Algorithmique Distribuée
Algorithmes de vagues

Laurent PHILIPPE

Master 2 Informatique
Université de Franche-Comté
UFR des Sciences et Techniques

2013 / 2014

Sommaire

Les vagues

Principe

- Un algorithme de vague sert à prendre une décision après avoir parcouru l'ensemble des processus
- Il s'applique (s'intègre) à un calcul distribué

Généralités

- Cas d'utilisation possibles :
  - Algorithmes de terminaison
  - Diffusion/Collecte d'information
  - Démarrage de programmes distribués
  - Algorithmes de synchronisation
- Souvent dépendants de la topologie du réseau.

Les vagues

Hypothèses

- La topologie réseau est :
  - Fixe, aucun changement pendant le déroulement de l'algorithme
  - Sans orientation, échanges duplexes
  - Connectée, il y a un chemin entre chaque paires de processus
- Les échanges de messages sont asynchrones, fiables
- Pas de données, ni d'horloge partagées

Les vagues

Hypothèses

- Le calcul distribué est noté C
- Le calcul est un ensemble d'évènements, partiellement ordonné par une relation de causalité $\preceq$
- Le nombre d'évènements du calcul C est $|C|$
- Les évènements du processus p sont notés C_p
- Pour chaque processus, il existe un évènement interne appelé *decide*

Les vagues

Définition

Un **algorithme de vagues** échange un nombre fini de messages pour prendre une décision qui dépend causalement d'un évènement dans chaque processus.

Propriétés

Un algorithme de vague satisfait les trois propriétés suivantes :

1. **Terminaison** : chaque calcul est fini : $\forall C : |C| < \infty$
2. **Décision** : chaque calcul contient au moins un évènement *decide* : $\forall C : \exists e \in C : e$ est un évènement de décision
3. **Dépendance** : dans chaque calcul chaque évènement *decide* est précédé par un évènement dans chaque processus : $\forall C : \forall e \in C : (e$ est un évènement *decide* $\Rightarrow \forall q \in P \exists f \in C_q : f \preceq e)$

Les vagues

Définitions

- Un calcul dans un algorithme de vagues est appelé une **vague**
- Une vague est donc un flot de contrôle qui passe par tous les sites d'un système distribué et qui a pour but de prendre une décision
- Une vague est lancée à l'initiative d'un initiateur α, elle est déclenchée par une condition (évènement local) et elle retourne à l'initiateur
- Les processus qui ne sont pas initiateurs sont appelés **suiveurs**, ils sont impliqués dans l'algorithme par la réception d'un message qui déclenche l'exécution de l'algorithme
- On appelle **train de vagues** une succession de vagues.

Les vagues

Propriétés des algorithmes

- Centralisé vs. Distribué : l'algorithme est démarré par exactement un initiateur ou par plusieurs.
- Topologie, déterminante pour la définition de l'algorithme
- Données initiales :
  - Identité du processus : chq processus connaît son nom unique
  - Identité des voisins : chq processus connaît ses voisins
  - Direction des liens : lorsque que les liens ne sont pas full-duplex ou lorsqu'une direction leur est attribuée dynamiquement
- Nombre des décisions, dans certains algorithmes le nombre de processus exécutant un évènement decide peut varier
- Complexité, en nombre de message, calcul, taille des données échangées

Les vagues

Primitives de vague

Pour caractériser une vague, on définit 4 primitives :

- `lancer` (pour α) ;
- `retour` (pour α) ;
- `visite` (pour $\forall i \in \mathbb{P}$ et $i \neq \alpha$) ;
- `faire_suivre` (pour $\forall i \in \mathbb{P}$ et $i \neq \alpha$) ;

Propriétés

On note x_i^p l'exécution de la p-ème vague sur le site i alors :
$\forall p > 0, \forall i \neq \alpha$: $\texttt{lancer}_\alpha^p \rightarrow \texttt{visite}_i^p \rightarrow \texttt{faire\_suivre}_i^p \rightarrow \texttt{retour}_\alpha^p$
et $\forall p > 0$: $\texttt{retour}_\alpha^p \rightarrow \texttt{lancer}_\alpha^{p+1}$

Algorithme générique d'une vague

Soit une vague avec v valeur initiale et v' résultat après la vague

Pour c_α :

début

  répéter

    calcul locaux ...

