à partir de la trajectoire réelle unidimensionnelle et à partir de la donnée de 3 retards temporels, T , T_1 et T_2 suffisamment grands devant le pas d'échantillonnage de la série temporelle. Au cours du calcul de la trajectoire réelle, on ne retient que des échantillons séparés de T auxquels on associe à chaque fois un vecteur dont les composantes sont la valeur de l'échantillon, et 2 de ses valeurs à des instants T_1 et T_2 -antérieurs. La coupe de Poincaré de la trajectoire virtuelle a permis de ramener l'observation à un plan, ce qui permet de ne garder qu'une section d'une structure effective plus complexe en 3 dimensions. Le résultat est représenté à la figure IV.28. Cette structure continue apparaît progressivement au cours du calcul, point par point, 2 points successifs étant toujours assez éloignés sur la forme globale ; celle-ci constitue l'attracteur étrange dans l'espace des phases virtuel reconstitué.



IV.28.1 : espace des phases en coupe.



IV.28.2 : dimension en fonction de l'extension de la cellule de recouvrement de l'espace des phases

Figure IV.28 : Coupe de l'espace des phases virtuel, et calcul de dimension.

Bien que les points apparaissent de manière décorrélés dans le plan de coupe, ils construisent petit à petit une structure bien définie, trace du déterminisme caché dans la trajectoire chaotique. On pourrait remarquer en grossissant une portion de cet attracteur qu'il est constitué de feuillets imbriqués. C'est cette structure en feuillet qui effectue un remplissage dense du plan de coupe, plus dense qu'une forme unidimensionnelle. Le partage du plan de coupe en cellules de plus en plus petites permet de calculer la capacité de remplissage de l'attracteur dans la section, conformément au principe décrit au chapitre I (dimension de capacité de

Kolmogorov, expression (I.7)). Le résultat de ce calcul est représenté à la figure IV.28.2, il donne une dimension de 1,3 dans le plan de coupe, donc une dimension de 2,3 dans l'espace des phases complet.

La précision de la détermination de cette dimension dépend bien sûr de la précision avec laquelle on est capable de calculer la trajectoire réelle uni-dimensionnelle par intégration pas à pas de l'équation différentielle aux différences.

Un calcul analogue mais appliqué aux conditions de l'expérience doit être entrepris à l'avenir. Compte tenu du temps nécessaire à une telle opération, le résultat est encore tributaire de l'amélioration de la technique de calcul. Des comparaisons pourront être faites avec les résultats déjà publiés de [I.10]. (tableau I.15). Des dimensions de plusieurs dizaines sont attendues.

3. Calcul des exposants de Lyapounov

Ce type d'étude est d'ordre plus fondamental comme la recherche de la dimension. L'exploitation expérimentale exacte de ces grandeurs physiques reste encore à développer. Certains calculs ont été entamés, mais ils n'ont pas encore donné lieu pour l'instant à des résultats stables. Une technique de renormalisation de l'écart à une trajectoire de référence (voir chapitre I) a été utilisée, mais elle demande à être encore mieux maîtrisée.

Des résultats très approximatifs décrivant la sensibilité aux conditions initiales sont reportés plus bas à la partie E. Ils permettent de rendre compte d'un ordre de grandeur de l'exposant de Lyapounov le plus important, en calculant l'évolution sur une trajectoire d'un petit écart. On comprend alors que la croissance exponentielle de cet écart va être principalement due à la contribution de l'exposant le plus fort. Mais pour avoir accès à l'ensemble du spectre (discret) des exposants de Lyapounov, il est nécessaire de faire une description vectorielle et non plus seulement scalaire de la dynamique. Il est possible alors de définir clairement des directions contractante (exposant négatifs) ou dilatante (SCI, exposants positifs) d'un espace des phases virtuellement reconstitué. La représentation scalaire uni-dimensionnelle de l'équation différentielle de départ est insuffisante pour rendre compte de tout le spectre. La dynamique explicite doit alors être intégrée et être remplacée par une série temporelle vectorielle, sans équation différentielle.

Quels que soient les résultats obtenus par simulation, ceux-ci doivent être considérés avec beaucoup de précautions. Les simulations consistent à calculer des prévisions d'évolution sur systèmes déterministes, qui précisément, ne sont pas prévisibles au delà d'un certain terme. Toute interprétation de résultat est alors très délicate, et elle demande en général une confirmation expérimentale. Le fonctionnement pratique de l'oscillateur chaotique a donné des résultats (voir chapitre V) en général en bon accord avec ce que les simulations ont décrit. Cette cohérence expérience-théorie nous a encouragé à tester numériquement les principes de codage et décodage bien avant la réalisation complète du système de transmission codée, malgré l'incertitude concernant la fiabilité des simulations.

D. Simulation du codage

Les principes exposés au chapitre III ont été directement traduits en terme d'équations différentielles, une pour l'émetteur, l'autre pour le récepteur. Celle du

récepteur fait bien sûr intervenir le signal issu de l'émetteur. La simulation a consisté à intégrer numériquement ces 2 systèmes, et à représenter les résultats en fonction des écarts de paramètres entre récepteur et émetteur. Le succès du décodage tient en grande partie à la capacité à dupliquer un système dynamique le plus fidèlement possible. Le but de ces simulations est donc de déterminer dans quel intervalle de tolérances le décodage peut être suffisamment efficace.

1. Technique par asservissement

a. Rappel du principe

L'information à coder est ajoutée au niveau du courant de commande de la longueur d'onde. Le système différentiel décrivant l'évolution de l'émetteur peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) + \frac{dx}{dt}(t) = NL_{\beta_e, \Phi_e} [y(t-T)] \quad (IV.12)$$

$$y(t) = x(t) + s(t)$$

où $s(t)$ est le signal informatif, dont l'amplitude est supposée faible par rapport à celle de $x(t)$ (masquage) : il s'agit d'une légère perturbation de la trajectoire chaotique naturelle sans ajout d'information ; si $s(t)=0$, on retrouve bien l'équation différentielle de l'oscillateur chaotique seul. La simulation utilise pour $s(t)$ un signal sinusoïdal d'amplitude et de fréquence réglable.

$$s(t) = S \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \quad (IV.13)$$

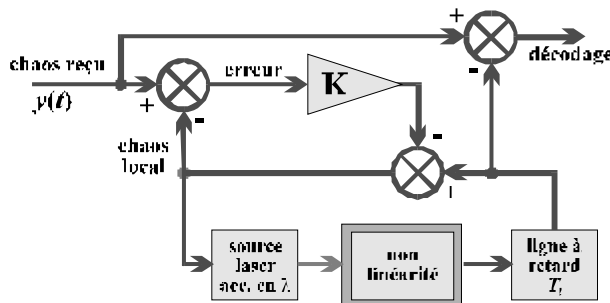


Figure IV.29 : Schéma bloc de la synchronisation par asservissement.

La figure IV.29 représente le schéma de synchronisation adopté. On y retrouve le signal reçu $y(t)$ comprenant l'information, le signal issu du passe bas $w(t)$ et la commande de la longueur d'onde du récepteur $z(t)$. Le système d'asservissement amplifie par un gain K l'erreur entre $z(t)$ et $y(t)$. Le décodage $s_r(t)$ est obtenu en soustrayant le signal chaotique reçu $y(t)$ comprenant l'information, et le signal chaotique généré localement $w(t)$. L'oscillateur de

réception est un système différentiel analogue à celui de l'émission, avec en plus l'asservissement.

L'ensemble peut être résumé en équations de la façon suivante :

$$w(t) + \frac{dw}{dt}(t) = NL_{\beta_r, \Phi_r} [z(t-T)] \quad (IV.14)$$

$$z(t) = \frac{w(t) + K \cdot y(t)}{1 + K}$$

$$s_r(t) = y(t) - w(t)$$

Ces équations sont discrétisées, les dérivées étant remplacées selon le schéma de la méthode d'Euler (voir partie E). On observe ensuite le résultat de l'intégration numérique en fonction des différents paramètres.

b. Synchronisation

La synchronisation seule a d'abord été recherchée en l'absence d'information à coder ($S=0$), pour différentes valeurs de gain K allant de 0 à des fortes valeurs. La figure IV.30 représente les chronogrammes des chaos d'émission et de réception correspondant à différentes condition de gain et de paramètres. On constate que même pour les faibles valeurs de K , le récepteur se synchronise correctement sur l'émetteur.

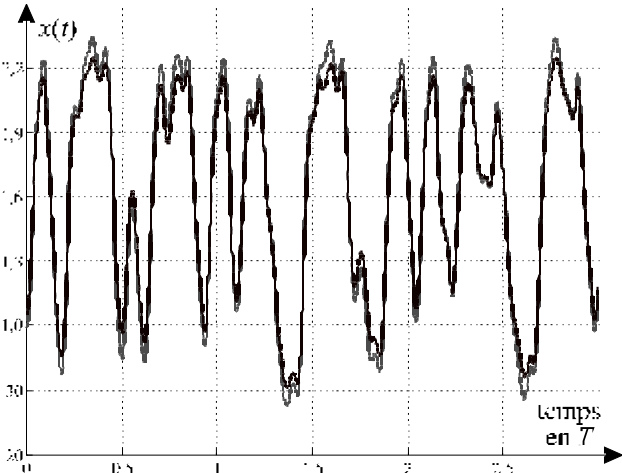


Figure IV.30 : Oscillations chaotiques synchrones de l'émetteur et du récepteur ($K=0,5$ et $\Phi=0,3$, $\beta=2,5$ ($\Delta\beta/\beta=2\%$), sans signal informatif.

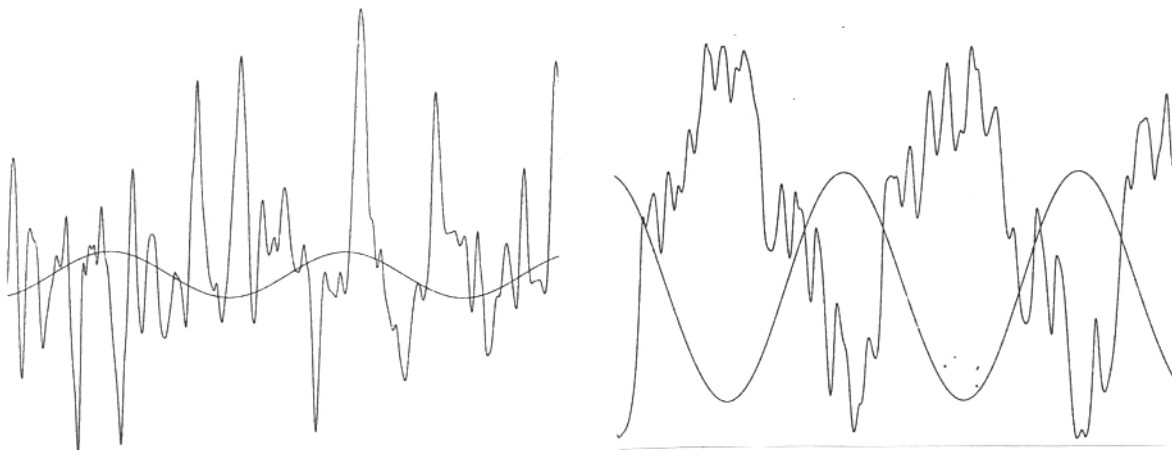
En présence de différences de paramètres (β, Φ) entre l'émetteur et le récepteur, la synchronisation semble être relativement robuste, mais la limite d'accrochage en fonction du gain K est plus élevée. Des petits écarts entre les 2 chaos subsistent, même pour des gains très importants.

c. Décodage

Alors que le décodage est parfait si les paramètres sont rigoureusement égaux, un écart même de quelques pourcents, suffit à détériorer de manière très sensible la qualité du signal restitué, indépendamment de l'importance du gain de l'asservissement (figure IV.31).

La possibilité de décoder le message est donc très sensible aux écarts de paramètres (β, Φ). Cet aspect est un gage de bonne confidentialité, mais peut être aussi un problème critique de réalisation expérimentale du décodage.

Les meilleurs résultats de décodage par simulation ayant été obtenus à chaque fois avec de fortes valeurs de K , le principe utilisé pour cette opération s'est orienté vers le calcul non autonome de dynamique non linéaire.



IV.31.1 : $K=0,5$

IV.31.2 : $K=5$

Figure IV.31 : Résultat du décodage par asservissement ($\beta=2,5$ $\Phi=0,3$).

2. Technique par calcul non autonome de dynamique non linéaire

a. Rappel du principe

La modélisation est encore plus simple que précédemment, l'émetteur étant toujours décrit par le système différentiel (IV.12), et le récepteur agissant comme un calculateur de dynamique non linéaire intégrant le signal de réception $y(t)$:

$$w(t) + \frac{dw}{dt}(t) = NL_{\beta, \Phi} [y(t-T)] \quad (IV.15)$$

Le décodage s'obtient en soustrayant le résultat du calcul non linéaire $w(t)$ et le signal reçu $y(t)$:

$$s_r(t) = y(t) - w(t) \quad (IV.16)$$

Comme précédemment, les équations d'évolution sont intégrées numériquement.

b. Bruit de décodage

Lorsque $S=0$, on peut calculer la valeur quadratique moyenne de l'écart entre $w(t)$ et $y(t)$, en fonction des écarts en pourcent $\Delta\Phi$ et $\Delta\beta$. Compte tenu des remarques faites en fin de chapitre III (relation (III.14)), il est intéressant d'exprimer le rapport entre le bruit de décodage (l'erreur entre les chaos $\langle (y-w)^2 \rangle$) et le bruit de masquage (le chaos $\langle y^2 \rangle$) en dB. Le bruit de décodage est calculé sans information. Pratiquement, il est obtenu en intégrant l'équation différentielle d'évolution de $e(t)=y(t)-w(t)$ en fonction de $w(t)$, $\Delta\Phi$, et $\Delta\beta$. Cette équation est obtenue symboliquement en soustrayant les lois d'évolution de $y(t)$ et $w(t)$:

$$e(t) + \frac{de}{dt}(t) = \left(\frac{\partial NL}{\partial \beta} \right)_{\beta, \Phi} [y(t-T)] \cdot \Delta\beta + \left(\frac{\partial NL}{\partial \Phi} \right)_{\beta, \Phi} [y(t-T)] \cdot \Delta\Phi$$

soit pour $NL[y] = \beta \cdot \sin^2(y + \Phi)$, et après simplification, avec $\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \beta \cdot \Delta\Phi}{\Delta\beta}$:

$$e(t) + \frac{de}{dt}(t) = \frac{\Delta\beta}{2} - \beta \cdot \Delta\Phi \cdot \cos(2 \cdot [y(t-T) + \Phi + \alpha]) \quad (IV.16)$$

La figure IV.32 représente les isoclines du rapport [Bruit/Masquage] dans le plan $(\Delta\Phi, \Delta\beta)$. Cette figure peut ensuite servir à choisir le niveau optimal du signal $s(t)$ à noyer dans le chaos pour obtenir d'une part un masquage suffisant, et d'autre part une qualité de décodage également suffisante. Ce niveau de signal informatif dépend de la précision expérimentale avec laquelle on peut ajuster les paramètres β et Φ .

Toutes les simulations qui viennent d'être présentées supposent que les grandeurs calculées ne diffèrent qualitativement pas trop du comportement réel, malgré les

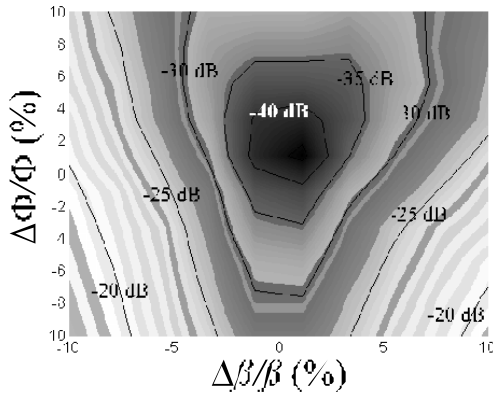


Figure IV.32 : Rapport Bruit/Masquage en dB dans le plan
($\Delta\Phi, \Delta\beta$). $\Phi=0,3$ et $\beta=2,8$

erreurs d'intégration numérique. La discussion de ces problèmes appartient à un cadre très vaste, qui dépasse largement nos propos. Nous allons maintenant exposer les techniques simples utilisées pour les calculs d'intégration.

E. Méthodes d'intégration numérique : discussion

1. Euler

C'est la méthode la plus simple, elle a été le plus souvent utilisée pour sa rapidité d'exécution, car elle demande relativement peu d'opérations de calcul. Elle consiste à remplacer dans l'équation différentielle continue la dérivée première par :

$$\frac{dx}{dt}(t) \rightarrow \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (IV.17)$$

Connaissant les échantillons antérieurs sur une durée $T=n \cdot h$ ($x(0), x(h), x(2 \cdot h), \dots, x(n \cdot h)$), le calcul d'un nouvel échantillon $x[(n+1) \cdot h]$, s'effectue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(n \cdot h) &= \beta \cdot \sin^2 [x(n \cdot h - T) + \Phi] = \beta \cdot \sin^2 [x(0) + \Phi] \\ x[(n+1) \cdot h] &= h \cdot \frac{dx}{dt}(n \cdot h) + x(n \cdot h) \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Un pas constant a été employé. L'erreur d'intégration est de l'ordre du pas d'échantillonnage h , celui-ci devra donc être pris suffisamment petit. Un tableau tampon permet de mémoriser les $n(=T/h)$ derniers échantillons, celui-ci servant au calcul du tableau tampon suivant, et ainsi de suite.

2. Runge-Kutta

Cet algorithme est très utilisé pour réaliser des intégrations numériques. Il a le principal avantage d'avoir une précision en h^3 . Il nécessite par contre plus de calculs, donc plus de temps. Certaines versions de cette méthode proposent une technique à pas variable pour optimiser le nombre d'échantillons en gardant une erreur d'intégration constante. Cette variante diminue le nombre d'échantillons calculés, mais elle demande plus d'estimations pour réaliser l'optimisation. Deux versions ont été utilisées, l'une a été implantée dans le langage de simulation (MATLAB) à partir des expressions du calcul à pas constant, l'autre provient d'un exemple déjà programmé à pas variable.

Le principe de calcul d'un nouvel échantillon avec une méthode de Runge-Kutta à pas constant se fait à l'aide de l'expression suivante :

$$x[(n+1) \cdot h] = x(n \cdot h) + \frac{h}{6} \cdot [NL\{x(0)\} - x(n \cdot h) + 4 \cdot \{NL\{x(1)\} + NL\{x_{1/2}(0)\} - x_{1/2}(n \cdot h) - x_1(n \cdot h)\}] \quad (IV.19)$$

Les valeurs indexées de x sont obtenues à partir des interpolations simples (indice 1/2) ou double (indice 1) au premier ordre de la variable dynamique entre 2 échantillons :

$$\begin{aligned} x_{1/2}(n \cdot h) &= x(n \cdot h) + \frac{h}{2} \cdot [NL\{x_{1/2}(0)\} - x'_{1/2}(n \cdot h)] \\ x_1(n \cdot h) &= x(n \cdot h) + h \cdot [NL\{x_{1/2}(0)\} - x_{1/2}(n \cdot h)] \end{aligned} \quad (IV.20)$$

La valeur particulière $x_{1/2}(1)$ n'est pas disponible dans la tableau tampon, elle est donc obtenue par moyennage entre les valeurs $x(0)$ et $x(1)$. Quant à la valeur intermédiaire $x'_{1/2}(1)$, elle est issue d'un premier calcul de Taylor à l'ordre 1 à la date $n \cdot h$:

$$\begin{aligned} x'_{1/2}(n \cdot h) &= x(n \cdot h) + \frac{h}{2} \cdot [NL(0) - x(n \cdot h)] \\ x_{1/2}(0) &= \frac{x(0) + x(1)}{2} \end{aligned} \quad (IV.21)$$

Tout en restant relativement simple, cette méthode à pas constant nécessite 3 à 4 fois plus de calculs que la méthode d'Euler. Les méthodes à pas variable sont encore plus lentes. Le problème est en fait de savoir si le gain en précision est nécessaire par rapport à la perte en temps. C'est ce que nous avons voulu faire en comparant les résultats des 2 méthodes appliquées à notre système dynamique.

3. Comparaison

Notre approche a consisté à observer la divergence naturelle d'une évolution en régime chaotique. L'intégration commence par la donnée de conditions initiales, préalablement calculées pour correspondre à une trajectoire chaotique exempte de phénomènes transitoires. Pratiquement, cette portion de trajectoire chaotique (condition initiale sur une durée T) a été obtenue après un calcul « suffisamment long » (suppression des transitoires), et « suffisamment précis » (méthode de Runge-Kutta avec 3 000 échantillons par T , ou méthode d'Euler avec 50 000 échantillons par T).

Deux calculs sont ensuite lancés avec les mêmes paramètres, la même méthode d'intégration et le même pas d'intégration. Seule la condition initiale est légèrement modifiée entre les 2 calculs, l'une correspond à la portion de trajectoire de durée T , l'autre est la somme de cette trajectoire et d'une « marche » très petite (10^{-6} environ pour $\beta=2,3$) jouant le rôle de perturbation. On observe alors l'évolution de l'écart entre les 2 calculs indépendants, ceci pour différents pas d'intégration, et pour chacune des 2 méthodes d'intégration.

L'erreur initiale augmente en régime chaotique à cause de la sensibilité aux conditions initiales. Le calcul est arrêté lorsque l'écart n'est plus assez petit (quelques %) devant l'amplitude de la variable intégrée. On extrait de ce calcul la vitesse de croissance de l'écart dans le cas d'un modèle exponentiel (modèle \exp

($\gamma.t$), on mesure γ par unité T , pour chaque méthode d'intégration et pour chaque échantillonnage).

Malgré la différence de précision des 2 méthodes, nous constatons que les propriétés de divergence d'un écart sont presque les mêmes, c'est-à-dire que les solutions de l'intégration convergent raisonnablement quelle que soit la méthode.

Un critère particulièrement important dans notre application concerne le temps de calcul nécessaire. Certains résultats de simulation constituent un résumé d'un régime dynamique particulier, ils demandent l'observation de ce régime sur une durée significative correspondant en générale à plusieurs centaine d'unité T . Le facteur temps doit donc être très sérieusement pris en compte dans le choix de la méthode d'intégration. La figure IV.33 représente des résultats de simulation sur chacun desquels est indiqué le temps de calcul nécessaire pour une évolution élémentaire de durée T .

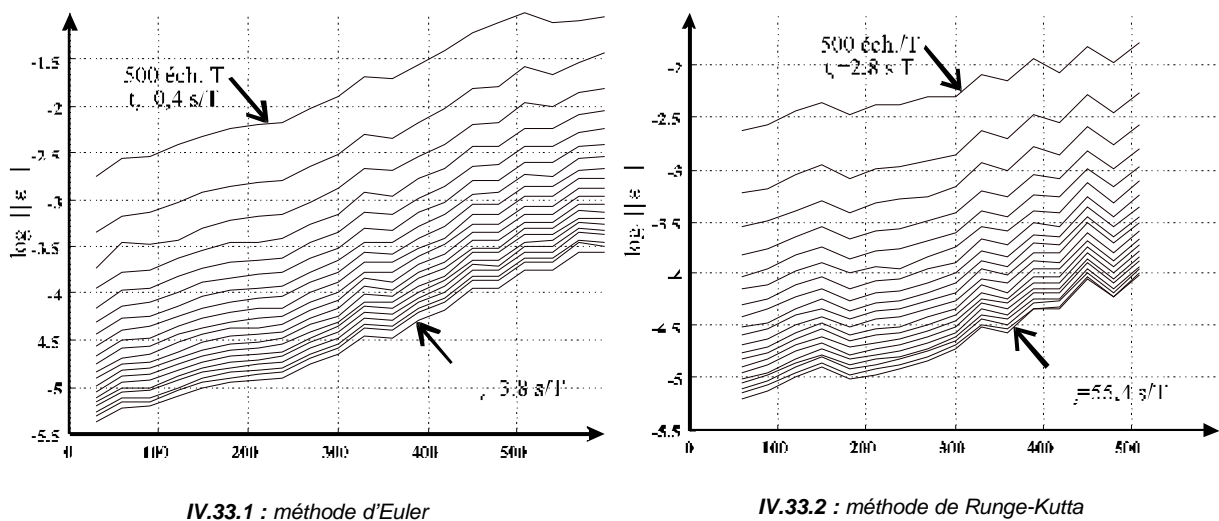


Figure IV.33 : Evolution d'une erreur lors de l'intégration numérique, et temps de calcul par durée T , pour une trajectoire chaotique ($\Phi=0,3 \beta=2,3$).

L'avantage de rapidité de la méthode d'Euler apparaît nettement sur la figure IV.33.

4. Conclusion

On a observé qu'un gain de temps appréciable peut être obtenu grâce à l'utilisation de la méthode d'Euler, sans donner lieu à des différences exagérées de propriétés dynamiques par rapport à la méthode précise de Runge-Kutta. Les mesures de sensibilité aux conditions initiales de chaque méthode sont assez voisines. Les propriétés dynamiques d'une trajectoire intégrée numériquement dépendent apparemment peu de l'une ou l'autre des méthodes.

C'est donc la méthode très simple d'Euler qui a été le plus souvent utilisée, en particulier pour la plupart des résultats nécessitant un grand nombre de calculs, tels que les diagrammes de bifurcation ou les diagrammes entropiques. La méthode de Runge-Kutta a tout de même été utilisée, à chaque fois que le résultat ne demandait pas l'intégration de la dynamique sur une trop grande échelle de temps. Ces résultats ponctuels plus précis ont permis de vérifier en certains points la cohérence des résultats globaux obtenus par Euler.

Un argument mathématique permet également de justifier « partiellement » le choix préférentiel d'Euler. La littérature d'analyse numérique reporte que les 2 méthodes convergent correctement vers la même solution lorsque la dérivée première est raisonnablement bornée. D'après la loi dynamique, cette dérivée s'exprime par :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \beta \cdot \sin^2[x(t-T) + \Phi] - x(t) \quad (IV.22)$$

La variable dynamique $x(t)$ évoluant sur un ensemble borné par 0 et β , on en déduit que la dérivée première est également bornée par 0 et β . Ceci n'est bien sûr qu'un argument et non une preuve, mais les résultats de simulation semblent bien montrer que la méthode d'Euler, bien que moins précise, suffit à traduire les mêmes propriétés dynamiques que lors d'une intégration par Runge-Kutta.

Il reste encore à montrer que le système dynamique à échantillonnage fini possède les mêmes propriétés dynamiques que le système expérimental. Ce problème se rapproche d'un autre très fondamental, celui concernant la démonstration informatique, au sens mathématique, du caractère chaotique d'un système dynamique. Un théorème (Shil'nikov) énonce en une douzaine de page les critères qu'une dynamique non linéaire doit vérifier pour être considérée comme un système chaotique [III.10]. Ces aspects théoriques dépassent largement le cadre de nos compétences. Nous avons retenu qu'il convient d'être extrêmement prudent quant à l'utilisation des simulations informatiques dans le calcul des dynamiques chaotiques. Les résultats que l'on peut en tirer sont en général d'ordre qualitatif, voire simplement indicatif.

Nous avons eu heureusement la chance d'employer d'autres moyens d'investigation que la simulation numérique : une réalisation expérimentale. Les résultats qu'elle a fournis ont souvent confirmé, voire quelques fois anticipé, les « indications » données par les simulations. Ces résultats sont l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE V : RESULTATS EXPERIMENTAUX

La première phase du travail expérimental a consisté en la réalisation d'un générateur de chaos en longueur d'onde, et en l'obtention des différents régimes dynamiques prévus par le modèle théorique d'Ikeda. Chronologiquement, ce travail a d'abord été réalisé à partir de diodes lasers accordables DFB (Distributed FeedBack) multi-électrodes, les seules initialement disponibles au laboratoire. Ces sources accordables relativement récentes sont encore en phase de développement (encore très peu commercialisées), et leurs caractéristiques sont, comme nous le verrons, loin d'être optimales. Cette première génération de sources accordables a été utilisée jusqu'à ce que nous puissions disposer d'un autre type de source, des diodes lasers multi-électrodes DBR (Distributed Bragg Reflector), développées au CNET Bagnex [V.19-22]. Les DFB ont permis de mettre en oeuvre un premier système de codage, dont les capacités, principalement en termes de rapidité, étaient très médiocres, compte tenu des possibilités de ces sources accordables. L'installation des sources DBR a été faite en essayant de réutiliser au mieux les autres fonctions nécessaires à l'ensemble du système de transmission, pour des raisons de gain de temps dans la mise en oeuvre. Ces éléments périphériques avaient été prévus pour une gamme de fonctionnement dynamique très modeste, mais largement meilleure par rapport à celle des sources DFB. Le cahier des charges a été par conséquent limité à un essai de codage dans un spectre signal audio. La transposition à un domaine de fréquences plus adapté aux télécoms repose en principe uniquement sur les capacités dynamiques d'accord de la source. Les autres fonctions intervenant dans le système de transmission sont bien connues. Leur réalisation dans une gamme dynamique télécom ne pose aucun problème technologique de principe.

Dans un premiers temps nous détaillerons le générateur de chaos, l'ensemble clé qui permet d'obtenir le signal de masquage de l'information à coder. Ce sera l'occasion d'évoquer les caractéristiques de chaque élément séparé, et de montrer leur influence par rapport au modèle simplifié utilisé dans les simulations. Les écarts des composants par rapport à leurs propriétés espérées seront mis en évidence. Le fonctionnement de l'oscillateur dans ses différents régimes dynamiques sera ensuite exposé en essayant d'estimer le degré de concordance avec les résultats de simulation.

Dans une seconde partie nous décrirons les résultats récents de codage/décodage, obtenus en appliquant les principes exposés en fin du chapitre III.

I. L'oscillateur chaotique

Le principe que nous voulons utiliser pour coder l'information est simple : il s'agit de générer un signal d'aspect aléatoire, ou plus concrètement, dont le spectre possède un niveau important et constant dans toute la bande de fréquence où peut se trouver le signal informatif. Ce dernier se trouvera codé s'il est noyé dans ce « bruit » chaotique. La réalisation de l'oscillateur chaotique est donc la clé de la fonction de codage. Il s'agit ensuite de pouvoir décoder en exploitant le déterminisme du signal chaotique. Pour cela il faut être capable de contrôler au mieux tous les éléments à l'origine de ce déterminisme, c'est-à-dire les composants entrant en jeu dans la boucle d'oscillation (chapitre II).

A. Caractérisation des éléments séparés

1. Diodes lasers

a. DFB 2 électrodes

α . Description générale

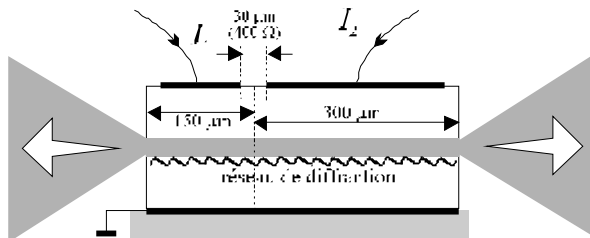


Figure V.1 : Exemple d'une DFB multi-électrode [V.1]

Ces diodes développées par Thomson pour le CNET sont constituées de deux sections longitudinales isolées électroniquement, comprenant 2 anodes distinctes et une cathode commune (figure V.1). Un réseau est inscrit au dessus ou en dessous de la section active. Selon la puce

utilisée, les 2 courants de commande ont des actions variables, à la fois sur la puissance optique de sortie et sur la longueur d'onde. Il n'est pas vraiment possible de dire qu'une électrode commande la puissance, et l'autre la longueur d'onde. L'une comme l'autre ont une influence significative, et quantitativement variable d'une puce à l'autre, sur ces deux grandeurs (P_0, λ).

Les fiches de caractéristiques fournies avec les diodes ne précisent pas la fonction de chaque électrode, mais indiquent dans un tableau à 2 entrées les longueurs d'onde correspondant à différentes paires de courants (I_1, I_2). Ce tableau précise également le niveau du deuxième mode le plus important, s'il est en dessous ou au dessus de -20dB. Ce critère correspond au Side Mode Suppression Ration (SMSR) habituellement utilisé pour caractériser la monomodicité d'une puce laser. Un des problèmes des DFB utilisées est précisément le comportement monomode. Pour disposer d'un seul pic laser, au moins un des deux courants de commande doit être inférieur à 15 mA environ, sinon le fonctionnement est multimode. Cette remarque prend toute son importance quand on considère la faible sensibilité d'accord de la longueur d'onde (au mieux 2 GHz/mA, soit 0,16 Å/mA). En effet, on se rend compte qu'il faut alors moduler sur plusieurs dizaines de mA pour accéder à toute la plage en longueur d'onde nécessaire au régime chaotique. La seule solution (pour rester au dessus du seuil laser) est donc de garder un courant d'électrode faible et constant pour avoir un comportement monomode, et de moduler la longueur d'onde sur l'autre électrode à partir d'un courant moyen de 50 mA environ. Le choix de l'une ou l'autre électrode dépend de la caractéristique de chaque puce.

D'une manière générale, le fonctionnement des DFB multi-électrodes est très complexe, et nous renvoyons à d'autres références pour plus de détails ([V.2-V.6], [V.21]). Nous nous bornerons dans la suite à la description des comportements observés sur les DFB dont nous disposons ; nous ne nous fournirons que des explications succinctes des phénomènes physiques à l'origine, les détails sortant du cadre de ce travail.

β . Accordabilité

Les plages sans saut de mode ont des tailles relativement irrégulières, de 0,1 à 1 nm, il est donc possible, mais délicat, de trouver une plage assez grande capable de contenir au moins une périodicité de la non linéarité (2 Å environ). La figure V.2 représente la caractéristique en trois dimensions de l'ensemble (diode+non linéarité), c'est-à-dire la réponse spectrale du filtre biréfringent lorsque le courant d'accord est modulé. Ce relevé est une vérification du comportement monomode de la source sur toute la plage de longueur d'onde choisie.

La figure V.3 est un tracé en 2 dimensions de la même représentation, projetée selon l'axe de la longueur d'onde. On y voit mieux un effet indésirable lié au couplage entre la condition de phase et la condition de gain de l'effet laser lors de l'accord de la longueur d'onde. Pratiquement l'intensité optique dépend de la longueur d'onde choisie, les pertes dans la cavité laser étant modulées en même temps que la sélectivité spectrale du DFB.

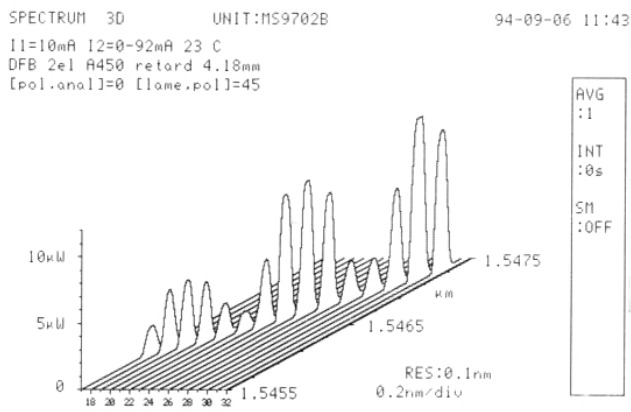


Figure V.2 : Spectre optique pour différents courants de commande de l'ensemble diode laser DFB et filtre biréfringent.

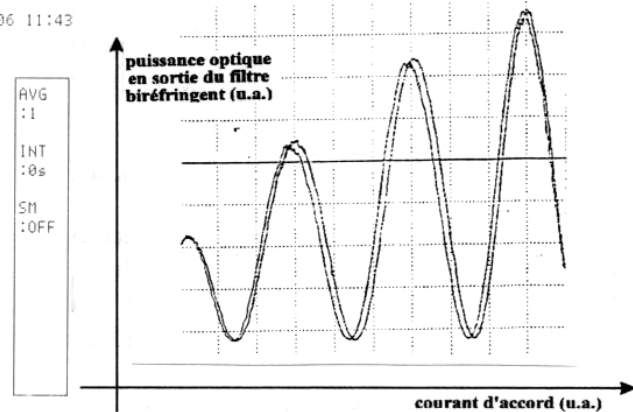


Figure V.3 : Réponse puissance optique/courant de commande de l'ensemble diode laser DFB et filtre biréfringent

Cette représentation de l'ensemble (diode+non linéarité) indique qu'une modification simple dans la modélisation peut permettre de considérer la diode parfaite, et de reporter la modulation de puissance optique sur la caractéristique de la non linéarité : l'enveloppe de la cannelure devient croissante avec la longueur d'onde (cas du laser DFB utilisé).

La figure V.3 révèle aussi un des problèmes les plus importants rencontrés avec les diodes DFB, la rapidité d'accord. Elle se traduit sur cette figure par un traînage (dédoublage) de la réponse en longueur d'onde entre la commande croissante et décroissante du courant. Deux processus physiques sont à l'origine du phénomène d'accord [V.2-V.6], qui est obtenu par un déplacement de la sélectivité spectrale du réseau de diffraction de la structure DFB. Le maximum de diffraction du réseau définit la longueur d'onde laser prédominante. Le réseau inscrit dans la zone active voit en fait son indice moyen modulé lors du passage d'un courant dans la zone active. L'indice dépend alors d'une part de la densité de porteurs libres (électrons et trous), et d'autre part de la température de la zone active, celle-ci étant modifiée par effet Joule lors du passage du même courant de commande. Le courant d'une électrode peut ainsi modifier la longueur d'onde oscillant dans le laser semi-conducteur, et ceci avec une rapidité dépendant du processus physique à l'origine

de la modulation d'indice. La dynamique du processus par densité de porteurs est limitée par la durée de vie de ces porteurs (de quelques ps à la ns) dans la jonction semi conductrice. La dynamique thermique de l'effet Joule est bien sûr plus lente, elle est définie par des phénomènes de diffusion de Fourier dans le volume microscopique du semi-conducteur, en contact thermique avec une embase métallique (cathode commune). Le volume étant très petit, la dynamique est loin d'être aussi lente que les transports thermiques classiques. C'est ainsi que l'on explique la persistance du processus thermique jusqu'à des fréquences de modulation du courant de plusieurs centaines de kilohertz. En terme d'efficacité de modulation d'indice, c'est le processus thermique qui l'emporte d'un facteur 2 à 3 dans les DFB que nous avons utilisées.

Notons qu'un asservissement de température a bien évidemment été mis en oeuvre pour s'affranchir des fluctuations lentes de l'environnement thermique (précision au moins au $1/10^6$ de degré). Un tel asservissement agit pratiquement sur l'embase et le support mécanique macroscopique de la puce laser. Un élément Peltier est bien sûr incapable de corriger les fluctuations thermiques de la jonction de la diode, il permet seulement d'agir sur son environnement macroscopique en faisant de l'embase une source froide à température constante sur des échelles de temps de l'ordre de quelques secondes.

Ces mécanismes physiques à l'origine du phénomène de l'accordabilité vont maintenant être illustrés par le relevé expérimental de la dynamique d'accord.

β . Réponse dynamique

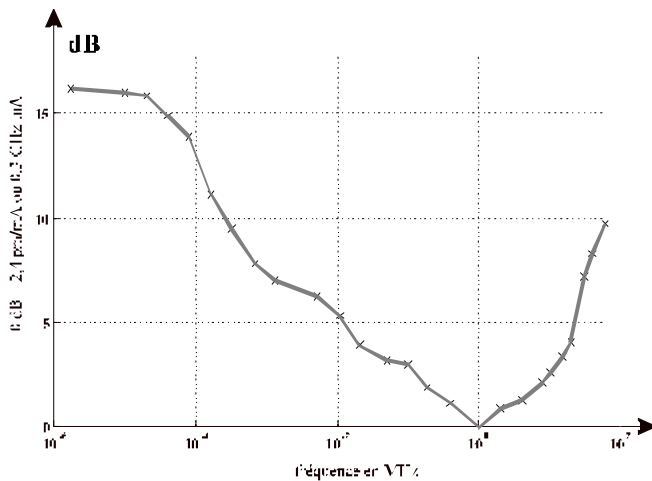


Figure V.4 : Réponse en fréquence de l'accord en longueur d'onde (DFB).

Nous avons considéré la commande d'accord comme une superposition de 2 effets, l'un rapide dû à la densité de porteurs, et l'autre plus lent dû à l'effet Joule apparaissant lors du transport de ces porteurs. Cette lenteur est en fait relative, puisque les temps de transport de chaleur sont liés à la taille de la masse thermique, très petite dans notre cas. La figure V.4 représente une mesure du diagramme de Bode de la sensibilité d'accord.

L'allure de cette courbe peut s'interpréter de la façon suivante :

- à très basse fréquence, les deux effets sont en phase, ou gardent un déphasage constant. La sensibilité reste donc constante sur cette plage de fréquence (quelques 100 Hz environ).

- ensuite commence un « traînage » thermique. L'accord par effet Joule diminue en efficacité (ou amplitude) et se déphase par rapport à l'action des porteurs. L'accord par densité de porteurs reste le même qu'en basse fréquence. La sensibilité globale

d'accord (thermique+porteurs) décroît puisqu'elle perd progressivement l'action thermique, cette dernière pouvant même s'opposer à l'action des porteurs (déphasage désavantageux, interférences destructives des 2 phénomènes d'accord).

- la compétition entre accord thermique et accord par porteurs conduit alors à un minimum vers 10 MHz. L'action thermique devient négligeable en amplitude par rapport à celle des porteurs libres qui n'a pas diminué. L'augmentation de la sensibilité globale provient alors soit d'une action constructive du reste de l'effet thermique (en phase avec l'action des porteurs), soit d'un phénomène de résonance de la réponse dynamique des porteurs libres dans la jonction. L'augmentation de la sensibilité globale se poursuit jusque vers 100 MHz environ.

- au delà de 100 MHz, le reste de la courbe n'a pu être tracé correctement pour des problèmes relatifs à l'adaptation du montage aux hautes fréquences. On peut supposer que la sensibilité se stabilise alors à la valeur correspondant au seul effet des porteurs, l'effet thermique étant complètement moyenné, donc négligeable à ces fréquences. Ce plateau à 100 MHz peut aussi correspondre à l'inverse de la durée de vie des porteurs (fréquence de résonance), auquel cas la sensibilité a atteint un maximum ; elle décroît ensuite, a priori à la manière d'un 2^{ème} ordre (-40 dB par décade).

Même si les valeurs typiques correspondent plus ou moins aux exemples reportés dans la littérature, la forme générale de la dynamique d'accord se retrouve dans nos mesures. Les valeurs des fréquences caractéristiques sont directement liées à la conception de la puce, il serait possible de les retrouver à partir des données de la structure de ces puces. Ces lasers DFB ont en fait surtout été conçus pour effectuer une modulation de puissance sur différentes longueurs d'onde [V.7] [V.8], la rapidité de commutation entre deux longueurs d'onde étant un aspect secondaire. La structure de ces puces n'est sans doute pas adaptée à l'utilisation en accordabilité continue.