    $v \leftarrow$ ...

    `lancer(v)`

    `retour(v')`

  jusqu'à *une condition sur* v'

fin

`visite(v)` : pour c_i avec $i \neq \alpha$

début

  calcul locaux ...

  $v' \leftarrow$ ...

  `faire_suivre(v')`

fin

Sommaire

Une vague sur un réseau complet

- Une clique est un réseau complet où un lien existe entre chaque paires de processus
- Algorithme simple : consultation (*polling*)
- L'initiateur demande à chaque voisin de répondre avec un message
- Il décide après la réception de tous les messages

Une vague sur un réseau complet

Exercice

Écrire l'algorithme de polling

Une vague sur un réseau complet

Algorithme avec les 4 primitives

var rec_α : entier **init** 0 (* Seulement pour l'initiateur *)

`lancer(v)` : pour c_α
début
  $v \leftarrow$ ...
  for $q \in Neigh_\alpha$ **do**
    envoi jeton(v) à q
  while $rec_\alpha < \sharp Neigh_\alpha$ **do**
    recevoir(jeton(v'))
    $rec_\alpha = rec_\alpha + 1$
  decide(v')
fin

`visite(v)` : pour c_i avec $i \neq \alpha$
début
  recevoir le jeton(v) de α
  $v' \leftarrow$ ...
  `faire_suivre(v')` : envoyer le jeton(v') à α
fin

Sommaire

Une vague sur un anneau

Principe

- Anneau unidirectionnel : tous les sites i connaissent leur suivant $succ_i$
- La visite des différents sites se fait de manière séquentielle
- La vague est matérialisée par le passage d'un jeton (successeur)
- L'algorithme est centralisé

Une vague sur un anneau

Exercice

Écrire l'algorithme de l'anneau

Une vague sur un anneau

Algorithme avec les 4 primitives

`lancer(v)` : pour c_α
début
  $v \leftarrow \ldots$
  envoyer le jeton(v) à $succ_\alpha$
fin

`retour(v)` : pour c_α
début
  recevoir le jeton(v')
  decide(v)
fin

`visite(v)` : pour c_i avec $i \neq \alpha$;
début
  recevoir le jeton(v) ;
fin

`faire_suivre(v')` :pour c_i avec $i \neq \alpha$;
début
  $v' \leftarrow \ldots$;
  envoyer le jeton(v') à $succ_i$;
fin

Une vague sur un anneau

Preuve que l'algorithme sur un anneau est un algorithme de vague

Soit p_0 l'initiateur, chaque processus envoie au plus 1 message donc, au total, l'algorithme échange au plus N messages et le calcul est **fini**.
Une configuration terminale est atteinte en un nombre fini d'étapes. Dans cette configuration :

- p_0 a déjà envoyé le jeton, il a dépassé l'instruction *envoyer* dans son programme.
- Aucun jeton n'est en transit sinon il pourrait être reçu et la configuration ne serait pas terminale
- Aucun processus ne possède le jeton sinon il n'aurait pas franchi l'instruction *envoyer*
- De ce fait p_0 a reçu le jeton et, puisque nous sommes en configuration terminale, il a exécuté l'instruction *decide* et la **décision** est vérifiée

La réception et l'envoi du jeton pour les processus $p \neq p_0$ précèdent la réception de p_0 donc la condition de **dépendance** est vérifiée.

Sommaire

Une vague sur un arbre

Algorithme

- La racine de l'arbre est c_α,
- Les messages circulent dans les deux sens,
- Un processus agrège les informations reçues à l'aide de la fonction $V' = agrege(V)$, où V est l'ancienne valeur et V' la nouvelle,
- Un processus remonte l'information vers son père si il a reçu tous les retours de tous ses fils,
- Exercice : écrire l'algorithme de vague pour les arbres dans le cas où l'initiateur est la racine et dans le cas où l'algorithme est initié par toutes les feuilles

Une vague sur un arbre

Algorithme initié par la racine

`lancer(v)` : pour c_α
début
  $v \leftarrow \ldots$
  $\forall x \in fils_\alpha$: envoyer `aller`(v) à c_x
fin

`retour`(V') : pour c_α
début
  $\forall x \in fils_\alpha$ `recevoir`(V') de c_x
  decide(V')
fin

`visite(v)` : pour c_i avec $i \neq \alpha$
début
  recevoir `aller`(v) de c_{pere_i}
  $\forall x \in fils_i$: envoyer `aller`(v) à c_x
fin

`faire_suivre`(v') : (pour $i \neq \alpha$)
début
  $\forall x \in fils_i$ recevoir valeur W de c_x
  $V' = agregation(V', W)$
  envoyer `retour`(V') à $pere_i$
fin

Note : la valeur V transmise en montée de l'arbre peut être changée par le processus.