γ. Conclusion

Dans ces conditions, la réalisation expérimentale d'un système de codage en longueur d'onde pour les télécommunications revêt un caractère de pure faisabilité. L'utilisation industrielle de cette méthode dépend des développements futurs de sources rapidement accordables. Certaines astuces de commande peuvent être imaginées pour améliorer sensiblement la rapidité de l'accord de ces DFB, par exemple un système de capteur de longueur d'onde et d'asservissement de cette variable, en tirant profit de l'action rapide des densités de porteurs en haute fréquence, et en conservant l'accord par effet thermique pour les basses fréquences.

Nous reportons le lecteur à la littérature pour plus de détails sur les problèmes de rapidité de modulation en longueur d'onde [V.1-V.10, V.19-V.22]. Les composants performants sont assez récents, et possèdent des structures DFB plus complexes, telles que celles des sources DBR qui vont maintenant être décrites. Les puces encore plus récentes possèdent au moins 3 sections dont les caractéristiques (niveau de dopage, géométrie) sont très précises, de manière à obtenir une

accordabilité très rapide, très sensible, et permettant d'accéder à de grandes plages de longueur d'onde.

b. DBR 2 sections, 2 électrodes

α. Description générale

Le principe de l'accordabilité des diodes DBR multi-électrodes se base sur une meilleure séparation des fonctions d'amplification optique et de sélectivité spectrale. Au lieu d'avoir réseau distribué sous la zone de gain, la puce DBR (figure V.6) possède une section active amplificatrice large bande comme pour les lasers Fabry-Pérot, un premier miroir constitué par l'interface air-cristal semiconducteur, et un second miroir (la section de Bragg) hautement sélectif en longueur d'onde. Ce réseau de Bragg est optiquement passif, mais son pic de sélectivité spectrale est modulé par le courant d'accord I_{DBR} .

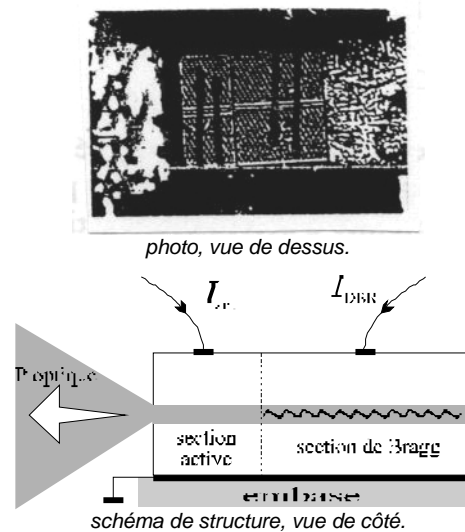


Figure V.5 : Laser DBR multi-électrode utilisé.

Le courant de la zone de gain permet ainsi d'ajuster ou de moduler la puissance optique sans trop affecter les propriétés de sélectivité spectrale dans la cavité du laser semi-conducteur, ces dernières étant définies principalement par la section de Bragg. La réciproque n'est pas rigoureusement vérifiée, à cause de la modulation des pertes qui accompagne la modulation de la sélectivité spectrale du miroir de Bragg. Le courant DBR agit à la fois sur la condition de phase des modes d'oscillation laser, mais également sur les pertes de la cavité. Lors de la modulation, le maximum de réflectivité du réseau ne conserve pas la même valeur. Ceci entraîne une modulation AM (ou IM, en puissance optique) en même temps que la modulation FM (en fréquence optique, ou longueur d'onde). Pratiquement, la puissance optique des diodes utilisées diminue quand le courant d'accord DBR augmente, alors que la longueur d'onde diminue dans le même temps.

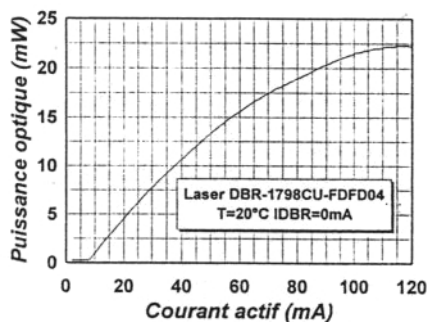
Des plages continues de 1,5 nm sont pratiquement accessibles ; l'amplitude d'accord est définie par l'intervalle spectral libre des modes de cavité. Pour l'ensemble des valeurs admissibles de courant DBR (0-30 mA), la réponse en longueur d'onde est une succession discontinue de plages continues. Des sauts de modes séparent les plages d'accord continu. La totalité de la plage d'accord avec sauts de mode s'étale sur une dizaine de nanomètres. La sensibilité {courant DBR / longueur d'onde} est nettement améliorée comparativement aux DFB (10 fois supérieure environ). Ceci contribue à diminuer l'influence d'un éventuel effet thermique car l'amplitude du courant d'accord pour une même variation de longueur d'onde est 10 fois plus faible que pour le DFB ; l'effet Joule consécutif ($R.i^2$) est comparativement 100 fois plus petit.

Le diagramme de Bode mesuré de l'accordabilité de ces DBR présente une réponse plate jusque vers 50 MHz environ. La fréquence correspondant à l'inverse de la durée de vie des porteurs (limitation physique liée à l'émission spontanée) dans la

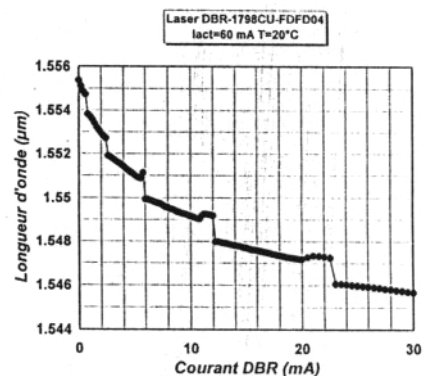
zone d'accord est en fait de quelques 100 MHz. La valeur inférieure mesurée est sûrement due à des défauts d'adaptation de notre chaîne de mesure aux hyperfréquences (longueur et qualité des connections entre autres). Dans le cas où on désire utiliser la bande passante de la diode en tant que dynamique limitante de l'oscillateur chaotique, il est indispensable de caractériser correctement la réponse dynamique de la commande {courant / longueur d'onde}.

β. Caractéristiques

Les courbes de la figure V.6 ont été fournies par le CNET avec les puces sur embase. La puissance de sortie peut atteindre plus de 20 mW. On remarque par rapport aux DFB, que la sensibilité d'accord est négative.



V.6.1 : Puissance de sortie



V.6.2 : Accordabilité

Figure V.6 : Caractéristiques de la source DBR (CNET Bagneux).

La linéarité de l'accord est également très bonne, mais elle varie nettement (extrema : 0,8 et 9 Å/mA, contre 0,2 Å/mA pour les DFB) d'un mode à l'autre (très forte sensibilité pour les faibles courants, donc les grandes longueurs d'onde).

Le domaine de fonctionnement effectivement utilisé se situe autour de 8-11 mA ($\lambda \sim 1549$ nm, plage continue de 1 nm) pour le courant DBR, et environ 20 mA pour le courant actif (puissance en sortie de diode d'environ 3-4 mW). Comme nous le verrons plus loin, la puissance optique décroît légèrement avec la longueur d'onde, contrairement aux DFB pour laquelle elle augmente.

γ. Conclusion

Ces sources accordables DBR ont permis une mise en oeuvre fiable du montage expérimental dans sa version finale. Bien que les capacités dynamiques n'aient pas été entièrement exploitées (bande passante de 50 MHz au moins), nous avons pu profiter de la stabilité, de la sensibilité et de la linéarité de ces sources accordables. Ces qualités plus relatives avec les sources DFB, n'auraient pu être obtenues qu'à l'aide d'un environnement complexe de correction par asservissement, qu'il aurait été impossible de réaliser à temps. Les DBR ont été indispensables dans l'obtention du résultat final.

c. Evolution des sources accordables

Les sources lasers à semi-conducteurs accordables en longueur d'onde sont encore en plein développement. On peut s'attendre sans trop de surprise à disposer prochainement de sources plus rapides, plus sensibles, et qui sont capables d'accéder à un domaine continu d'accordabilité de plus en plus en grand. Ainsi, des recherches en cours au CNET Bagnex ont abouti à une nouvelle structure DBR (2 réseaux DBR de périodicité différente) offrant une plage d'accord de plus de 30 nm discontinue sur 5 modes, soit environ 5 nm d'accordabilité continue. La bande passante d'accord en longueur d'onde est par contre toujours limitée physiquement à quelques centaines de MHz. Cette valeur est liée au caractère passif de la zone d'accord qui fait intervenir l'émission spontanée, plus lente que l'émission stimulée rentant en jeu dans le cas des zones actives (10 GHz au moins).

Notons enfin une dernière remarque relative à la nature du chaos que nous cherchons à obtenir. Nous désirons une dynamique chaotique en longueur d'onde, c'est la raison pour laquelle il est indispensable de disposer d'une source laser accordable. Le signal d'accord est pour l'instant de nature électronique, c'est l'élément le plus lent qui limite la rapidité de la dynamique. Un des moyens pour rendre le système plus rapide serait donc de passer à un montage tout optique. Dans une telle configuration, le signal d'accord doit également être de nature optique. Compte tenu des différentes transformations de variables physiques effectuées tout au long de la boucle d'oscillation, l'intensité optique est la grandeur de choix pour remplir la fonction d'accord de la longueur d'onde. Un système tout optique requiert donc une source dont la longueur d'onde dépend d'une intensité optique. Une telle configuration est bien connue, elle est l'objet de nombreuses études depuis plusieurs années, il s'agit des diodes lasers en « injection locking ». Des travaux actuellement en cours concernant les structures DBR et DFB [V.11] tentent de mieux définir les relations intrinsèques existant entre la longueur d'onde d'oscillation et un faisceau optique injecté ou ré-injecté. Une proposition de réalisation tout optique de l'oscillateur chaotique est représentée à la figure V.7.

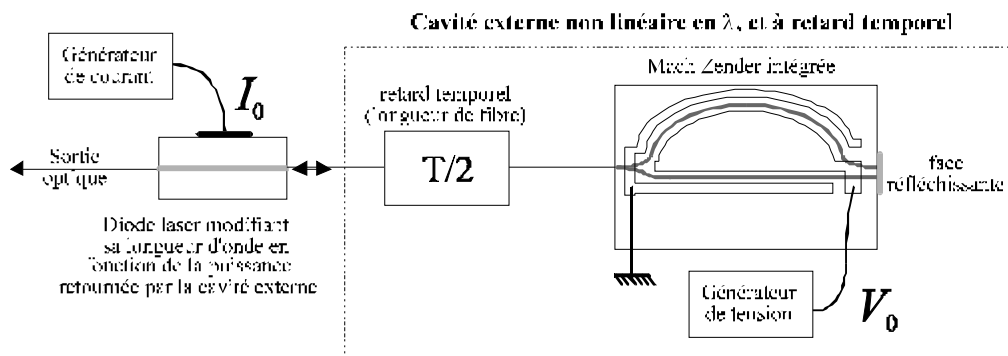


Figure V.7 : Modèle tout optique du générateur de chaos.

Le générateur de chaos tout optique est encore pour un certain temps au stade de projet théorique, car la maîtrise expérimentale est incertaine. Dans notre réalisation, au contraire, nous avons cherché à contrôler au mieux chaque élément, de manière à obtenir au niveau expérimental un comportement aussi proche que possible du modèle théorique. En particulier pour ce qui est de la source laser, son modèle doit correspondre à celui d'un transducteur optoélectronique linéaire entre les variables « courant d'électrode » et « longueur d'onde d'émission ». Sa puissance optique de

sortie est supposée constante, donc indépendante de la variation du courant de commande de la longueur d'onde. La caractéristique mesurée est différente de ce modèle théorique, puisqu'on observe une variation relative de puissance optique de 5 %/mA autour de $I_{DBR}=10$ mA, et $I_{act}=20$ mA. Nous avons cherché à compenser ce léger défaut.

d. Compensation de la modulation AM

La variation de puissance optique avec la commande I_{DBR} (modulation AM) a pour conséquence de générer un chaos qui n'est pas purement en longueur d'onde, mais qui dépend également de l'intensité optique. Ceci risque d'engendrer des problèmes au niveau du décodage, compte tenu des fluctuations d'intensité que peut entraîner le transport du faisceau sur la ligne de transmission. C'est pourquoi nous avons cherché à compenser au niveau de l'émetteur, à l'intérieur de la boucle d'oscillation, cette fluctuation en intensité optique.

Comme nous l'avons déjà évoquée, cette imperfection de la source laser peut très bien être reportée, dans un modèle équivalent, sur un défaut de la non linéarité. C'est donc à ce niveau, à la photo-détection de la puissance optique de sortie de la non linéarité, que l'on a cherché à compenser les variations de puissance optique de la source.

Pour cela, une compensation automatique de gain a été utilisée dans un amplificateur électronique après la photodiode (schéma d'ensemble représenté à la figure V.8). Le signal (c) servant de commande à cette compensation automatique est généré à partir de la mesure de la puissance optique P_e à l'entrée de la non linéarité en longueur d'onde. Une partie de cette puissance est pratiquement prélevée par une lame séparatrice, et est ensuite envoyée sur une photodiode dont le signal de sortie est asservi sur un niveau constant grâce à un amplificateur à gain variable $G(t)$. Lorsque l'asservissement fonctionne à erreur nulle, la sortie de cet amplificateur est une tension constante U_c :

$$u_p(t) = U_c = G(t) \cdot P_e(t) \text{ , donc } G(t) = U_c / P_e(t) \quad (V.1)$$

Un asservissement proportionnel-intégral permet de générer un gain G inversement proportionnel à la puissance optique d'entrée de la non linéarité, avec une erreur quasi nulle pour toute fluctuation de puissance dans la bande passante de l'asservissement.

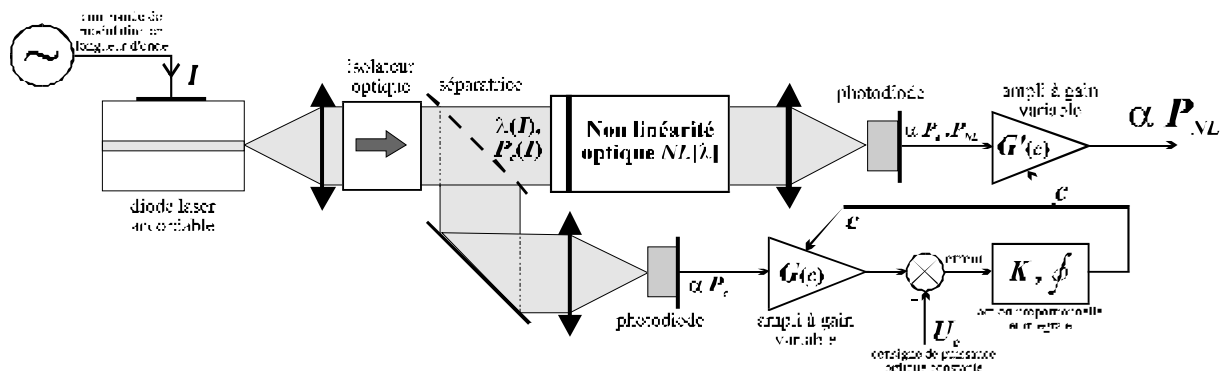
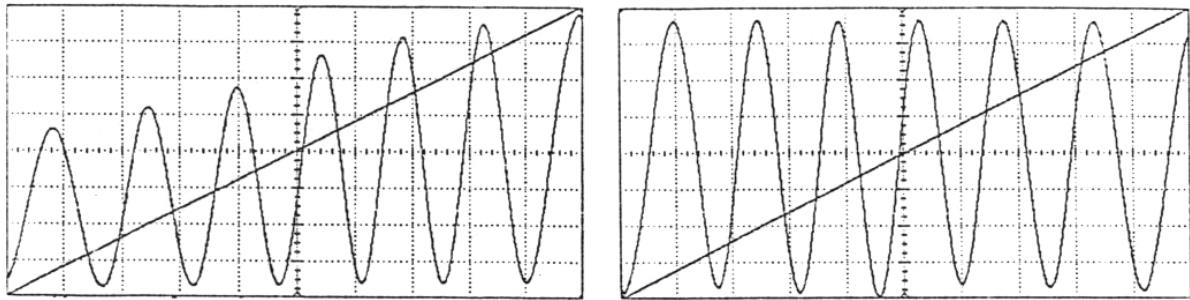


Figure V.8 : Schéma bloc du système de compensation des fluctuations de puissance optique.

L'expression de la puissance optique après la non linéarité s'écrit (voir chap.II) $P_s(t) = P_e(t) \cdot NL[\lambda(t)]$. Nous conservons volontairement une expression quelconque de la fonction non linéaire, car le principe utilisé s'applique de la même façon pour tout type de transformation $NL[\lambda]$ entre les variables longueur d'onde et puissance optique. A la détection de la puissance optique non linéaire en longueur d'onde, après l'amplificateur à gain variable $G'(t)=G(t)$, on obtient une mesure de la transformation non linéaire en longueur d'onde indépendante des fluctuations en puissance optique à l'entrée :

$$u_{NL}(t) = G'(t) \cdot P_s(t) = U_c \cdot NL[\lambda(t)] \quad (V.2)$$



V.9.1 : sans compensation

V.9.2 : avec compensation

Figure V.9 : Mesure de la transformation non linéaire en sortie du filtre biréfringent lorsque la longueur d'onde est modulée (u.a.).

La figure V.9 illustre le résultat de cette compensation sur la caractéristique mesurée lorsque la longueur d'onde est modulée sur plusieurs périodes du filtre biréfringent. A gauche on trouve la mesure lorsque la compensation est désactivée (le gain G' est constant), et à droite lorsqu'elle est active. L'ensemble [source accordable + fonction non linéaire + système de compensation] est bien équivalent au modèle théorique pour lequel la puissance optique de la source est indépendante de la longueur d'onde.

e. Commande en courant

Les électrodes de la diode laser sont adaptées par des résistances 50Ω directement sur leur embase. Pour s'affranchir de problèmes de linéarité dus aux seuils des jonctions et au faible courant moyen I_{DBR} , nous avons choisi d'attaquer l'électrode de commande par un étage de courant. Malgré la faible bande passante audio utilisée, les alimentations en courant spécifiques pour diode laser n'ont pu être utilisées par leur entrée de modulation externe, pour des raisons de déphasage entrée/sortie apparaissant vers 10 kHz déjà (origine sans doute liée à l'asservissement interne en courant). Cet écart au modèle conduit pratiquement à des comportements chaotiques différents, c'est pourquoi nous avons choisi de réaliser nous-mêmes l'étage de courant.

f. Valeurs numériques, réalisation

La sensibilité d'accord mesurée ($\pm 5 \%$) est de l'ordre ($I_{act}=30 \text{ mA}$, $I_{DBR}=12 \text{ mA}$, $t=25^\circ \text{ C}$) :

$$S_\lambda = 1,77 \text{ \AA/mA (@1,54 } \mu\text{m)}$$

$$S_\sigma = 74,0 \text{ m}^{-1}/\text{mA}$$

$$S_\nu = 22,2 \text{ GHz/mA}$$

Les plages d'accord continu habituellement utilisées ont une largeur d'environ 1,4 nm, ce qui correspond à un courant d'amplitude de 8 mA environ. Ces valeurs sont indicatives, et non absolues comme nous l'avons déjà dit. Elle peuvent varier d'un jour à l'autre, et dépendent du point de fonctionnement de la diode. Elles sont quoiqu'il en soit faciles et rapides à mesurer (voir plus bas, description du filtre biréfringent).

Après compensation automatique des fluctuations en puissance, la « source » corrigée possède une ondulation résiduelle d'au pire 4 %/mA en intensité optique (amélioration d'un facteur 10 au moins). Les ondulations résiduelles sont en général dues à un autre effet indésirable qui sera décrit dans le paragraphe 2.

La puissance optique moyenne disponible après l'isolateur optique fibré que l'on a utilisé est d'environ 0,3 mW. Le faisceau est ensuite partagé en 3, la partie transmise vers le décodeur, la partie servant à la compensation, et celle traversant le filtre biréfringent.

L'électronique de détection, celle de compensation, et celle de l'étage de courant alimentant l'électrode DBR sont décrites en annexe. Le courant d'électrode de la jonction active (I_{act}) est fourni par une source de type PROFILE LD402. Cette source est stabilisée, à faible bruit, protégée contre les pics de courant et les dépassements d'un courant limite, elle possède une entrée de modulation externe (conversion tension/courant équivalente à 50 Ω).

2. Non linéarité

a. Comportement réel, ordres de grandeur

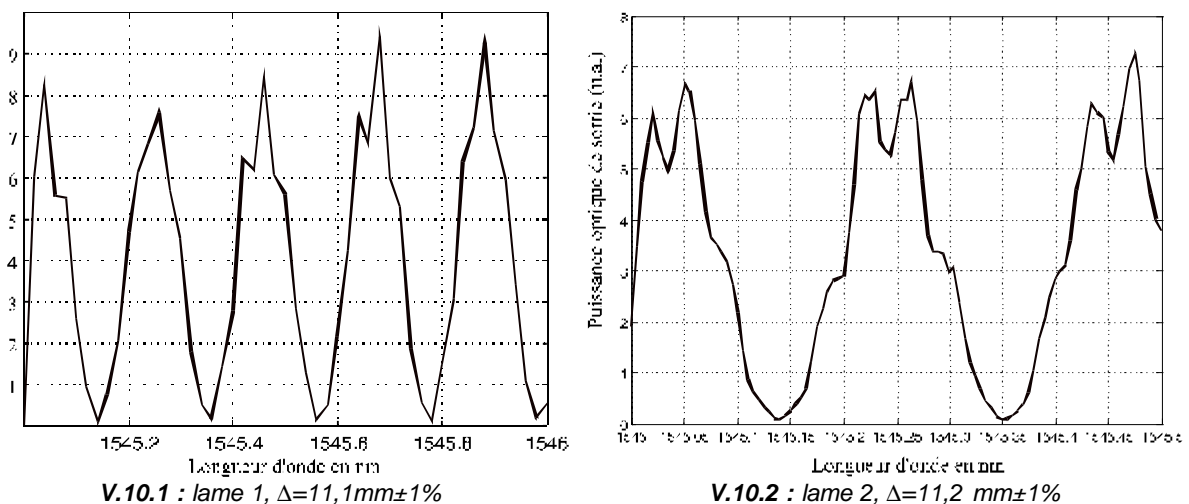


Figure V.10 : caractérisation des filtres biréfringents (polariseurs sans traitement A.R.) à l'aide d'une source accordable étalonnée

La théorie décrivant le filtre biréfringent est simple, elle conduit à un modèle tout aussi simple décrivant très bien le comportement réel. La caractérisation des lames a été faite à l'aide d'une source laser accordable à cavité externe (Tunics, Photonetics), à 1,5 μm . Les résultats de ces mesures sont représentés aux figures V.10.1 et V.10.2 pour chacune des deux lames. La fonction théorique en sinus carré

a été utilisée pour en déduire le retard à partir de la périodicité des minima, et de l'échelle en longueur d'onde (source laser étalonnée).