Une vague sur un arbre

Algorithme d'arbre initié par (toutes) les feuilles :

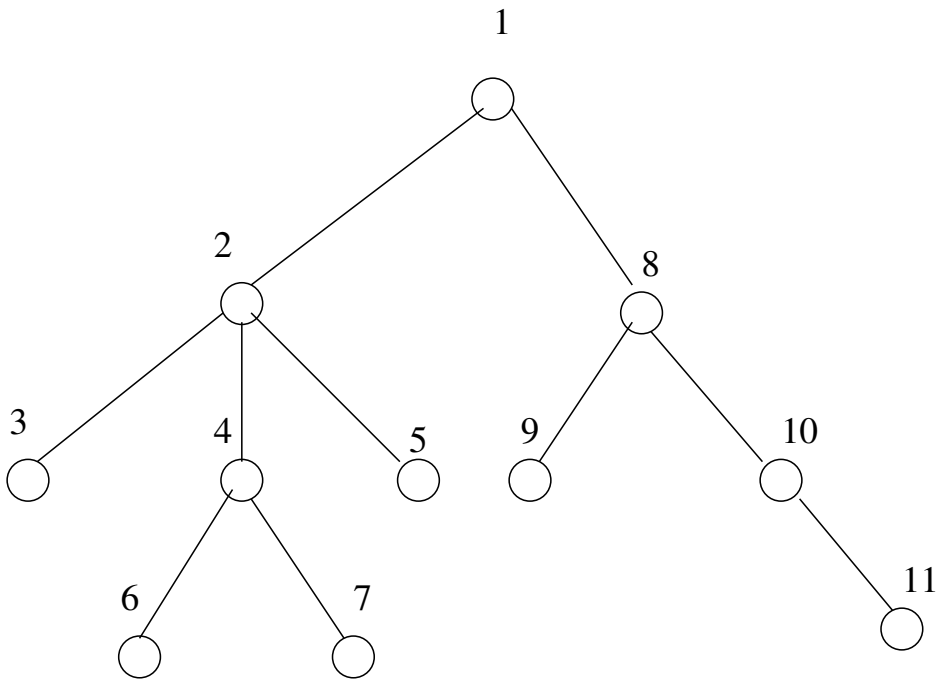
var $req_p[q], \forall q \in Neigh_p$: booléen **init** faux
(* $req_p[q]$ est vrai si p a reçu un message de q *)

$visite(V)$:
début
  tant que $\sharp(q : req_p[q] = faux) > 1$ **faire**
    reçoit $< tok >$ de q ; $rec_p[q] = vrai$
  (* il n'y a plus qu'un q_0 avec $req_p[q_0]$ est faux *)
  envoie $< tok >$ à q_0 tel que $rec_q[q_0]$ est faux
  reçoit $< tok >$ de q_0 ; $rec_p[q_0] = vrai$
  décide
  (* Retour de la décision aux autres processus *)
  pour $q \in Neigh_p, q \neq q_0$ **faire** envoie $< tok >$ à q
fin

Une vague sur un arbre

Exercice

Dérouler l'algorithme des feuilles avec l'arbre suivant



Sommaire

Algorithmes de vagues sur un réseau quelconque

Principe

- Le réseau est un graphe
- Les processus sont connectés entre eux de manière quelconque
- Chaque processus connaît uniquement ses voisins

Caractéristique

Propriétés du réseau influent sur les performances de l'algorithme

Algorithme Echo

Exercice

- L'algorithme est centralisé (lancé par un seul initiateur),
- L'initiateur diffuse des messages $< tok >$,
- A la réception du premier message, le père du processus est défini,
- Chaque processus compte les messages reçus,
- Lorsqu'il a reçu autant de messages que de voisins, il renvoie le message $< tok >$ à son père,
- Écrire l'algorithme,