Des effets parasites non négligeables sont présents sur les figures V.10, ils ont également été remarqués lors de la caractérisation du filtre biréfringent à partir de la source DBR. Dans cette mesure ils ne peuvent être liés à des fluctuations de puissance optique de la source Tunics, celle-ci étant asservie. La modulation de la cannelure est liée cette fois à l'utilisation de la longueur d'onde comme variable, et à la présence de nombreuses interfaces parallèles entre milieux d'indice différent : il s'agit d'interférence à ondes multiples de type Fabry-Pérot. Pour éviter cela nous avons essayé différentes solutions. Une légère inclinaison des surfaces peut être efficace, mais dans notre cas celles-ci sont trop nombreuses (cubes polariseurs d'entrée et de sortie, lame biréfringente, fenêtre d'entrée de la photodiode, face de sortie de l'isolateur fibré, faces d'entrée et de sortie des lentilles). Nous avons donc choisi d'utiliser des composants optiques traités anti-reflets lorsque cela était possible. Le résultat correspond aux courbes de la figure V.9 (polariseurs traités A.R.) ; ces courbes sont à comparer avec celles de la figure V.10 (polariseurs sans traitement, les seuls disponibles au moment où a été faite cette mesure). Certains composants que nous n'avons pu faire traiter ont posé problème : la lame biréfringente, et la fenêtre de la photodiode. Leurs effets ont été amoindris grâce à un légère inclinaison de l'axe du composant par rapport à l'axe optique du faisceau.

Les figures V.9 et V.10 ont été tracées à partir des mêmes lames biréfringentes, mais avec des source accordables différentes, dont l'une est étalonnée. C'est la comparaison de ces 2 mesures qui ont permis l'évaluation de la sensibilité d'accord de la diode laser DBR données au paragraphe précédent.

b. Discussion

Le choix du filtre biréfringent en tant que non linéarité optique est bien sûr discutable. Il a l'avantage d'être relativement stable mécaniquement, et facile à mettre en oeuvre expérimentalement. Il présente des caractéristiques mécaniques réglables de manière indépendante pour ajuster les paramètres β et Φ : β dépend de l'angle de la ligne neutre par rapport à la direction des polariseurs (Ψ), le second dépend du chemin optique ($\Delta=(n_e-n_o).L$) qui peut être modifié en inclinant légèrement la lame sur son axe. (voir chap.II). Le cristal biréfringent est aussi « relativement » accessible sur le marché des composants (une lame de retard optique de 10 mm est loin d'être un composant courant, mais il peut être réalisé sur demande).

Cette non linéarité a par contre le désavantage (point de vue système télécom) d'être sensible à la polarisation d'entrée. Un Fabry-Pérot sur mesure (choix des coefficients de réflexion et de l'intervalle spectrale libre) aurait été plus adapté. Ce composant, bien que plus simple, est un peu plus coûteux et plus instable mécaniquement. Il constitue toutefois un autre exemple de non linéarité, réalisable rapidement, et très intéressant. Des études sont prochainement envisagées dans cette configuration.

Une autre solution, un peu plus délicate, mais idéale, serait un Mach-Zehnder intégré, de retard environ 2 mm, ce qui semblerait a priori réalisable. Le retard choisi de 10 mm pour la lame est en fait légèrement sur-dimensionné, compte-tenu de la plage d'accordabilité continue de la source laser. Un système tout intégré serait

idéal dans le cadre du développement d'un produit fini, un émetteur-codeur commercial à masquage chaotique.

c. Valeurs numériques

Compte tenu de l'erreur de mesure et des possibilités de rattrapage par ajustement mécanique (inclinaison), on peut considérer que les 2 lames, une pour l'émetteur, une pour le récepteur, sont identiques. Elles sont caractérisées par les valeurs numériques équivalentes suivantes (précision relative 1 % environ, lame 2 entre parenthèses) :

- retard optique équivalent dans le vide : $\Delta=11,1$ mm (11,2)
- période en nombre d'onde : $T_\sigma=90,3$ m⁻¹ (89,1)
- période en longueur d'onde (@1,545 μ m): $T_\lambda=2,15$ Å (2,12)
- période en fréquence optique : $T_\nu=27,1$ GHz (26,7)

Le matériau biréfringent est de la calcite ($n_e=1,6338$, $n_o=1,477$ à $\lambda=1,55$ μ m). Compte tenu des tailles habituelles des cristaux bruts, une lame de 6 cm de long est en fait constituée de 2 lames collées de 3 cm.

3. Le retard temporel

Plusieurs possibilités se sont présentées pour réaliser la fonction de retard. Le choix des solutions successivement employées a surtout dépendu du contexte expérimental. Elles ont eu chacune leurs avantages et leurs inconvénients, c'est ce que nous allons décrire maintenant.

a. Ligne à retard électronique, analogique, passive

Ce choix n'a pratiquement pas été utilisé. Il a été envisagé car il permettait d'atteindre une gamme discrète de retards par des interrupteurs, de 20 ns à 2 μ s, et parce que ce composant était disponible au laboratoire. Lors d'une analyse de la réponse en fréquence de ce type de retard, il s'est avéré qu'il présentait une ondulation en amplitude en fonction de la fréquence de travail. Or il est nécessaire de pouvoir réaliser un retard pur sans déformation du signal sur toute la bande de fréquence occupée par la dynamique chaotique. Une ondulation de la fonction de transfert aurait apporté une perturbation indésirable et pénalisante dans la recherche de maîtrise du chaos.

De plus, les valeurs de retard correspondaient à une dynamique chaotique à des fréquences relativement élevées (> 10 MHz) que les diodes DFB disponibles à ce moment n'autorisaient pas.

b. Ligne à retard numérique par mémoire FIFO

Compte tenu de la lenteur de l'accordabilité continue des sources lasers DFB, il devenait nécessaire de réaliser un prototype de faisabilité aux fréquences permises par les diodes lasers. Une des solutions possibles dans ces gammes de basses fréquences (0 à 1 kHz environ) consistait à passer en numérique, puis à utiliser une

mémoire FIFO (First In First Out) pour retarder les échantillons numérisés. Le principe est de décaler vers la sortie, à une fréquence d'horloge fixe, les échantillons numérisés qui entrent dans la mémoire. A la sortie, on effectue une conversion numérique / analogique pour retrouver le même signal continu (après filtrage) de l'entrée, mais retardé.

Cette solution, bien qu'un peu lourde, a été mise en oeuvre, et a permis la réalisation de notre premier oscillateur chaotique en longueur d'onde. Les bifurcations successives par dédoublement ont pu être clairement identifiées. Le schéma de la ligne à retard complète est donné en annexe. Ce montage a finalement été abandonné au profit d'un composant unique analogique (partie c. ci-dessous), bien plus simple d'utilisation, et exempt de tout bruit de conversion numérique.

c. Ligne à retard par mémoire analogique CCD

Les lignes à retard Reticon RD5106/07/08 sont issues de la technologie des barrettes de photodétection CCD (Coupled Charge Device). Elles sont utilisées principalement en traitement de signaux audio (réalisation d'échos). Il s'agit pratiquement d'un vecteur de $N=256, 512$ ou 1024 capacités CMOS dont chaque charge représente un échantillon du signal à retarder. Les quantités de charges stockées sur chaque capacité peuvent être décalées d'une capacité vers sa voisine, au rythme d'une horloge externe de fréquence f_T . Le principe est donc identique au précédent, sauf que le signal reste analogique ; il est juste échantillonné dans le temps. Le composant est disponible sous un format 8 broches classique. Il présente l'avantage d'une très bonne linéarité, et d'une plage de retard accessible de $500 \mu\text{s}$ à $0,1$ s. Un décalage d'échantillon dans la mémoire intervient toutes les 2 périodes d'horloge, le retard se calcule donc aisément selon l'expression $T = \frac{2 \cdot N}{f_T}$. La bande

passante est en général limitée au mieux à $1/3$ de la fréquence d'échantillonnage pour des raisons évidentes de repliement de spectre. Un filtrage est nécessaire en sortie pour retrouver un signal continu exempt de la fréquence d'horloge de l'échantillonneur-bloqueur. La fiche technique ainsi que le montage utilisé sont donnés en annexe.

d. Ligne à retard optique

C'est la solution la plus simple et la plus efficace, constituée d'une certaine longueur de fibre. Vingt mètres correspondent à peu près à un retard temporel de $0,1 \mu\text{s}$ ($T=L.n/c$, où L est la longueur de fibre et n son indice), ce qui convient bien à la réalisation d'un générateur de chaos dans une bande de fréquence télécom (>100 MHz). Cette option simple n'a pas été réalisée pour des raisons de dynamique d'accord des sources DFB, puis ensuite pour des problèmes de temps. Dans le cas des sources DBR, se posait également le problème du contrôle précis de chaque paramètre, de manière à pouvoir apparier au mieux le chaos d'émission et celui de réception (notamment pour la compensation automatique des fluctuations d'intensité). Dans ces conditions, la longueur de fibre nécessaire à l'obtention d'un retard adapté à la bande audio devient presque kilométrique, et l'utilisation du retard à mémoire analogique CCD est alors moins coûteuse, et presque aussi simple et efficace.

Une dynamique chaotique rapide réalisée à l'aide d'une ligne à retard fibrée est toutefois facilement envisageable même si l'on ne se place pas dans la situation de contrôle stricte des paramètres. Il faudrait dans ces conditions compliquer très légèrement le modèle pour décrire correctement le générateur rapide de chaos (ordre de l'équation différentielle à retard). Le régime dynamique serait sensiblement différent mais toujours chaotique.

4. La constante de temps

La dynamique chaotique a été limitée à la bande audio pour différentes raisons déjà évoquées. Entre autres choses, cela a permis le contrôle artificiel de la bande passante de la chaîne d'oscillation du générateur de chaos. La chaîne en boucle ouverte a été « forcée » à un comportement dynamique du 1^{er} ordre, avec une fréquence de coupure vers 20 kHz environ ($f_c=1/[2.\pi.\tau]$). On voit sur la figure V.11 que la mesure de la fonction de transfert expérimentale se rapproche assez bien du modèle du 1^{er} ordre jusqu'à des fréquences de 80 kHz environ. Pour des fréquences supérieures, l'atténuation réelle est encore plus importante. On suppose que cette atténuation est suffisante, même dans le cas du 1^{er} ordre parfait, pour que l'influence des signaux à ces fréquences soit négligeable dans l'oscillation chaotique. Cela signifie que si le modèle exact de la fonction de transfert réelle s'écrit sous la forme :

$$H(p) = \frac{H_0}{(1+\tau \cdot p)(1+\tau_1 \cdot p)\dots(1+\tau_q \cdot p)} \quad (V.3)$$

alors $f_c=1/(2.\pi.\tau) \sim 20$ kHz et $f_j=1/(2.\pi.\tau_j) > 80$ kHz, $j=1\dots q$.

La première fréquence de coupure va limiter le spectre significatif (en amplitude) de la dynamique chaotique à quelques dizaines de kHz. Pour ce spectre, le passe bas sera un premier ordre dans une très bonne approximation (suppression des τ_j dans l'expression (V.3)). L'écriture temporelle de la loi dynamique correspond alors correctement à l'expression (II.24) du chapitre II.

$x(t) + \tau \cdot \frac{dx}{dt}(t) = NL[x(t-T)]$ dans le domaine temporel, et

$X(p) \cdot (1 + \tau \cdot p) = \exp(-T \cdot p) \cdot \mathbf{NL}[p]$, dans le domaine de Laplace, soit

$X(p) = \frac{\exp(-T \cdot p) \cdot \mathbf{NL}[p]}{(1 + \tau \cdot p)} = H(p) \cdot \exp(T \cdot p) \cdot \mathbf{NL}[p]$, où $H(p)$ est la partie linéaire de la

dynamique du 1^{er} ordre, et $\exp(T \cdot p) \cdot \mathbf{NL}[p]$ est l'influence de la partie non linéaire retardée, avec $\mathbf{NL}[p] = \int_0^{\infty} \exp(-t \cdot p) \cdot NL[x(t)] \cdot dt = \mathbf{TL}\{NL[x(t)]\}$ (transformée de Laplace).

La figure V.11 représente le relevé expérimental en boucle ouverte du passe bas réalisé électroniquement par une cellule RC série. Cette constante de temps artificielle est facilement réglable si on utilise un potentiomètre pour la résistance R. C'est ce que nous avons fait à l'émetteur pour reproduire le même passe bas et compenser précisément l'incertitude sur la valeur des composants. La mesure est

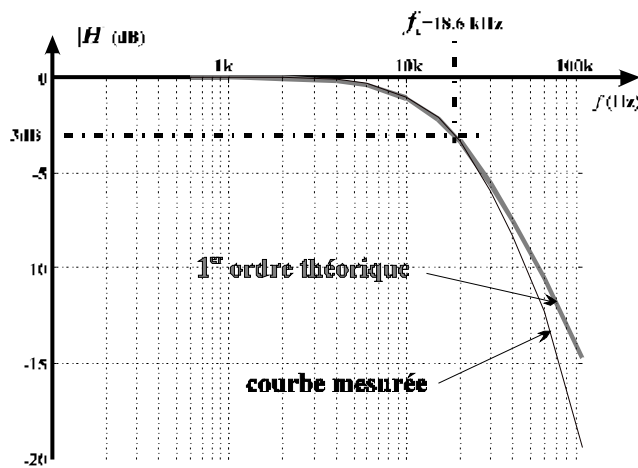


Figure V.11 : Mesure de la fonction de transfert linéaire $H(p=j\omega)$ de l'oscillateur chaotique.

effectivement faite en incluant tous les éléments de la chaîne, non linéarité comprise. L'amplitude de modulation en longueur d'onde a simplement été choisie suffisamment petite, et la longueur d'onde moyenne telle que le signal évolue sur un point d'inflexion de la cannelure (donc partie linéaire). La courbe permet de conclure que c'est principalement la cellule RC qui joue le rôle de limitation de la bande passante pour les basses fréquences, et pas les autres éléments (électroniques) de la chaîne d'oscillation.

Dans le cas d'une version plus rapide de l'oscillateur chaotique (sans limitation artificielle de la bande passante), le temps de réponse de la diode laser jouera probablement le rôle de τ . La dynamique devrait alors être du second ordre, comme c'est le cas en général pour les jonctions de diodes lasers (il ne s'agit toutefois pas ici d'une vraie jonction active, mais d'une section DBR).

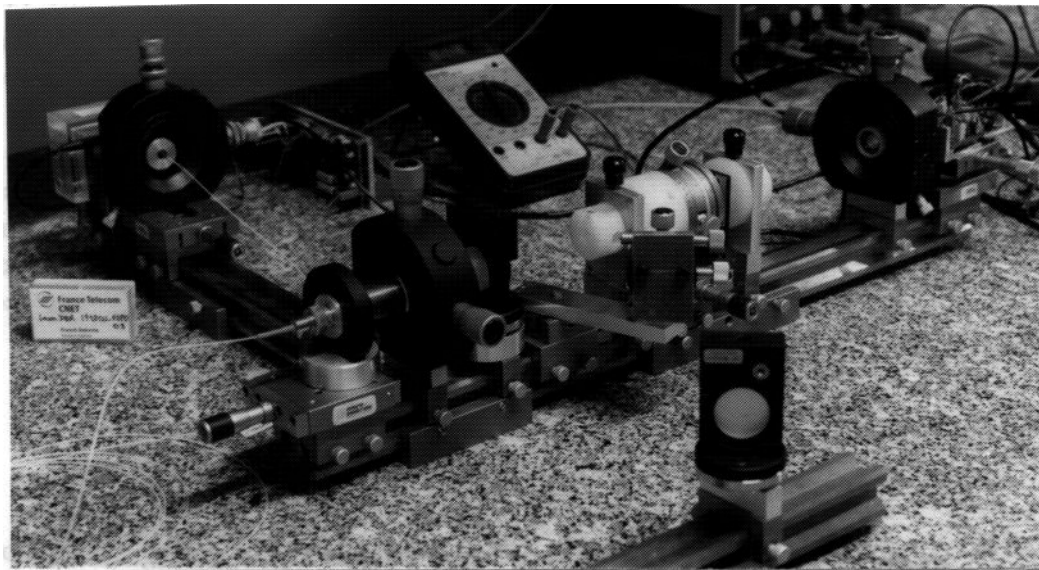
B. Mesures en boucle ouverte

1. Schéma du montage

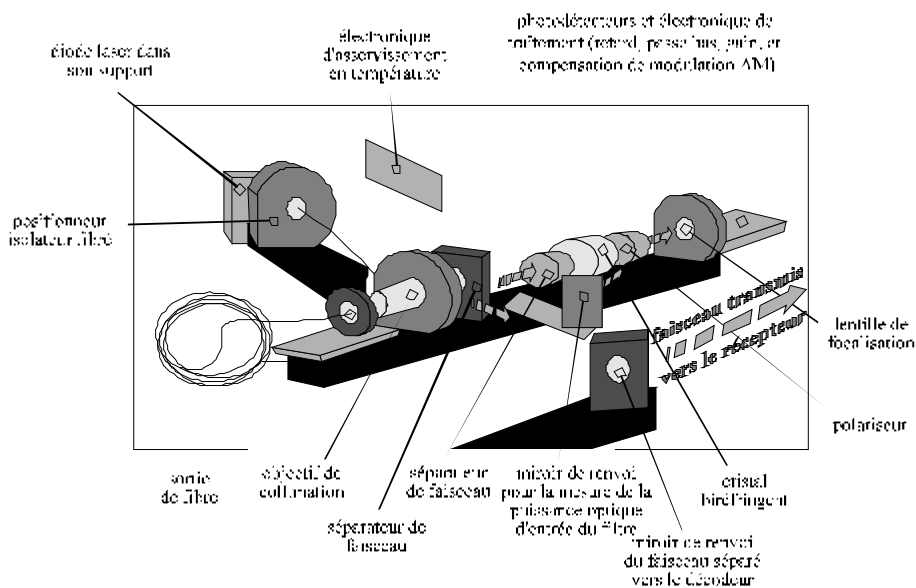
La figure V.12 représente la réalisation expérimentale de l'oscillateur chaotique d'émission. A gauche, à l'arrière plan, se trouve la source laser accordable montée dans son support mécanique permettant le positionnement, les contacts électriques avec les électrodes, et le contact thermique avec un ensemble d'asservissement en température (capteur Pt100 et élément Peltier). Un positionneur XY maintient un isolateur optique 70dB fibré, spécialement conçu pour le couplage des diodes lasers. La sortie de cette fibre se retrouve dans un plan intermédiaire de la photo, dans l'axe optique horizontal du filtre biréfringent. Ce faisceau est déjà polarisé compte tenu des propriétés de la diode laser et de la faible longueur de fibre. Un objectif dans un positionneur XY permet de collimater la sortie de la fibre. Un premier séparateur non polarisant (traité A.R.) permet d'extraire une partie du faisceau qui sera transmise vers le récepteur-décodeur (au premier plan, miroir de renvoi vers la droite, en direction de l'émetteur). Cette partie extraite est modulée en longueur d'onde selon la dynamique chaotique, mais faiblement en intensité (modulation AM accompagnant la modulation FM de la diode laser), puisque la séparation du faisceau a lieu avant la non linéarité.

Juste avant la lame biréfringente, un deuxième séparateur traité A.R. prélève une partie du faisceau pour la mesure de la puissance optique d'entrée servant au système de compensation automatique de la modulation AM. Un miroir de renvoi décalé par rapport au banc re-dirige ce faisceau vers la lentille à l'extrémité du banc. Après le séparateur, on trouve la lame biréfringente de 6 cm de long dans un support de rotation autour de l'axe optique. Le polariseur d'entrée du filtre biréfringent est inutile puisque le faisceau est déjà polarisé. Après la lame se trouve

le polariseur de sortie, traité A.R. Une lentille traitée anti-reflet au bout du banc dans un support XY permet de focaliser les 2 faisceaux collimatés convergeants vers elle, celui qui est prélevé à l'entrée du filtre, et celui à la sortie du filtre. Ces faisceaux tombent ensuite sur 2 photodiodes adjacentes, séparées d'une distance adéquate, calculée en fonction de l'angle entre les faisceaux et de la distance focale de la lentille. Les photodiodes sont fixées sur un plateau de positionnement où se trouvent les différentes fonctions électroniques décrites plus haut : détection, amplification, correction automatique de modulation AM, ligne à retard temporel, passe-bas du 1^{er} ordre, atténuateur commandé en tension (réglage de β), et étage de sortie en source de courant pour renvoyer le signal traité vers l'électrode d'accord de la longueur d'onde. Une entrée avant le passe-bas permet d'ajouter un signal informatif. Une sortie filtrée et amplifiée donne une tension proportionnelle au courant qui sera ré-injectée dans la diode. Une autre sortie permet de mesurer le courant moyen (offset sur l'étage de courant) qui règle le paramètre Φ .



V.12.1 : Photographie de l'oscillateur chaotique d'émission



V.12.2 : Indication des principaux éléments.

Figure V.12 : Montage expérimental du générateur de chaos.

2. Réglage des paramètres T , β et Φ

a. Le retard

Sa valeur expérimentale est très facile à modifier dans la configuration du montage. Grâce à la ligne à retard CCD, une simple variation de fréquence d'horloge permet de faire varier linéairement le retard. La valeur de T a pratiquement été gardée constante à sa valeur minimale de 0,512 ms, ce qui correspond à une horloge de 1 MHz avec un composant à 256 capacités. Le rapport T/τ est donc d'environ 60, ce qui doit correspondre à une dimension assez élevée du régime chaotique (~ 70 , par extrapolation des résultats de [II.10]).

Des études complémentaires restent à faire pour déterminer l'influence exacte de T sur les régimes dynamiques. Ceci nécessiterait le développement des techniques de calculs de dimension, et également la mise en oeuvre d'un contrôle informatique du montage pour essayer de retrouver expérimentalement la loi d'évolution de la dimension de l'attracteur en fonction du rapport T/τ .

b. Le paramètre de bifurcation

Il est relié aux paramètres expérimentaux par la relation (II.22) :

$$\beta = \frac{\pi \cdot \Delta}{(\lambda_0)^2} \cdot S \cdot Y \cdot K \cdot G \cdot P_0 \cdot \sin(\Psi)$$

S : sensibilité $(\delta\lambda)/(\delta I_{\text{DBR}})$

$Y.K.G$: gain de la boucle de retour

Δ : retard optique de la lame biréfringente

P_0 : puissance optique d'entrée de la NL

λ_0 : longueur d'onde moyenne

Ψ : angle ligne neutre / axes des polariseurs

Le réglage de β par rotation de la lame biréfringente autour de son axe (Ψ), est intéressant expérimentalement dans un but démonstratif. Pour plus de souplesse nous avons mis en oeuvre dans la boucle de retour électronique un atténuateur commandable par une tension. Il s'agit pratiquement d'un pont diviseur de tension dont la résistance inférieure est constituée d'un transistor à effet de champ en mode résistif. La tension de grille ne donnant pas un réglage linéaire (sensible) de l'atténuation, elle est en fait générée à partir d'un atténuateur étalon asservi.

Le circuit détaillé de l'ensemble est fourni en annexe. La figure V.13 représente la visualisation de 2 périodes de la non linéarité dont l'amplitude (proportionnel à β) est modulée électroniquement dans le temps par l'intermédiaire de l'atténuateur commandé en tension (commande en dents de scie). On remarque que la réponse sur β semble bien linéaire. Le pont résistif étant passif, il ne pose aucun problème de bande passante.

L'avantage principal de la commande électrique de β réside dans la possibilité de tracer à l'écran d'un oscilloscope le diagramme de bifurcation. En faisant varier la commande assez lentement par rapport aux temps moyens d'établissement des régimes dynamiques (voir calculs des exposants de Lyapounov, ch.IV), il est possible de balayer tous les modes accessibles dans la plage de variation de β . Le gain de la boucle de retour électronique peut être modulé de 1 à 10 en linéaire. Ces

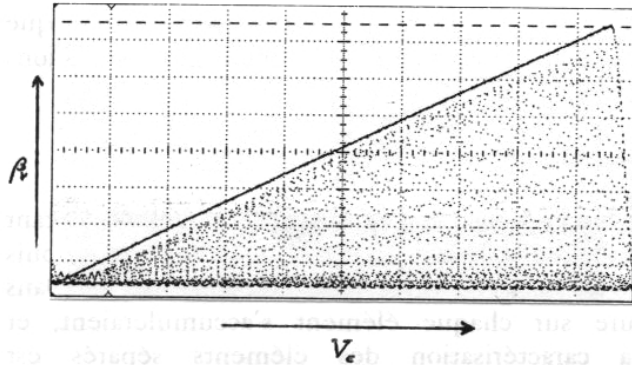


Figure V.13 : Caractéristique de la commande électrique du paramètre de bifurcation, tension de commande U_c (trait continu, u.a.) et enveloppe de la non linéarité (proportionnelle à β) (nuage de points, u.a.).

valeurs sont faibles par rapport aux composants électroniques intégrés qui existent (30 à 40 dB de variation), mais elles sont largement suffisantes pour le tracé d'un diagramme de bifurcation. En effet, les simulations couvrent des plages de β dont le plus grand rapport β_{Max}/β_{min} est 5. Le montage que nous avons réalisé est à commande linéaire, alors que les composants intégrés ont des sensibilités logarithmiques en dB/Volt.

c. Le paramètre Φ

Rappelons son expression établie au chapitre II, (II.21) :

$$\Phi = \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} [\text{mod. } \pi]$$

Δ : retard optique de la lame biréfringente
 λ_0 : longueur d'onde moyenne

Sa valeur peut être ajustée mécaniquement en inclinant légèrement la lame sur l'axe optique pour changer le chemin optique Δ . Cette possibilité de réglage a été très utile pour appairer correctement le récepteur sur l'émetteur.

Φ doit également être ajusté pour choisir correctement le régime dynamique de l'oscillateur, parmi tous ceux qui ont été mis en évidence lors des calculs des différents diagrammes de bifurcation. Il est important de bien obtenir un régime chaotique, sans possibilité d'accrochage sur une oscillation quasi-périodique à faible richesse spectrale, pour laquelle le masquage ne serait pas très efficace. Pour effectuer ce réglage, le plus simple et le plus facile est de jouer sur la longueur d'onde moyenne λ_0 , par l'intermédiaire du courant moyen de commande, I_{DBR} . Un relevé expérimental de la courbe $\Phi(I_{DBR})$ a été fait, mais compte tenu de la sensibilité de fonctionnement de la diode DBR (température, dérives), la position absolue de Φ sur l'axe des I_{DBR} est variable entre 2 manipulations. La valeur numérique à retenir qui reste à peu près constante est la sensibilité de réglage $(\delta\Phi)/(\delta I_{DBR}) \sim 2,5$ à 3 rd/mA, pour $I_{DBR}=8$ à 11 mA, et $I_{act}=20$ mA à $t \sim 25^\circ\text{C}$. Cette sensibilité de Φ par rapport au courant moyen I_{DBR} dépend bien sûr de la sensibilité d'accord au point de fonctionnement choisi :

$$\frac{\delta\Phi}{\delta I_{DBR}} = \frac{\delta\Phi}{\delta\sigma} \cdot \left[\frac{\delta\sigma}{\delta I_{DBR}} \right]_{I_{act}, I_{DBR}} = \pi \cdot \Delta \cdot \left[\frac{\delta\sigma}{\delta I_{DBR}} \right]_{I_{act}, I_{DBR}} \quad (V.4)$$

Avant de boucler le système sur lui-même, nous allons maintenant vérifier que l'ensemble de ses paramètres expérimentaux correspondent bien aux conditions théoriques du modèle étudié au chapitre IV.

3. Correspondance expérience-théorie

Le nombre d'éléments formant l'ensemble expérimental de la chaîne d'oscillation étant assez important, il n'est pas intéressant de mesurer les caractéristiques de chacun, puis de calculer le résultat pour remonter au modèle théorique global de l'oscillateur. Dans ces conditions, les erreurs de mesure sur chaque élément s'accumuleraient, et deviendraient trop importantes. La caractérisation des éléments séparés est conditionnelle du bon fonctionnement de l'ensemble, selon le modèle établi, mais elle est peu utile pour remonter avec précision au modèle simple de l'équation (II.24).

Nous avons donc choisi un signal de la partie de traitement électronique, et nous avons mesuré la façon avec laquelle il est transformé tout au long de la chaîne d'oscillation. L'ensemble du montage étant relativement complexe et susceptible de se dérégler sur une période de quelques jours, il est préférable de décrire une procédure d'étalonnage plutôt que de présenter des résultats de caractérisation qui ne sont plus valables à cause de la dérive de tel ou tel composant. Cette procédure doit être faite avant chaque manipulation qui a pour objet une comparaison quantitative entre résultats théoriques et expérimentaux.

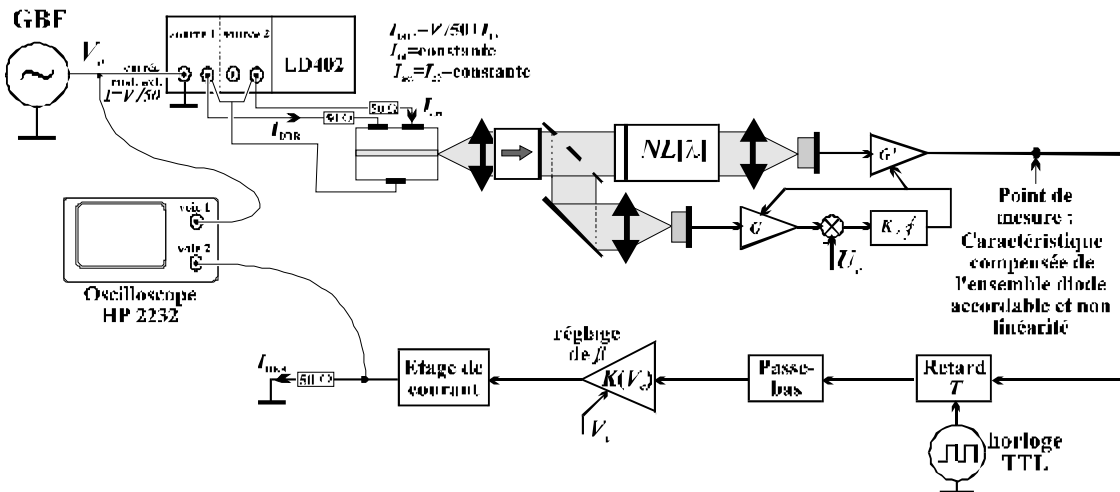


Figure V.14 : Montage de caractérisation de la chaîne d'oscillation en boucle ouverte.

La figure V.14 illustre les différents éléments de la chaîne d'oscillation en boucle ouverte, ainsi que les différents appareils de commande et de mesure. Considérons le courant de commande de l'électrode d'accord de la longueur d'onde, et ouvrons la chaîne d'oscillation à cet endroit. Ce courant peut être modulé facilement en boucle ouverte grâce à une tension de modulation externe (tension V_e) disponible sur l'alimentation en courant pour diodes lasers LD402. Le rapport de transformation (V_e/i_{DBR}) est de 50Ω . Dans ces conditions, il suffit de connecter la sortie de l'étage de courant (plaquette électronique de la boucle de retour) sur un bouchon 50Ω (tension V_{50}), pour avoir en sortie de la chaîne d'oscillation une mesure de ce qui serait, en boucle fermée, l'entrée de modulation du courant. De manière à respecter expérimentalement les notations utilisées dans le modèle dynamique normalisé, il faut prendre garde à l'origine des variables expérimentales par rapport à celle de la variable dynamique normalisée $x(t)$. L'entrée du passe-bas, c'est-à-dire la sortie de la chaîne à la figure V.14, correspond à la fonction non linéaire retardée. On a ainsi pris soin dans les circuits électroniques de régler correctement les offsets pour que

le minimum électrique de la cannelure reste bien à zéro. La sortie de l'étage de courant doit être un signal toujours positif ou nul. Le signal de modulation V_e doit, d'une part être également à valeur minimale nulle, et d'autre part il doit avoir une amplitude suffisante pour balayer une partie significative de la non linéarité.

Avec les notations de la figure V.14, et les précautions expérimentales pour effectivement observer en sortie la cannelure du filtre biréfringent avec une origine correcte, l'écriture de la transformation entre l'entrée et la sortie se fait de la façon suivante :

$$V_{50}(t) + \tau \cdot \frac{dV_{50}}{dt}(t) = NL_{\beta_V, \Phi_V} [V_e(t-T)] \quad (V.5)$$

où β_V et Φ_V sont des valeurs propres au système expérimental que l'on cherche à relier aux valeurs théoriques β et Φ . Si l'entrée est modulée suffisamment lentement par rapport au temps de réponse de la chaîne (a priori τ , mais à cause des harmoniques développés par la non linéarité, plutôt 10τ) : la chaîne est observée en « statique » :

$$V_{50}(t) = NL_{\beta_V, \Phi_V} [V_e(t-T)] = \beta_V \cdot \sin^2 \left[\frac{\pi \cdot V_e(t-T)}{2 \cdot V_\pi} + \Phi_V \right] \quad (V.6)$$

Cette écriture correspond à la fonction observée à l'oscilloscope et déjà représentée figure V.9.2. Sous cette forme, les nouveaux paramètres expérimentaux β_V , Φ_V et V_π prennent d'eux-mêmes une signification déjà suggérée par leur nom : β_V est l'amplitude de la cannelure observée en sortie de chaîne, Φ_V est l'angle qui donne la valeur V_{50} ($V_e=0$), et V_π est l'amplitude de la tension d'entrée qui permet d'observer en sortie une demi-période de la cannelure (même notation que pour les Mach-Zehnder intégrés). Un simple changement de variable permet de trouver la relation entre les paramètres expérimentaux et les paramètres théoriques :

$$\Phi = \Phi_V, \quad \beta = \frac{\pi}{2 \cdot V_\pi} \cdot \beta_V, \quad x = \frac{\pi \cdot V_e}{2 \cdot V_\pi}, \quad (V.7)$$

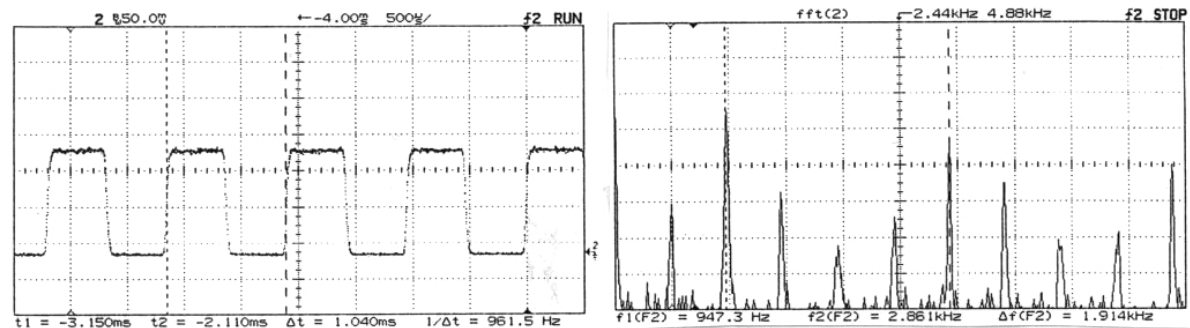
La valeur de β_V dépendant de la tension de commande V_c , il est intéressant d'effectuer un étalonnage en début de manipulation. Cette commande est en fait linéaire (figure V.13), 2 mesures d'amplitude de la non linéarité en sortie suffisent pour établir une relation $\beta_V = \beta_{V0} + \alpha \cdot V_c \approx 0,10 \cdot (V_c - 0,17)$, par exemple pour les diagrammes de bifurcation expérimentaux. Comme $V_\pi = 26\text{mV}$, on en déduit que pour ces diagrammes, le paramètre de bifurcation normalisé varie de 0,1 à 4,4 environ.

Avec les caractéristiques que nous venons de décrire, l'oscillateur est prêt à être bouclé sur lui-même, ses différents éléments formant un ensemble très proche de ce qui a été décrit par le modèle théorique.

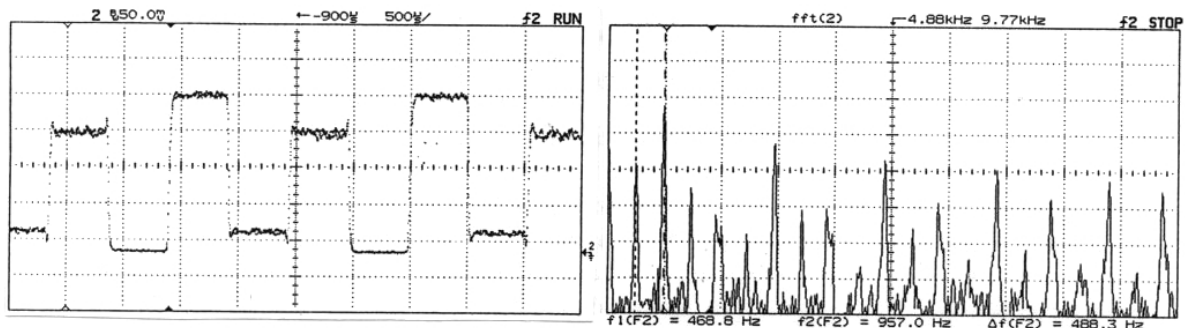
C. Régimes dynamiques en boucle fermée

Lorsque le montage est mis en route, il se trouve pour des raisons de sécurité dans un état correspondant à un paramètre β minimum. Le gain de retour est quasi-nul sur l'électrode de commande, la diode laser ne risque pas de recevoir un courant de retour incontrôlé. La première opération de mise en route est d'augmenter, avec $\beta=0$, les courant I_{act} (puissance optique moyenne) et I_{DBR} (paramètre Φ) à leur valeur nominale (respectivement 20 mA et environ 9 mA). Bien que la boucle d'oscillation soit fermée physiquement, elle est ouverte électroniquement car $\beta=0$. On augmente ensuite progressivement la valeur du paramètre de bifurcation jusqu'à obtenir un régime dynamique chaotique. Avant de l'atteindre, on doit théoriquement passer par les différents régimes du diagramme de bifurcation. Les évolutions temporelles et spectrales observées expérimentalement vont maintenant être présentées.

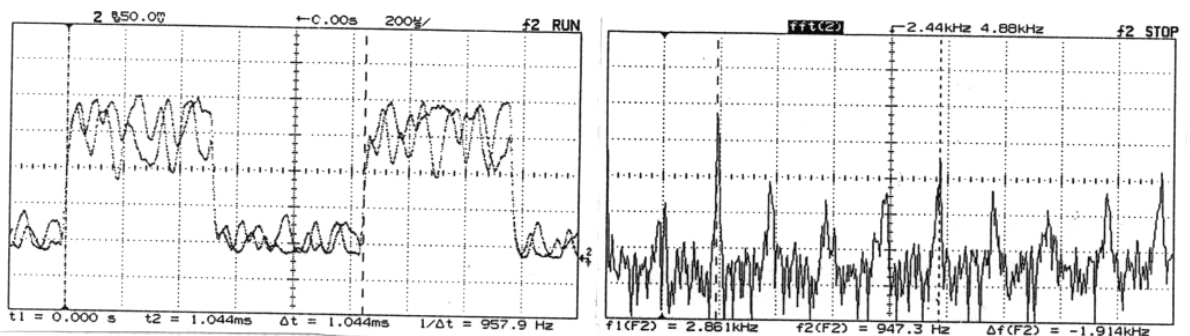
1. Chronogrammes et spectre FFT



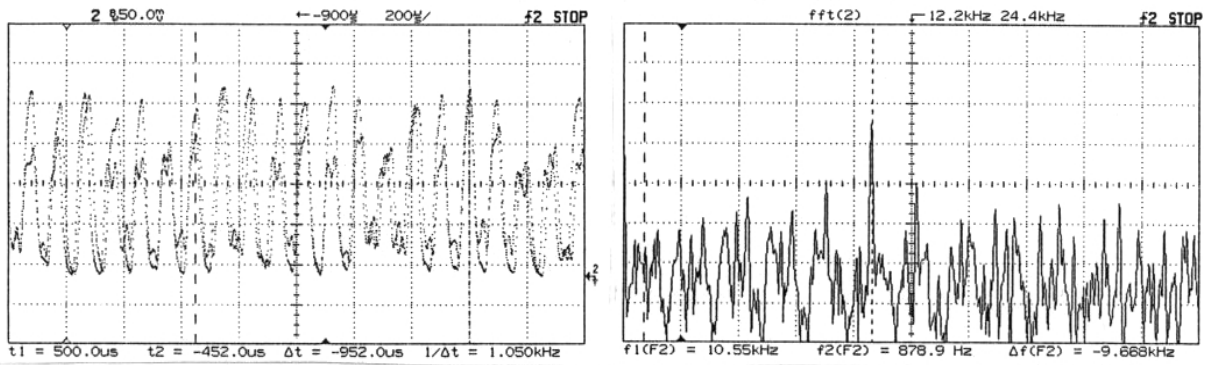
$T_2 (\beta \sim 1,5)$



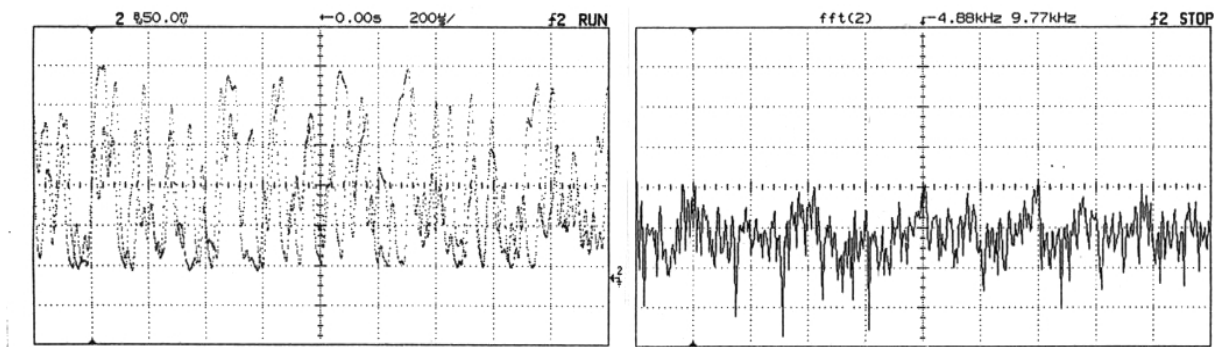
$T_4 (\beta \sim 1,8)$



chaos en $T_2 (\beta \sim 2,2)$



accrochage sur une fréquence élevée, régime quasi-périodique ($\beta \sim 2,3$)



régime chaotique ($\beta \sim 3,1$)

Figure V.15 : Chronogrammes et spectres FFT correspondants ($\Phi \sim 2,4$).