Algorithme Echo

var rec_p : entier **init** 0 (* Compte le nombre de messages reçus *)
$father_p$: $\mathbb{P}$ **init** udef

Initiateur :
début
  pour $q \in Neigh_p$ **faire**
    envoie $< tok >$ à q
  tant que $rec_p < \sharp Neigh_p$ **faire**
    reçoit $< tok >$
    $rec_p = rec_p + 1$
  decide()
fin

Non-initiateur : ;
début
  reçoit $< tok >$ de q ;
  $father_p = q$; $rec_p = rec_p + 1$;
  pour $q \in Neigh_p, q \neq father_p$ **faire**
    envoie $< tok >$ à q
  tant que $rec_p < \sharp Neigh_p$ **faire**
    reçoit $< tok >$ de q ;
    $rec_p = rec_p + 1$;
  envoie $< tok >$ à $father_p$;
fin

Algorithmes de vagues sur un réseau quelconque

Remarque

- Définition implicite d'un arbre de recouvrement.

L'algorithme Phase

Généralités

- Algorithme décentralisé : un ou plusieurs initiateurs
- Sur un réseau quelconque, pour des liens unidirectionnels : les voisins de p sont répartis en deux ensembles :
  - in-voisins de p : ceux qui peuvent envoyer un message à p
  - out-voisins de p : ceux qui peuvent recevoir un message de p
- Nécessite pour les processus de connaître le diamètre du réseau D
- Mais l'algorithme fonctionne aussi avec une constante $D' > D$ à condition que tous les processus disposent de la même valeur, il est donc suffisant de connaître une borne supérieure
- Plus efficace si la valeur de D est exacte

L'algorithme Phase

Principe

- Chaque processus envoie exactement D messages à chaque out-voisin
- Le $i+1$ ième message pour chaque out-voisin n'est envoyé qu'après avoir reçu i messages de chacun des in-voisins
- Nécessite pour les processus de connaître le diamètre du réseau D
- Mais l'algorithme fonctionne aussi avec une constante $D' > D$ à condition que tous les processus disposent de la même valeur, il est donc suffisant de connaître une borne supérieure

Algorithme Phase

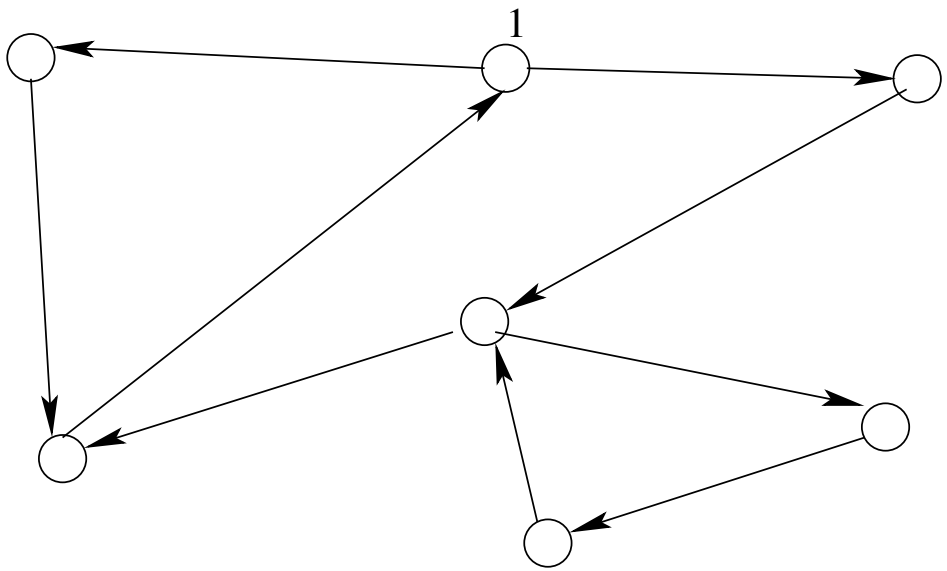
cons D : entier (* le diamètre du réseau *)
var $rec_p[q]$: $0..D$ **init** 0 $\forall q \in In_p$ (* Nombre de messages reçus de q *)
env_p : $0..D$ **init** 0 $\forall q \in Out_p$ (* Nombre de messages envoyes de p *)
In_p et Out_p (* Voisins de p *)

début
  if p *is initiateur* **then**
    pour $q \in Out_p$ **faire**
      envoie $< tok >$ à q
      $env_p = env_p + 1$
  tant que $min_q(rec_p[q]) < D$ **faire**
    reçoit $< tok >$ de q_0
    $rec_p[q_0] = rec_p[q_0] + 1$
    if $(min_q(rec_p[q]) \geq env_p) \wedge (env_p < D)$ **then**
      for $q \in Out_p$ **do**
        envoie $< tok >$ à q
        $env_p = env_p + 1$
  decide
fin

Algorithme Phase

Exercice

Dérouler l'algorithme Phase avec le graphe suivant



Sommaire

Algorithmes de traversée

Définition

Un algorithme de traversée est un algorithme vérifiant les propriétés suivantes :

- Il y a un seul initiateur qui lance une vague avec exactement 1 message
- Un processus qui reçoit un message, soit envoie un message soit décide
- L'algorithme termine chez l'initiateur
- Lorsque l'algorithme est terminé, chaque processus a au moins envoyé un message

Algorithmes de traversée

Propriétés

Un algorithme de traversée est un algorithme vérifiant les propriétés suivantes :

- Dans une configuration atteignable d'un algorithme de traversée il y a :
  - Soit un message en transit
  - Soit un processus qui a reçu un message et qui n'en a encore pas envoyé
- En général le message est, encore, un jeton qui passe de processus en processus

Algorithmes de traversée

Définition

- Parmi les algorithmes de traversée, la classe des algorithmes f-traversants est définie par : à chaque vague au moins $min(N, x+1)$ processus ont été visités après $f(x)$ passages de jeton.
- Par exemple l'algorithme sur l'anneau est un algorithme x-traversant car $x+1$ processus ont traité le jeton après x étapes et tous les processus l'ont fait après N étapes.

Algorithmes de traversée

Traversée d'un réseau complet

La traversée d'un réseau complet peut-être réalisée par une consultation séquentielle :

- Les messages sont envoyés un par un
- Le voisin suivant n'est consulté que lorsque le voisin courant a répondu au message
- Parcours des voisins un par un

Algorithmes de traversée

Théorème

L'algorithme de consultation séquentielle est un algorithme $2x$-traversant pour les réseaux complets

Preuve :

- Quand l'algorithme termine chez l'initiateur, chaque processus a envoyé une réponse.
- Le $(2x-1)$ ième message est la consultation de q_x et le $2x$ ième message est sa réponse.
- Ainsi quand $2x$ messages ont été échangés les $x+1$ processus $p, q_1, ..., q_x$ ont été visités.

Algorithmes de traversée

Algorithme de Tarry

- Algorithme de traversée de réseaux quelconques
- Basé sur un jeton
- Il est formulé à partir de deux règles :
  - R1 : un processus ne transmet jamais le jeton deux fois sur le même lien
  - R2 : un processus suiveur transmet le jeton à son père (le voisin dont il a reçu le jeton) seulement si il n'y a plus de lien permettant de respecter R1

Algorithme de Tarry

var $util_p[q]$: booléen **init** faux $\forall q \in Vois_p$ (* Indique si le voisin a été visité *)
$pere_p$: processus **init** indef

Pour l'initiateur, exécute
début
  $pere_p = p$
  choisir $q \in Vois_p$
  $util_p[q] = vrai$
  envoi(jeton) à q
fin

A la réception du jeton en p depuis q_0
début
  if $pere_p = indef$ **then** $pere_p = q_0$
  if $\forall q \in Vois_p : util_p[q]$ **then** decide
  else
    if $\exists q \in Vois_p : (q \neq father_p \wedge !util_p[q])$
    then
      choisit $q \in Vois_p - pere_p / !util_p[q]$
      $util_p[q] = vrai$
      envoi(jeton) à q
    else
      $util_p[father_p] = vrai$
      envoi(jeton) à $pere_p$
fin