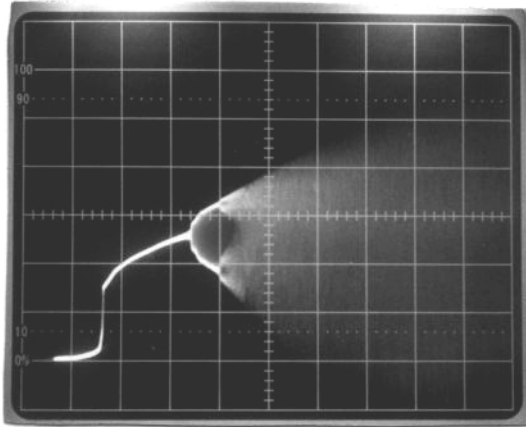
La figure V.15 représente les chronogrammes et les spectres FFT observés pour différentes valeurs croissantes de β , du régime périodique en T_2 jusqu'aux régimes chaotiques entièrement développés, en passant par les modes quasi-périodiques (fenêtres de [quasi-]périodicité du modèle continu).

La période T_2 donne un spectre caractéristique d'un signal rectangulaire, avec des harmoniques impairs qui décroissent en $1/(2.p+1)$. Des pics faibles d'ordre pair apparaissent tout de même, ceci est dû aux transitions à rapidité limitée qui brisent la symétrie du signal rectangulaire pur. Le régime T_4 fait apparaître spectralement les sous-harmoniques du fondamental du T_2 . Le chaos en T_2 ou T_4 correspond à un spectre de raies très élargies par rapport aux régimes périodiques, et avec un bruit de fond continu plus élevé. Le régime chaotique montre bien un spectre large bande avec un niveau d'amplitude élevé. La quasi-périodicité correspond spectralement à un ensemble de raies de fréquence élevée avec un bruit de fond.

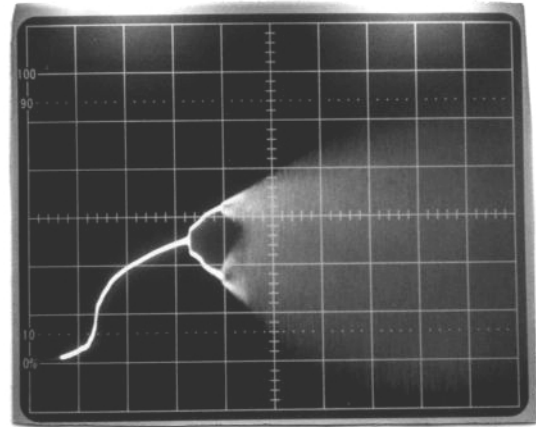
2. Diagrammes de bifurcation

Le principe du tracé expérimental utilise la commande électrique du gain de la boucle de retour électronique. Un signal en triangle est appliqué à cette commande. Son amplitude et sa valeur moyenne sont telles que tous les régimes dynamiques explorés par les simulations peuvent être atteints expérimentalement. La fréquence du triangle doit être suffisamment lente devant les temps caractéristiques d'établissement de ces régimes dynamiques (typiquement quelques dixièmes de Hertz pour avoir de la marge). En synchronisant l'oscilloscope sur le front montant du triangle, on voit apparaître progressivement, en quelques secondes, le diagramme de bifurcation correspondant à la valeur de $\Phi(I_{DBR})$.

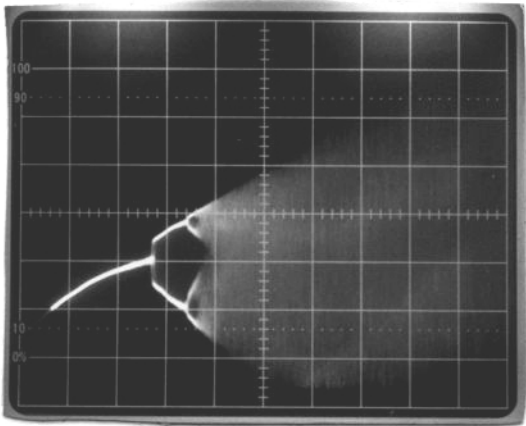
Grâce à l'étalonnage expérimental décrit plus haut, nous avons tracé une série de diagrammes pour différents réglages de Φ . Les résultats sont reportés ci-dessous à la figure V.15. Les allures caractéristiques de ces diagrammes ont bien été retrouvées.



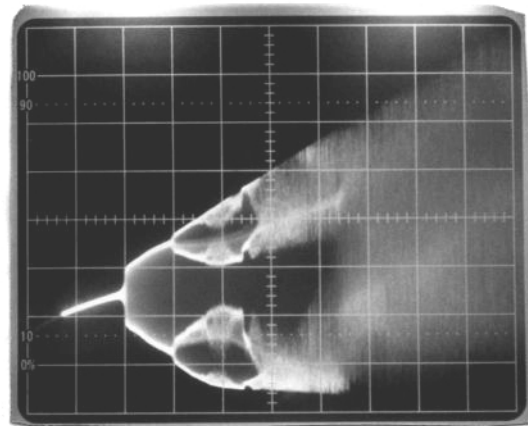
$\Phi \sim 0,10$



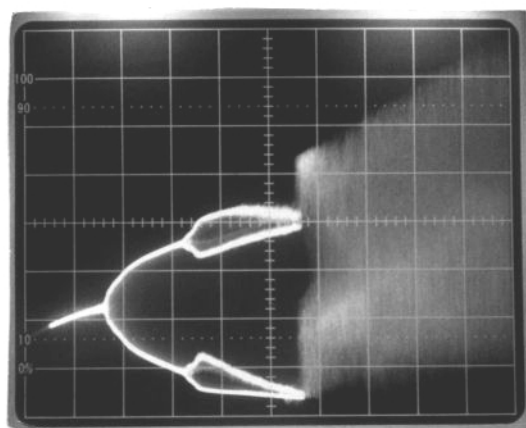
$\Phi \sim 0,30$



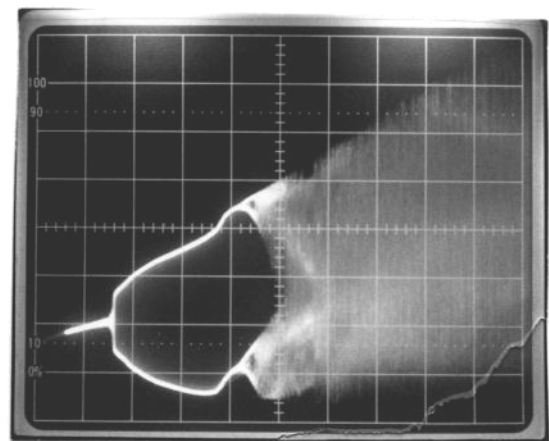
$\Phi \sim 0,5$



$\Phi \sim 0,95$



$\Phi \sim 1,05$



$\Phi \sim 1,3$

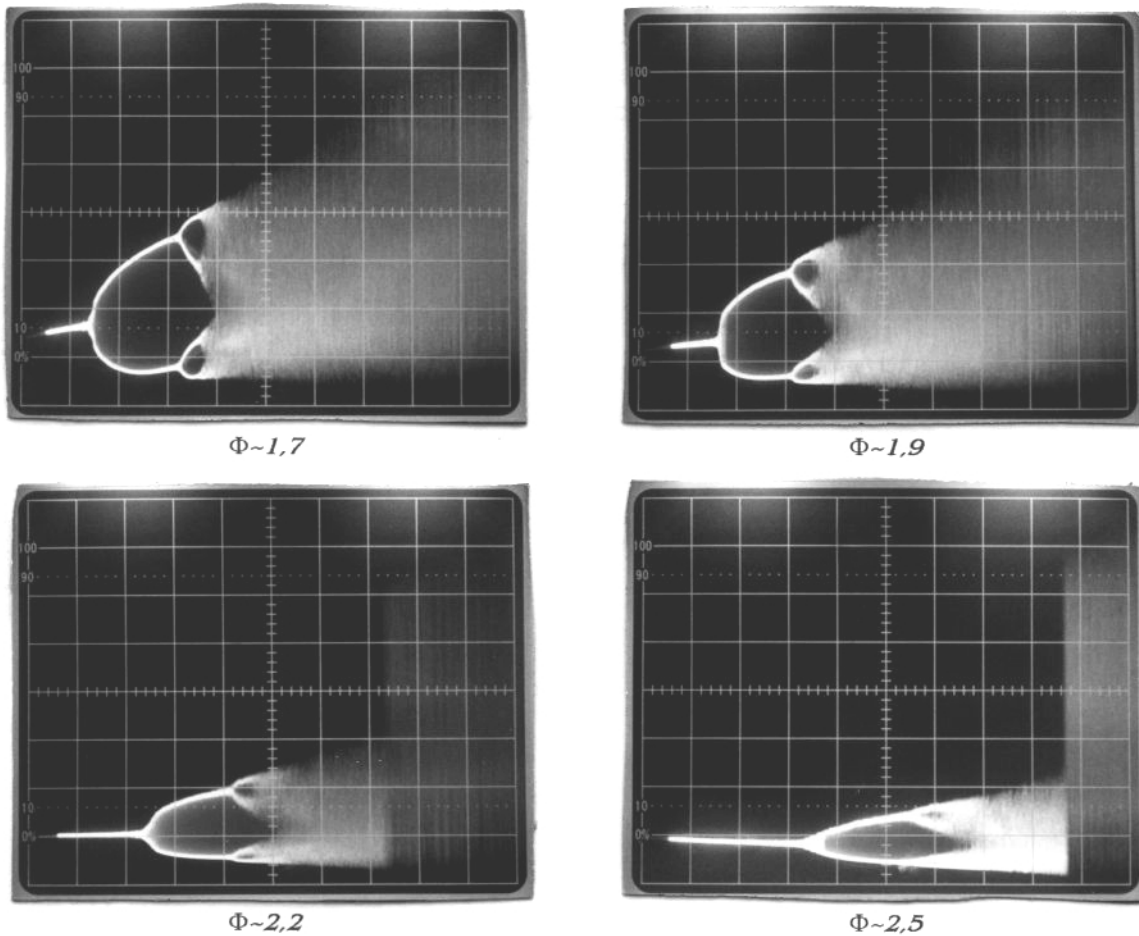
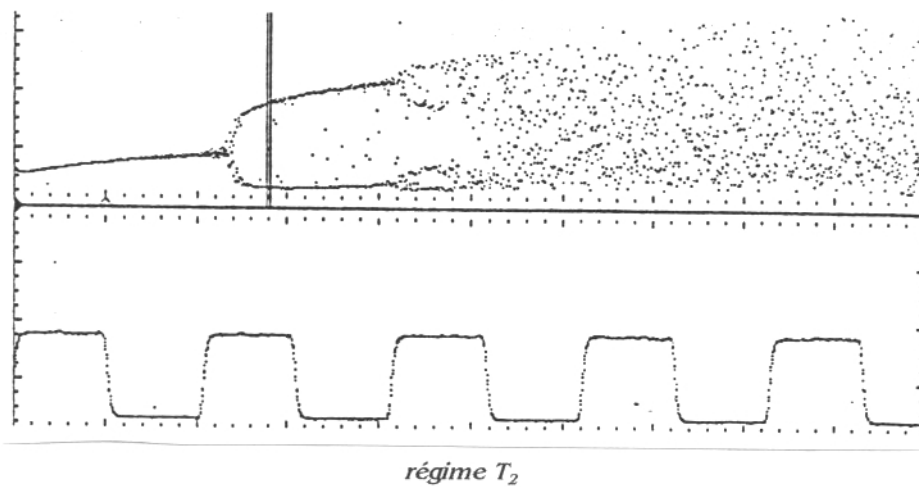


Figure V.16 : Diagrammes de bifurcation expérimentaux.

Un mode de représentation de l'oscilloscope *HP2232* permet l'observation simultanée du signal sur 2 échelles de temps. La figure V.17 illustre quelques échantillons de ce mode. Il est ainsi possible d'observer l'allure temporelle d'une abscisse particulière sur le diagramme de bifurcation. On reconnaît sur les exemple les modes T_2 , T_4 , chaos en T_4 , chaos en T_2 , chaos entièrement développé.



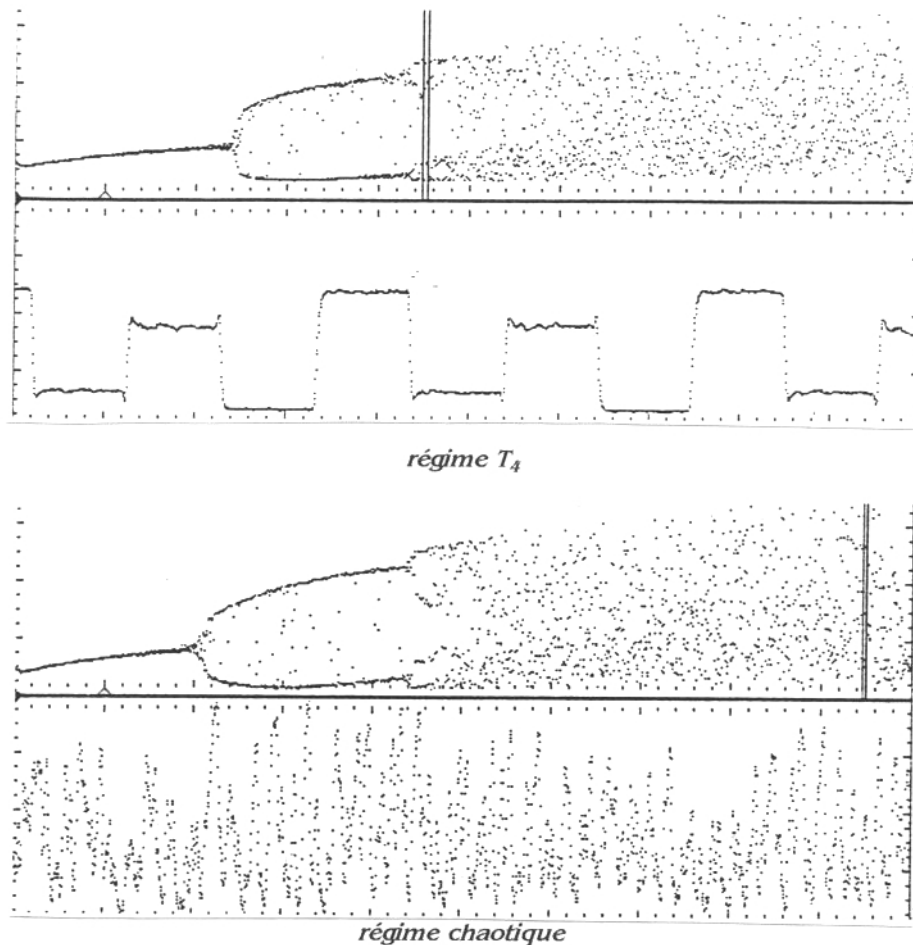


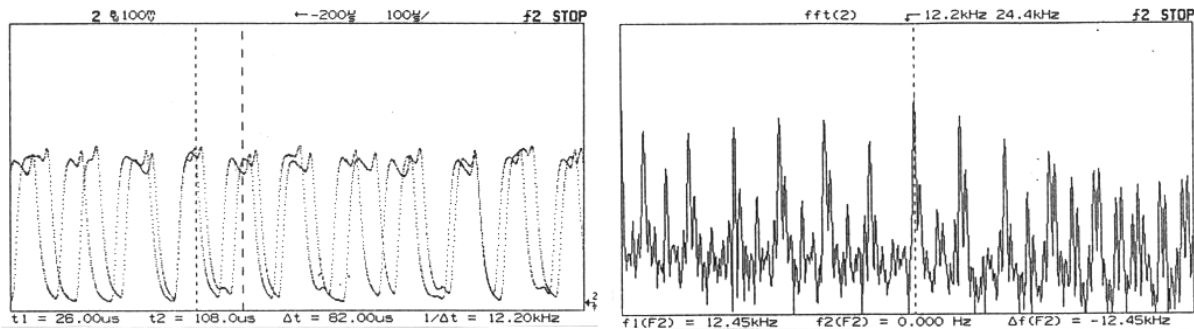
Figure V.17 : Diagrammes de bifurcation et double échelle de temps.

3. Discussions

D'un point de vue plus fondamental, une observation originale a pu être faite lors du tracé des diagrammes de bifurcation. La commande du paramètre β ayant été faite par un signal en triangle, nous avons pu tracer des diagrammes par valeurs décroissantes du paramètre de bifurcation. Des régimes dynamiques différents (figure V.18) sont alors apparus, semblables à ceux décrit au chapitre IV, à la figure IV.25. Il s'agit des évolutions classiques en T_2 ou T_4 , mais avec une structure périodique de fréquence plus élevée. Nous avons supposé que l'apparition de ces modes était favorisé par des conditions initiales (modes dynamiques pour les β antérieurs) riches en hautes fréquences. Lorsque β est croissant, le système part d'un état de point fixe stable, pour lequel les fréquences élevées sont absentes ; les modes correspondants ne sont donc pas excités et ne peuvent apparaître.

Les résultats qualitatifs des formes de diagrammes de bifurcation ont été interprétés comme une bonne correspondance quantitative entre le système dynamique expérimental, et le modèle théorique continu. Cette hypothèse s'appuie sur le fait que les résultats présentés sont très différents d'autres diagrammes de bifurcation initialement obtenus. Ces premiers résultats ont révélé de légers dysfonctionnements de certains éléments de l'oscillateur. Malgré ces problèmes, des régimes dynamiques identiques et un scénario de cascade par dédoublement

ont été observés. Mais l'allure globale des diagrammes de bifurcation ne s'approchait pas autant des calculs théoriques que les résultats de la figure V.16.



V.18.1 : évolution temporelle

V.18.2 : spectre

Figure V.18 : Régimes dynamiques à composantes élevées en fréquence, obtenu pour une évolution de β par valeurs décroissantes.

Cette remarque nous incite à penser qu'un système chaotique expérimental est relativement facile à obtenir, mais sa correspondance avec un modèle précis est plus délicate. En d'autres termes, de nombreuses clés de codage peuvent être réalisées, mais reproduire la même clé est une opération qui demande une connaissance précise des éléments constitutifs de la chaîne d'oscillation. Les essais de décodage ont effectivement montré que, sans une très bonne correspondance entre éléments de l'émetteur et du récepteur, la restitution correcte de l'information n'est pas possible.

II. Système complet de cryptage

Les premiers résultats obtenus à l'aide du système de décodage avec asservissement des conditions initiales d'un générateur de chaos local n'ont pas été reportés ici, leur qualité étant bien inférieure à ce que permet la dernière version du montage.

A. Réalisation du récepteur

1. Rappel du principe, aspects expérimentaux

a. Schéma de principe

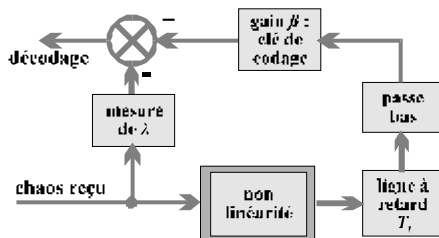


Figure V.19 : Opérations à effectuer pour le décodage.

Le détail du principe a été décrit au chapitre III. Les opérations nécessaires au décodage sont rappelées à la figure V.19. Il s'agit pratiquement de convertir la longueur d'onde chaotique comportant l'information en signal électrique. On soustrait ensuite à ce signal le résultat d'un calcul dynamique non linéaire effectué à partir du même signal, à un instant T -antérieur.

La réalisation du calcul de dynamique non linéaire consiste à dupliquer ce qui déjà été fait pour la mise en oeuvre du générateur de chaos. La transformation de la longueur d'onde en signal électrique correspond à la fonction inverse réalisée par la diode laser dans l'émetteur.

b. Mesure de la longueur d'onde

La détection de longueur d'onde λ est faite à l'aide d'un filtre biréfringent, dont la périodicité T_λ est grande par rapport à la plage de variation $\Delta\lambda$ du chaos. En modifiant légèrement l'inclinaison de la lame de retard 800 μm , on change sensiblement le chemin optique, ce qui revient à translater sur l'axe des longueurs d'onde la caractéristique spectrale du filtre. On peut ainsi ajuster cette caractéristique pour qu'une de ses parties linéaires (point d'inflexion de la cannelure) soit centrée sur la plage de variation en λ du chaos détecté. La puissance optique détectée en sortie de ce filtre dépend alors linéairement de la variation en longueur d'onde :

$$P_\lambda \cong P_0 \cdot \left(1/2 + \frac{\pi \cdot \Delta_{0,8} \cdot (\Delta\lambda)}{\lambda_0^2} \right) \quad (V.8)$$

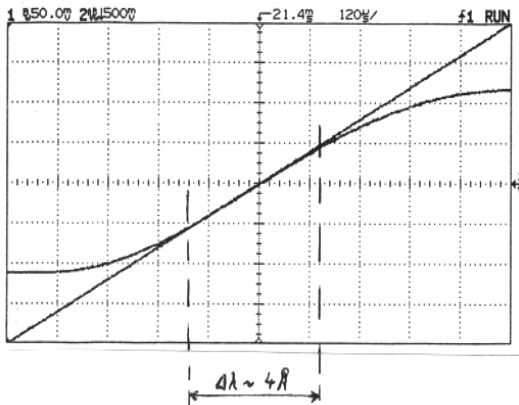


Figure V.20 : Caractéristique expérimentale du détecteur de longueur d'onde : signal de mesure en fonction du signal de modulation de I_{DBR} .

La lame de retard optique 0,8 mm (traitée A.R.) utilisée convient bien pour la plage de variation de 0,2 nm en longueur d'onde (évolution du chaos sur une période de la non linéarité). En considérant le terme cubique du développement de la cannelure dans le voisinage de sa partie linéaire, l'écart relatif au comportement linéaire a été estimé à 3 % environ. La caractéristique dépend explicitement de la puissance d'entrée du filtre. Le même système de compensation des fluctuations AM a été utilisé, la commande électronique étant de toute façon déjà réalisée pour la

partie « transformation non linéaire » en longueur d'onde du détecteur.

La figure V.20 est le tracé expérimental de la caractéristique de ce filtre biréfringent pour une grande variation en longueur d'onde ($\Delta\lambda \sim 1 \text{ nm}$) de la source DBR. On observe effectivement un bon comportement linéaire si cette plage est réduite à 2 Å. La lame utilisée a été caractérisée comme celles réalisant les autres filtres biréfringents, les valeurs numériques mesurée sont (à 5‰ près) :

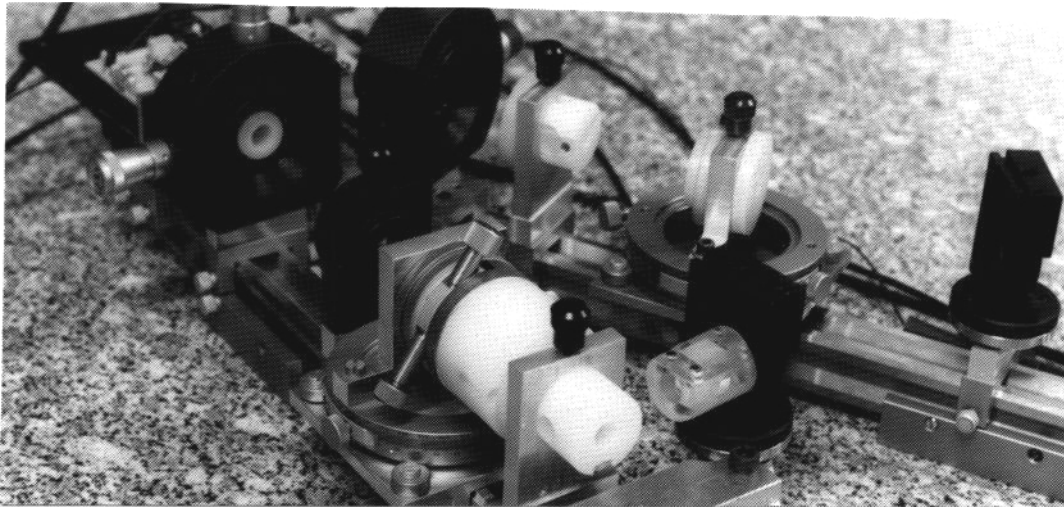
$$\Delta = 903 \mu\text{m}$$

$$T_\sigma = 1107 \text{ m}^{-1}$$

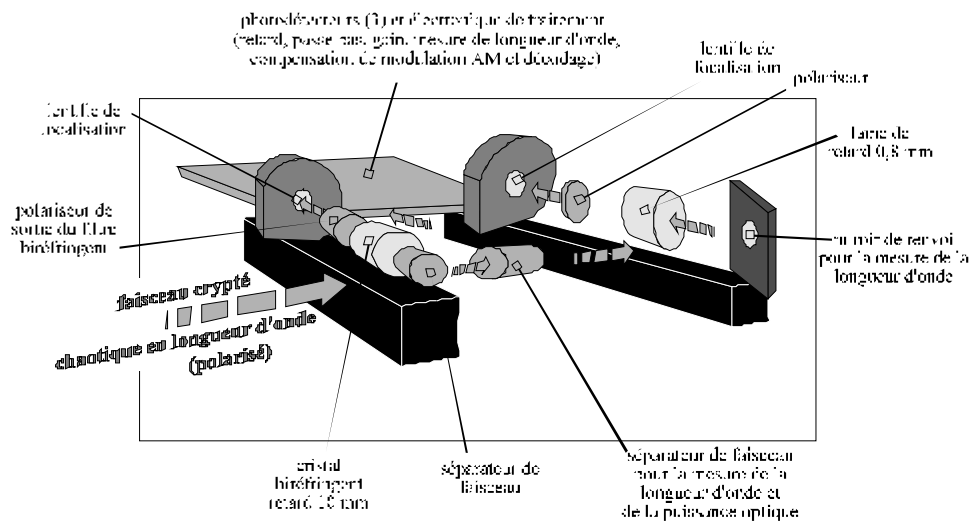
$$T_\lambda = 2,66 \text{ nm}$$

$$T_\nu = 332 \text{ GHz}$$

c. Montage expérimental



V.21.1 : Photographie de l'ensemble de décodage



V.21.2 : Repérage des principaux éléments

Figure V.21 : Montage expérimental du récepteur.

La figure V.21 représente une photographie du système de détection et de décodage avec le détail des différents éléments. Le montage se divise en 2 branches optiques, l'une à droite pour la détection de la longueur d'onde, et l'autre à gauche pour la transformation non linéaire en longueur d'onde à l'aide du même filtre biréfringent que celui utilisé à l'émetteur. On retrouve de nouveau un séparateur qui prélève une partie du faisceau d'entrée de la non linéarité. Ce prélèvement sert à mesurer la puissance optique d'entrée et à effectuer la compensation automatique de modulation AM. Dans la cas de la détection, un tel système permet de s'affranchir non seulement des fluctuations de puissance de la source, mais aussi de celles introduites éventuellement par la ligne de transmission.

La plaquette électronique de détection contient 3 photodiodes, une pour la mesure de la transformation non linéaire, une pour la mesure de la puissance optique avant cette transformation, et une 3^{ème} mesurant la variation en longueur d'onde à l'aide du principe décrit en (b.).

L'étage final du décodeur est un simple soustracteur, dont la sortie peut éventuellement être envoyée sur un haut parleur pour vérifier de manière audible la qualité du décodage.

2. Réglages de l'appariement sur l'émetteur

Les réglages préliminaires consistent à injecter correctement les faisceaux dans les différents composants optiques et sur les photodiodes. Il faut ensuite donner des consignes adéquates aux systèmes d'asservissement permettant de générer la commande de compensation automatique de modulation AM.

Le protocole utilisé pour l'appariement consiste à mettre l'émetteur en régime chaotique et à observer à l'oscilloscope en Lissajous, les paires de signaux équivalents de l'émetteur et du récepteur, tout au long du traitement électronique. Le récepteur est correctement réglé sur les paramètres de l'émetteur, si chaque couple de signaux donne la droite $y=x$ à l'oscilloscope.

Le premier signal à observer est la détection de la transformation non linéaire. La condition d'obtention de la première bissectrice est l'égalité des retards optiques de chaque filtre biréfringent. Ce retard peut être expérimentalement ajusté côté récepteur à l'aide d'une platine de rotation (précision $\delta\theta=10 \mu rd$) agissant sur la lame dans un plan horizontal : ce réglage revient à apparier les 2 paramètres Φ de chaque montage, avec une précision (différentiation de la relation (II.22) chap. II) :

$$\Phi = \frac{\pi \cdot (n_e - n_o) \cdot L \cdot \cos(\theta)}{\lambda_0} \quad [\text{mod.}\pi] \Rightarrow \delta\Phi \approx \frac{\pi \cdot (n_e - n_o) \cdot L}{\lambda_0} \cdot \theta \cdot \delta\theta \quad (V.9)$$

Cette précision suffisante est loin d'être superflue, puisque la molette de réglage fin doit pratiquement être utilisée pour obtenir une droite $y=x$ correcte à l'oscilloscope.

Le retard temporel est supposé être réalisé de manière précise. Dans le cas d'une ligne à retard par mémoire CCD, il suffit d'avoir des horloges d'échantillonnage de bonne qualité. Pour éviter d'avoir à réaliser 2 horloges identiques, ce qui ne présente pas de problème technologique de faisabilité (les quartz électroniques sont suffisamment fiables), nous avons utilisé la même sortie TTL d'un GBF pour l'émetteur et le récepteur. Dans le cas d'une réalisation du retard temporel par fibre, les longueurs de fibre en question sont suffisamment grandes pour disposer d'une bonne précision relative dans la longueur de fibre à couper. Une fibre coupée au millimètre près sur une longueur de 20 mètres ($T=0,1 \mu s$) correspond à une précision relative par rapport à une constante de temps $\tau=T/60=1,7 \text{ ns}$ (voir chap. II), d'environ 3 ‰.

La constante de temps du passe-bas est réglée en essayant d'obtenir une ellipse aussi plate que possible en observant toujours en Lissajous les signaux respectifs de l'émetteur et du récepteur après le passe-bas.

Enfin le réglage du paramètre de bifurcation dépend à la fois de la valeur de β à l'émetteur, et de la sensibilité de la détection de longueur d'onde. Un ajustement optimum est atteint en faisant fonctionner le récepteur en décodeur.

B. Performance du décodage

1. Erreur sans signal informatif

Une fois les paramètres T , Φ , et τ correctement ajustés, il suffit, pour régler β , de chercher un minimum de bruit de détection en sortie de la soustraction de décodage, lorsqu'aucune information n'est mélangée dans l'émetteur. Le cas théorique idéal correspond à un signal nul. L'émetteur et le récepteur effectuent alors le même calcul analogique de dynamique non linéaire. Le premier fonctionne en oscillateur puisqu'il réutilise son résultat pour effectuer un nouveau calcul au bout d'un temps T . Le second fonctionne par contre en calculateur passif, ce sont à chaque fois les conditions initiales fournies par l'émetteur qui lui servent d'arguments.

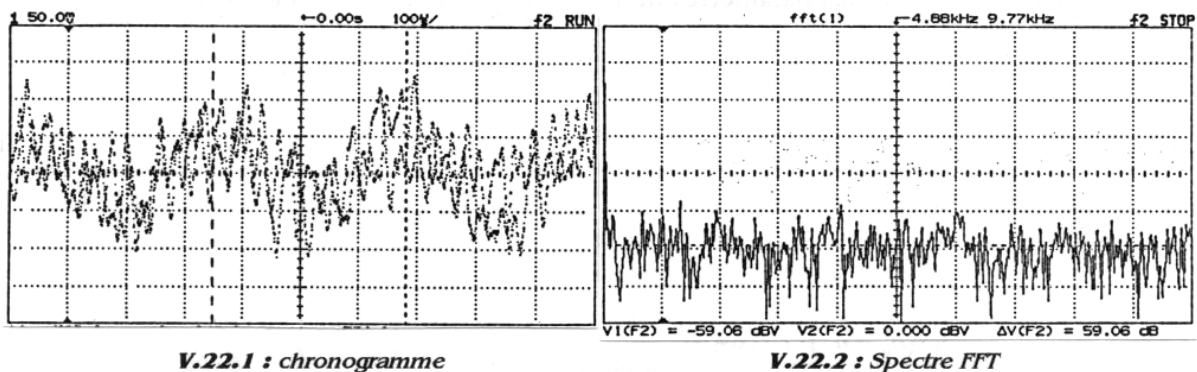


Figure V.22 : bruit résiduel de décodage et bruit de masquage.

Du fait des inévitables imprécisions dans les multiples réglages, il subsiste un bruit de décodage qui possède un minimum en fonction des paramètres β et Φ . La figure V.22 représente un exemple des amplitudes expérimentales du bruit de décodage et du « bruit » de masquage. Ce dernier correspond à l'un des 2 arguments de la soustraction de décodage, c'est aussi le signal chaotique. La mesure à partir de l'analyse spectrale donne un résultat de rapport $(\text{Masquage}/\text{Bruit})_{\text{dB}}$ d'environ 18 dB.

2. Résultat de codage / décodage

a. Signal sinusoïdal

Cet essai expérimental nous a permis de faire une comparaison qualitative rapide par rapport aux résultats des simulations. Nous avons pu voir d'une part la déformation d'une sinusoïde décodée, et d'autre part le résultat du masquage grâce à une analyse spectrale FFT. Ces résultats sont représentés sur les figures V.23.

La fréquence de la sinusoïde peut être choisie n'importe où dans la bande de fréquences occupée par la dynamique chaotique. L'amplitude de la sinusoïde est légèrement inférieure à celle du signal chaotique (-3 dB environ), de manière à y être noyée. On mesure un rapport signal sur bruit de la sinusoïde décodée de 15 dB environ, ce qui traduit bien la relation (III.14) exprimée au chapitre III, compte tenu de la mesure du rapport $(\text{Masquage}/\text{Bruit})_{\text{dB}}$, de 18 dB.

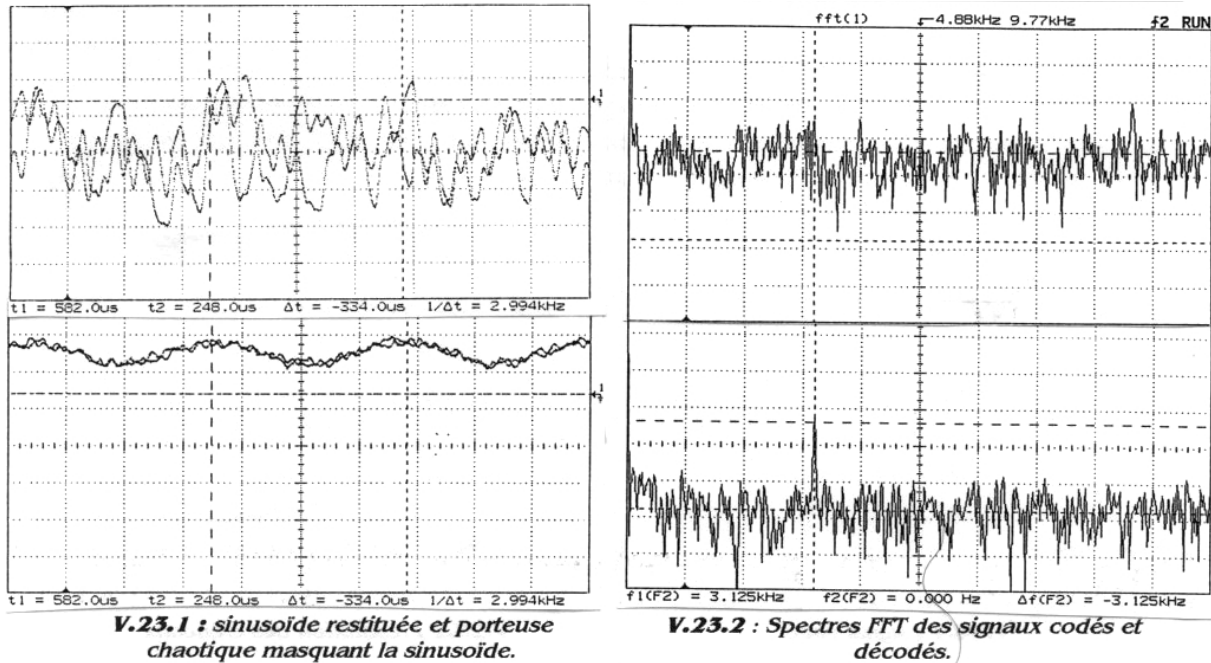


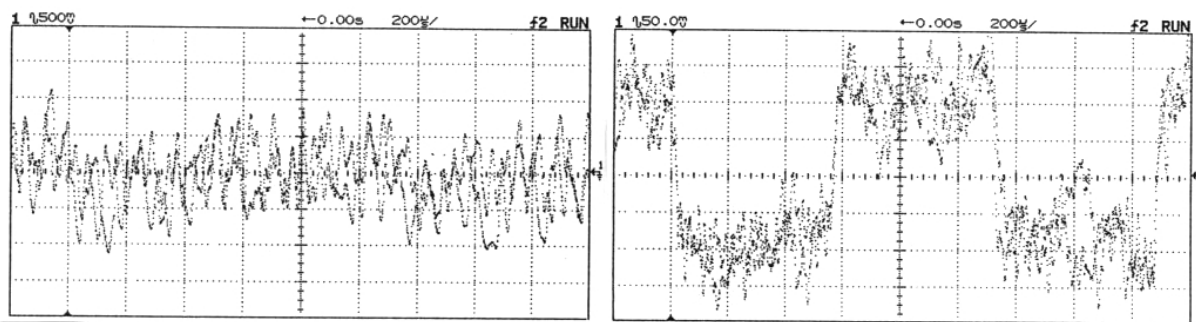
Figure V.23 : résultats d'un codage de signal sinusoïdal.

Un résultat intéressant reste à confirmer d'un point de vue théorique : nous avons essayé de rendre le régime plus chaotique en augmentant le paramètre de bifurcation de l'émetteur. Pour continuer à décoder correctement, le gain du récepteur a également été augmenté. Alors que nous pensions assister à une augmentation simultanée du niveau de l'information décodée et de celui du bruit de décodage, seul le signal décodé s'est accru notablement : la qualité du décodage semble avoir été améliorée. Cette observation est doublement intéressante, puisqu'en augmentant le paramètre de bifurcation, on améliorerait à la fois la qualité du décodage, et la qualité du codage (plus grande complexité de la dynamique chaotique). Les résultats de mesure qui n'ont pu être insérés dans ce document donnent un rapport (Signal/Bruit)_{dB} d'environ 30 dB.

b. Créneaux : signal numérique

Compte tenu du bruit de décodage qui subsiste dans ce premier démonstrateur, il semble plus intéressant d'envisager à court terme (en attendant des perfectionnements), le codage de signaux numériques binaires. Si le bruit de décodage n'est pas trop important, une remise en forme des signaux digitaux est possible, et la qualité de la transmission est bien meilleure. La figure V.24 représente un essai de codage d'un signal en créneaux symbolisant des niveaux logiques 0 et 1. L'information est effectivement difficilement décodable lorsque le signal est masqué, et le signal décodé permet de reconnaître facilement les transitions des niveaux bas vers les niveaux hauts.

Un aspect intéressant à déterminer concerne le choix du temps-bit par rapport à la constante de temps de la dynamique chaotique. Les quelques essais qui ont pu être faits semblent montrer que des temps-bit assez proches de τ (tout en restant supérieurs) donnent lieu à un meilleur masquage, et à une meilleure qualité de restitution.



V.24.1 : signal codé.

V.23.2 : restitution des créneaux.

Figure V.24 : codage binaire, chronogrammes.

c. Signal vocal

Même si la gamme de fréquence dans laquelle a été réalisée le démonstrateur est très éloignée des gigahertz des télécommunications optiques actuelles, elle a l'avantage d'être assez parlante d'un point de vue démonstratif. Une information audio analogique permet de juger directement de la qualité audible d'une information décodée.

Le simple branchement de la sortie décodée sur un petit haut parleur dévoile sans problème un morceau musical, ou exprime avec la même facilité un message parlé. Le bruit de décodage correspond à un souffle continu audible lorsqu'aucune information n'est insérée côté émetteur. L'information noyée dans le chaos, c'est-à-dire le codage, peut être écoutée en coupant simplement un des 2 faisceaux optiques nécessaires au décodage : le résultat ressemble à la sortie d'un poste FM sans station d'émission.

En coupant côté émetteur le faisceau de sortie du filtre biréfringent, on interrompt l'oscillation chaotique, seul le message à coder, sans le masquage, est transmis au récepteur : on a réalisé une transmission par modulation de fréquence optique. La mesure de la longueur d'onde réalise la démodulation. Le signal audible résultant est un son de bien meilleure qualité, sans bruit de fond, mais qui n'a pas été codé.

Ce montage a aussi permis d'un point de vue physique et pédagogique, de présenter de manière sonore la signification d'un diagramme de bifurcation, les cascades par dédoublement (apparition de sons plus graves, les sous-harmoniques), ou encore la nature bruitée d'un régime chaotique, l'aspect même qui a été utilisé dans l'application réalisée.

CONCLUSION :
BILAN, PERSPECTIVES

Ce projet de cryptage qui a été mené au laboratoire d'Optique P.M. Duffieux a débuté il y a 3 ans, avec pour seul point de départ l'idée de générer un chaos en longueur d'onde à l'aide d'une source laser accordable, en suivant un schéma expérimental basé sur les travaux d'Ikeda. Nous avons réussi à appliquer ces principes pour réaliser un démonstrateur de codage par chaos en longueur d'onde. Les performances du système sont encore modestes, mais le principe existe et a été démontré expérimentalement.

A partir de cette première réalisation, plusieurs voies de recherche sont à explorer, dans le domaine de la cryptographie, dans celui des transmissions optiques en longueur d'onde, et bien sûr dans celui de la théorie du chaos.

En effet, un travail de fond est nécessaire pour mieux caractériser les principes de codage qui ont permis le fonctionnement du démonstrateur. Ceux-ci sont encore relativement flous, et demandent à être situés par rapport aux méthodes habituelles de codage. Pour cela il serait utile de monter une collaboration avec des chercheurs compétents dans le domaine de la cryptographie. Le cryptage par masquage chaotique a besoin d'être caractérisé pour évaluer son degré de confidentialité. Ceci serait l'occasion, comme nous l'avons déjà évoqué, de relier certaines grandeurs caractéristiques du chaos (dimension de l'attracteur, entropie, ou, exposants de Lyapounov) à une mesure de la confidentialité. Il serait intéressant également de chercher des moyens pour casser le codage, c'est-à-dire effectuer une cryptanalyse du système. En fonction des résultats de la cryptanalyse et de la recherche des critères de confidentialité, des méthodes de codage de deuxième génération, plus complexes, pourraient être développées.

D'un point de vue « systèmes de télécommunications », ce travail, encouragé par France Telecom demande à prouver sa capacité à être réalisé dans un environnement réel, après avoir montré sa faisabilité en laboratoire. Différents points techniques et technologiques restent à éclaircir. L'influence des perturbations sur la ligne de transmission n'a pas encore été étudiée ; il s'agit notamment d'évaluer l'importance des phénomènes de dispersion pour ce mode particulier de transmission analogique en longueur d'onde. Une adaptation spécifique du montage à la transmission numérique est envisageable, pour augmenter d'une part la confidentialité, et d'autre part la qualité de décodage (Chaos Shift Keying). La qualité du décodage, analogique ou numérique, semble pouvoir être encore nettement améliorée en augmentant le nombre de périodes de la fonction non linéaire parcourues par la variable dynamique.

Le démonstrateur a été réalisé en essayant de retrouver expérimentalement un comportement aussi proche que possible d'une loi dynamique chaotique très simple. La réalité appliquée ne peut pas toujours se permettre le luxe de cette simplicité, les modèles réels étant en général plus complexes. Par exemple, la dynamique d'un système de transmission réel (diode laser) suit en général une loi du second ordre. Même si le régime chaotique existe en général toujours dans ces conditions, il peut présenter certaines caractéristiques différentes qui demandent à être étudiées théoriquement et expérimentalement.

Les potentialités de l'utilisation de la variable longueur d'onde doivent être maintenant explorées. Il s'agit de montrer expérimentalement qu'il y a autant de clés de codage que de fonctions non linéaires réalisables sur la variable longueur d'onde. Dans un premier temps, une adaptation rapide de l'oscillateur actuel peut être faite pour utiliser une non linéarité de type Fabry-Pérot. Ensuite, des non-linéarités

quelconques pourront être insérées à l'aide d'un filtre d'intensité placé dans un montage à double dispersion. Ces filtres peuvent être par exemple réalisés de manière très souple par des matrices adressables à cristaux liquides. Un changement continu du profil de ces filtres au cours de l'évolution chaotique est aussi une des voies à explorer en vue de la réalisation de méthodes de codage plus complexes.

Enfin, une réalisation idéale du générateur de chaos serait constituée d'un ensemble tout optique de la chaîne d'oscillation. Cette possibilité est loin d'être utopique, et des travaux sont en cours à Besançon pour étudier expérimentalement l'accord en longueur d'onde d'une source laser soumis à une contre-réaction optique. Si l'on arrivait à accorder le laser par l'intermédiaire du taux de puissance réinjecté dans la puce, un montage à cavité externe comprenant une non-linéarité en longueur d'onde est directement envisageable pour générer du chaos tout optique. Le temps de parcours du faisceau dans la cavité externe correspond au retard temporel, et le temps de réponse du phénomène d'accord joue le rôle de la constante de temps. La non-linéarité à insérer dans la cavité externe est du même type que celles que l'on peut utiliser dans le démonstrateur déjà réalisé. Ce type de montage posséderait des performances inégalées en terme de rapidité de codage.

BIBLIOGRAPHIE

Introduction

- [i.1] P. Bergé, Y. Pomeau, M. Dubois-Gance, 1994, "Des rythme au chaos", Ed. Odile Jacob
- [i.2] R.M. May, June 1976, "Simple mathematical models with very complicated dynamics", Nature, vol.261
- [i.3] James Gleick, 1989, "La théorie du chaos", Ed.
- [i.4] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, 1988, "L'ordre dans le chaos", Ed. Hermann
- [i.5] Nice 1977, "Rencontre entre physiciens...", Journal de Physique, C5-1978, p.25

chapitre I :

- [I.1] R.H. Abraham, 1992, "Dynamics, the geometry of behavior" Ed. Addison-Wesley
- [I.2] C.C. Hoppensteadt, 1992, "Analysis and simulation of chaotics systems", Ed. Springer
- [I.3] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, Jul. 1985, "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", Rev. Mod. Phys., vol. 57, n°3
- [I.4] Roux, Swinney, 1985, " ", , vol., n°
- [I.5] P. Manneville, 1991, "Structures dissipatives, chaos et turbulence", Aléa Saclay
- [I.6] Wolf, Swift, Swinney, Vastano, 1985, "Determining Lyapounov exponent from a time series", Physica 16D
- [I.7] Greene, Kim, 1987, "The calculation of Lyapounov spectra", Physica 24D
- [I.7] J.D. Farmer, 1982, "Chaotic attractor of an infinite-dimensional dynamical system", Physica 4D
- [I.8] J.D. Farmer, E. Ott, A Yorke, 1983, "The dimension of chaotic attractors", Physica 7D
- [I.9] Grassberger, Procaccia, 19, "Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal", Phys. Rev. A, vol.28, n°4
- [I.10] Namajunas, Tamasevicus, 1988, "Determination of the number of degrees of freedom of a chaotic system using an analog electronic device" Litovskij Fisicheski Sbornik vol.28 n°3, p.401-403
- [I.11] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, H.M. Gibbs, Jan. 1986, "High-Dimension Chaotic Attractor of a Nonlinear Ring Cavity", Phys. Rev. Lett., vol.56, n°4
- [I.12] Bergé, Pomeau, Vidal, 1988, "L'ordre du chaos", Hermann
- [I.13] Recueil de publications, 1992, "Chaotic Oscillator -Theory and applications", T. Kapitaniak

chapitre II :

- [II.1] Octobre 93, revue "Pour la Science"
- [II.2] T. Matsumoto, L.O. Chua, M. Komuro, Aug. 1985, "The Double Scroll", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.32, n°8
- [II.3] M. Hasler, 1995, "Engineering chaos for encryption and broadband communication", Phil. Trans. of the Royal Society of London, Trans' A.
- [II.4] P. Celka, Aug. 1995, "Chaotic Synchronization and Modulation of Nonlinear Time Delayed Feedback Optical Systems", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.42, n°8

- [II.5] J. Duvernoy, J.P. Goedgebuer, H. Porte, 1987, "Bistabilité, multistabilité et chaos en longueur d'onde", Annales des Télécommunications (p.315) T.42, n° 5-6
- [II.6] K. Ikeda, Aug. 1979, "Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system", Optics Comm., vol.30, n°2
- [II.7] F.A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M; Giggs, R. L. Schoemaker, April 1982, "Bifurcations to chaos in optical bistability", Phys. Rev. A, vol.25, n°4
- [II.8] Y. H. Kao, N.M. Wang, H.M. Chen, Aug. 1994, "Mode Description of Routes to Chaos in External-Cavity Coupled Semiconductor Lasers", IEEE J.Quantum Electron., vol.30, n° 8
- [II.9] V. Annovazzi-Lodi, S. Donati, M. Manna, July 1994, "Chaos and Locking in a Semiconductor Laser Due to External Injection", IEEE J.Quantum Electron., vol.30, n°7
- [II.10] Mirasso, Feb. 1996, "Synchronization of chaotic semiconductor lasers : Application to encoded communication", IEEE Photon. Techn. Lett., vol.8, n°2
- [II.11] B. Dorizzi, B. Gramaticos, M. Le Berre, Y. Pomeau, E. Ressayre, A. Tallet, Jan. 1987, "Statistics and dimension of chaos in differential delay systems", Phys. Rev. A, vol.35, n°1
- [II.12] T. Takizawa, Y. Liu, J. Ohtsubo, Feb. 1994, "Chaos in a Feedback Fabry-Perot Interferometer", IEEE J.Quantum Electron., vol.30, n°2
- [II.13] K. Otsuka, K. Ikeda, May 1989, "Cooperative dynamics and functions in a collective nonlinear optical element system", Phys. Rev. A, vol.39, n°10
- [II.14] H.M. Gibbs, F.A. Hopf, D.L. Kaplan, R.L. Schoemaker, Feb. 1981, "Observation of Chaos in Optical Bistability", Phys. Rev. Lett., vol.46, n°7
- [II.15] R. Vallée, C. Delisle, Sept. 1985, "Mode description of the dynamical evolution of an acousto-optic bistable device", IEEE J.Quantum Electron., vol.21, n°9

chapitre III :

- [III.1] L.M. Pecora, T.L. Carroll, Feb. 1990, "Synchronization in Chaotic Systems", Phys. Rev. Lett., vol.64, n°8
- [III.2] L.M. Pecora, T.L. Carroll, Aug. 1991, "Driving systems with chaotic signals", Phys. Rev. A, vol.44, n°4
- [III.3] T.L. Carroll, March 1995, "Communicating with use of Filtered, Synchronized, Chaotic Signals", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.42, n°3
- [III.4] H. Dedieu, M.P. Kennedy, M. Hasler, 1993, "Chaos Shift Keying : modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.40, n°2
- [III.5] P. Celka, Aug. 1995, "Chaotic Synchronization and Modulation of Nonlinear Time Delayed Feedback Optical Systems", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.42, n°8
- [III.6] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, March 1990, "Controlling Chaos", Phys. Rev. Lett., vol.64, n°11
- [III.7] E.R. Hunt, Oct. 1991, "Stabilizing high-period orbits in a chaotic system : the diode resonator", Phys.Rev.Lett., vol.67, n°15
- [III.8] S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, May 1993, "Communicating with Chaos", Phys. Rev. Lett., vol.70, n°20

- [III.9] R. Roy, T.W. Murphy, T.D. Mayer, Z. Gills, March 1992, "Dynamical Control of a Chaotic Laser : Experimental Stabilization of a Globally Coupled System", Phys. Rev. Lett., vol.68, n°9
- [III.10] C. Mira, S. Gentil, R. Abraham, H. Kawakami, M. Hasler, C. Grebogi, L. Chua, Y. Kevrekidis, Y. Maistrenko, Sept. 1995, "Bifurcation, chaos, transformations non inversibles, applications", Ecole d'Automatique d'Eté de Grenoble, Laboratoire d'Automatique de Grenoble
- [III.11] K. Pyragas, Nov. 1992, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", Phys. Rev.A, vol.170, n°6
- [III.12] K. Pyragas, A. Tamasevicius, Aug. 1993, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", Phys. Rev.A, vol.180, n°1,2
- [III.13] T. Kapitaniak, Aug. 1994, "Synchronization of chaos using continuous control", Phys. Rev. E, vol.50, n°2
- [III.14] E. Gay, M. Le Ligne, D. Hui Bon Hoa, Nov. 1994, "Modélisation d'éléments optiques pour la simulation de systèmes de transmission", L'onde Electrique, vol.74, n°6
- [III.15] L. Pecora, Jul. 93, "Chaos in Communications", Proc. SPIE, vol.2038
- [III.16] W. Lu, R.G. Harrison, July 1994, "Controlling chaos using continuous interference feedback : proposal for all optical devices", Optics Comm., 109
- [III.17] N.J. Mehta, R.M. Henderson, Oct. 1991, "Controlling chaos to generate aperiodic orbits", Phys. Rev. A, vol.44, n°8
- [III.18] T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Dec. 1990, "Using Chaos to Direct Trajectories to Targets", Phys. Rev. Lett., vol.65, n°26
- [III.19] Th. Beth, D.E. Lazic, A. Mathias, Oct. 1993, "Cryptanalysis of Cryptosystems based on Remote Chaos Replication", Advance in Cryptology, Crypto'94
- [III.20] P.S. Lindsay, 1981, Phys. Rev. Lett., vol.47
- [III.21] G. Brassard, 1992, "Cryptologie contemporaine", Ed. Masson
- [III.22] U. Feldmann, M. Hasler, W. Schwarz, 1996, "Communication by chaotic signals : the inverse system approach ", Intern. Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 24
- [III.23] M. Hasler, 1995, "Engineering chaos for encryption and broadband communication", Phil. Trans. R. Soc. Lond. A

chapitre IV :

- [IV.1] K. Ikeda, K. Kondo, O. Akimoto, Nov. 1982, "Successive Higher-Harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback", Phys. Rev. Lett., vol.49, n°20
- [IV.2] K. Ikeda, K. Matsumoto, 1987, "High dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback", Physica 29D

chapitre V :

- [V.1] H. Shoji, Y. Arakawa, Y. Fujii, July 1988, "New bistable wavelength switching device using a two-electrode distributed feedback laser", Electron. Lett., vol.24, n°14
- [V.2] P. Correc, O. Girard, I.F. de Faria, Nov. 1994, "On the Thermal Contribution to the FM Response of DFB Lasers : Theory and Experiment", IEEE J.Quantum Electron., vol.30, n°

- [V.3] M. Kuznetsov, A.E. Willner, I. P. Kaminow, Oct. 1989, "frequency modulation response of tunable two-segment distributed feedback lasers ", Appl. Phys. Lett., vol.55, n° 18
- [V.4] M. Kuznetsov, March 1991, "High-Speed Frequency Modulation and Switching of Tunable Distributed Feedback Lasers with Two Active Segments ", IEEE J.Quantum Electron., vol.27, n°3
- [V.5] Xun Li, Wei-Ping Huang, Oct. 1995, "Simulation of DFB Semiconductor Lasers Incorporating Thermal Effect", IEEE J.Quantum Electron., vol.31, n°10
- [V.6] O. Nilsson, Y. Yamamoto, Feb. 1985, "Small-signal response of a semiconductor laser with inhomogeneous linewidth enhancement factor : Possibility of a flat carrier-induced FM response", Appl. Phys. Lett., vol.46, n°3
- [V.7] M.J. Chawki, A. Hamel, V. Tholey, Jan. 1993, "Demonstration of a high speed optical drop function using a tunable DFB laser", Electron. Lett., vol.29, n°2
- [V.8] M.J. Chawki, P. Pottier, R. Auffret, L. Berthou, 1992, "2Gbit/s Direct Detection Transmission System Using Optical Mode Switching in a Two Level DFB Laser", J.Opt.Comm., vol.13, n°3
- [V.9] J.M. Cooper, J. Dixon, M.S. Goodman, H. Kobrinski, M.P. Vecchi, M. Tur, S.G. Menocal, S. Tsuji, Sept. 1988, "Nanosecond-tunable double-section DFB laser for dynamic wavelength addressing applications", Electron. Lett., vol.24, n°19
- [V.10] H. Kobrinski, M.P. Vecchi, T.E. Chapuran, J.B. Georges, March 1990, "Fast Wavelength switching and simultaneous FSK modulation using tunable DBR laser", Electron. Lett., vol.26, n°5
- [V.11], June 1996, " ", IEEE J.Quantum Electron., vol.32, n°6 (p.953)
- [V.12] Wayne v. Sorin, Kok Wai Chang, G.A. Conrad, P.R. Hernday, June. 1992, "Frequency Domain Analysis of an Optical FM Discriminator", J. Light. Techn., vol.10, n°6
- [V.13] V. Kovanis, A. Gavrielides, Nov. 1995, "Instabilities and chaos in optically injected semiconductor lasers", Appl. Phys. Lett., vol.67, n°19
- [V.14] J. Jacquet, A. Olivier, D. Leclerc, J. Benoit, O. Le Gouézigue, L. Le Gouézigue, J.-L. Liévin, 1991, "Thermal contribution to wavelength tunability of multielectrode DFB lasers", OFC'91
- [V.15] J. Jacquet, J.-G. Provost, M. Sotom, O. Gautheron, F. Poingt, O. Le Gouézigue, D. Leclerc, C. Labourie, J. Benoit, April 1993, "Flat FM Response without thermal dip for an optimized two section phase tunable DFB laser", InP and related Materials, Paris
- [V.16] P.L. François, J.P. Goedgebuer, L. Larger, H. Porte, Jan. 1996, "Système de transmission optique mettant en oeuvre un cryptage par chaos déterministe", Brevet France Telecom n° 96 00084, Cabinet Regimbeau
- [V.17] L. Larger, A. Fischer, J.P. Goedgebuer, 1995, "Cryptage par commutation en longueur d'onde", Acte des Séminaires Action Scientifique, Ed. France Telecom, n°1
- [V.18] A. Fischer, L. Larger, J.P. Goedgebuer, 1996, "Commutation et Cryptage par commutation en longueur d'onde", Acte des Séminaires Action Scientifique, Ed. France Telecom, n°5
- [V.19] F. Delorme, *et al.*, Oct. 1991, "High Speed and High Density Wavelength Multichannel Butt-Jointed DBR Lasers", Electron. Lett., Vol 27, n°21

- [V.20] F. Delorme, *et al.*, Oct. 1992, "IM and FM Properties of a narrow-spectral-linewidth 1.5 μm Butt-Jointed DBR Transmitter", conférence ECOC'92, Berlin
- [V.21] P. Correc, Juillet 1991, "Modélisation et caractérisation de lasers à semi-conducteurs monofréquences continûment accordables en longueur d'onde", Thèse Université Paris XI Orsay
- [V.22] J. Jacquet, Juin 1992, "Contribution à l'étude de lasers semi-conducteurs multisections émettant à 1,5 μm accordable en longueur d'onde", Thèse Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications

GLOSSAIRE

Ce glossaire est issu d'une traduction personnelle d'un certain nombre de notions rencontrées au cours du travail de thèse. Il revêt donc plus un caractère indicatif, et ne prétend pas regrouper des définitions rigoureuses.

application logistique (ou quadratique) : $x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot [1 - x_n]$.

attracteur : sous-ensemble de l'espace des phases vers lequel tend asymptotiquement une trajectoire, après disparition des transitoires.

attracteur étrange : attracteur de volume nul, mais de dimension non entière, car il remplit de manière dense une région de l'espace des phases.

bassin d'attraction : ensemble de conditions initiales (sous-ensemble de l'espace des phases) dont les trajectoires (solutions) convergent vers un même attracteur.

bifurcation : changement de la nature topologique d'une trajectoire lors d'une variation d'un paramètre dynamique.

cascade : type de loi dynamique discrète non inversible (la relation entre x_n et x_{n-1} n'est pas univoque, bijective).

cascade par dédoublement : succession infinie de bifurcations du même type, une trajectoire périodique d'ordre k se transformant en une autre d'ordre 2 fois plus élevé, jusqu'à l'infini (succession de cycles d'ordre $(k \cdot 2^p)$, $p \rightarrow \infty$).

chaos : une dynamique chaotique possède au moins un exposant de Lyapounov positif (c'est-à-dire possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales).

coupe de Poincaré : permet d'abaissier d'une dimension l'espace d'observation d'un système dynamique ; une trajectoire de l'espace des phases de dimension n est transformée en une succession discontinue ("map") de points dans la coupe de Poincaré, sous-espace de dimension $(n-1)$.

dimension de recouvrement : plus petite dimension d'un espace des phases permettant de contenir l'ensemble des trajectoires d'un système dynamique ; entier directement supérieur ou égal à la dimension de l'attracteur le plus complexe du système dynamique.

espace des phases : espace permettant l'observation des trajectoires (continues) d'un système dynamique donné.

étirement-repliement : action généralement réalisée par une dynamique chaotique dans son espace des phases ; l'étirement permet d'avoir la propriété de SCI, et le repliement permet de maintenir la trajectoire chaotique dans une espace borné.

exposant de Lyapounov : nombre réel qui caractérise la stabilité (<0) ou l'instabilité (>0) d'une trajectoire solution d'un système dynamique ; il se calcule en considérant 2 trajectoires voisines, et en modélisant l'évolution dans le temps de leur écart par une loi exponentielle.

flot : trajectoires solutions d'un système dynamique continu (équation différentielle et non itération).

fractale : nom ou adjectif, caractérise la propriété d'auto-similarité d'une figure, quelque soit l'échelle d'observation de celle-ci.

masquage (d'information) : technique de codage qui utilise le fait de noyer le spectre d'un signal informatif à l'intérieur du spectre, plus étendu, d'un signal de codage ; dans le cadre de notre application, ce dernier signal répond à une loi dynamique chaotique.

paramètre de bifurcation : paramètre de la loi dynamique, par l'intermédiaire duquel on peut engendrer une bifurcation du comportement dynamique.

point d'accumulation : valeur du paramètre de bifurcation, dans le cas des systèmes dynamiques à bifurcations par dédoublement de période, pour laquelle on attend le dédoublement à l'infini des régimes cycliques, et au delà de laquelle démarrent les régimes chaotiques.

point fixe : point de l'espace des phases pour lequel toutes les dérivées temporelles de la loi dynamique sont nulles.

portrait de phase : voir coupe de Poincaré.

répulseur : ensemble instable, ou transitoire, de l'espace des phases.

répulseur étrange : répulseur qui remplit de manière dense une région de l'espace des phases ; une trajectoire peut rester très longtemps dans une telle région, son comportement est alors chaotique, mais instable, car elle finit toujours asymptotiquement par quitter cette région.

route (scénario) vers le chaos : manière avec laquelle un système dynamique bifurque progressivement vers un comportement chaotique à partir d'un comportement simple ou régulier, lorsqu'on fait varier de façon monotone et continue un paramètre de bifurcation.

séparatrice : courbe ou surface (de dimension $n-1$) dans l'espace des phases (de dimension n) qui définit la frontière entre 2 bassins d'attraction.

semi-cascade : type de loi dynamique discrète dont la relation entre l'ordre n et $n-1$ est bijective.

sensibilité aux conditions initiales (SCI) : propriété principale d'une dynamique chaotique, qui fait que 2 trajectoires chaotique voisines, ont tendance à s'écarter l'une de l'autre selon une loi exponentielle dans le temps.

singularité : voir point fixe.

trajectoire : ensemble des valeurs prises par la (les) variable(s) dynamique(s) pour une solution particulière d'une loi dynamique continue.

ANNEXES

Cette annexe regroupe un certain nombre de données techniques relatives à la réalisation expérimentale du système de transmission par chaos en longueur d'onde.