Sommaire

Propriété structurelle des vagues

Lemme 1

Chaque évènement d'un calcul est précédé par un évènement dans un initiateur : $\forall e \in C, \exists p$, initiateur, et $f \in C_p : f \preceq e$

Preuve :

On choisit f, un élément minimal de l'historique de e :$f \preceq e$ et $\nexists f' : f' \preceq f$. Cet élément existe car l'historique est finie On en déduit que

f est le premier élément de p, sinon f' existerait. Or le premier

évènement d'un suiveur est un évènement de réception qui doit être précédé par un évènement d'émission. Donc si p est un suiveur il existe

un évènement avant f, ce qui contredit l'hypothèse $\Rightarrow$ p est un initiateur

Arbre de recouvrement pour vague à 1 initiateur

Lemme 2

Soit C une vague avec 1 initiateur p et, pour chaque suiveur q soit $father_q$ le voisin par lequel q reçoit le message du premier évènement. Alors le graphe $T = (P, E_T)$ avec $E_T = \{qr : q \neq p \wedge r = father_q\}$ est une arbre de recouvrement dont la racine est p

Preuve :

Comme il y a un noeud de plus que d'arêtes dans E_T, il suffit de montrer que T ne possède pas de cycle. Ce qui est vérifié car, pour e_q premier évènement de q ; $qr \in E_T \Rightarrow e_r \preceq e_q$ et $\preceq$ est un ordre partiel.

Un évènement *envoi* précède toute décision

Lemme 3

Dans la clause *Dépendance* l'évènement f peut-être un évènement *envoi* pour tous les processus autres que celui où l'évènement *decide* à lieu : soit C une vague et $d_p \in C$ un évènement *decide* de p alors $\forall q \neq p : \exists f \in C_p : f \preceq d_p \wedge f$ est un évènement *envoi*

Preuve :

Comme C est une vague il existe un f $C_q : f \preceq d_p$. On choisit f le dernier évènement de C_q qui précède d_p. La définition de la causalité implique qu'il existe une séquence $f = e_0, ..., e_k = d_p$ telle que $\forall i < k : e_i$ et e_{i+1} sont soit des évènements consécutifs d'un même processus soit un couple $envoi - recoit$. Comme f est le dernier évènement de q qui précède d_p alors e_1 qui suit f se déroule dans un autre processus que q et donc f est un évènement *envoi*

Borne inférieure sur la complexité des vagues

Algorithmes à 1 initiateur

Soit C une vague avec un initiateur p, tel qu'un évènement de décision d_p se produit dans p. Alors C implique au moins N messages.

Preuve :

D'après le lemme 1 chaque évènement de C est précédé par un évènement dans p. En appliquant le même raisonnement que dans le lemme 3 il est facile de montrer qu'au moins un évènement *envoi* a lieu dans p.

D'après le lemme 3 un évènement d'envoi a lieu dans chaque processus autre que p, donc le nombre de message minimum est au moins N

Borne inférieure sur la complexité des vagues

Algorithmes sur un réseau quelconque

Soit A un algorithme de vague pour un réseau quelconque sans connaissance à priori de l'identité des voisins, alors A échange au moins $|E|$ messages à chaque calcul.

Preuve :

Soit C une vague dans laquelle moins de $|E|$ messages sont échangés. Il y a donc une arrête xy qui n'est pas parcourue. Soit le réseau E' obtenu par l'insertion d'un processus z entre x et y. Comme les processus n'ont pas connaissance de l'identité de leurs voisins, alors l'état initial de x et y dans E' est le même que dans E. Donc les évènements se déroulent de la même manière et l'évènement *decide* n'est pas précédé par un évènement dans z.

Algorithmes de parcours

Définition

Les algorithmes de parcours (*traversal algorithms*) forment une sous-classe des algorithmes de vagues où :

- Il n'y a qu'un seul initiateur, qui est le seul processus qui décide
- Tous les évènements sont totalement ordonnés par ordre de causalité

Algorithmes PIF

Définition

- D'une manière générale les algorithmes de vagues sont ceux dont on a besoin pour diffuser une information à tous les processus d'un réseau et où certains processus doivent recevoir une notification lorsque la diffusion est terminée.
- Propagation of Information with Feedback (PIF)
- La notification de la fin de diffusion est considéré comme l'évènement *decide*

Référence

- Gerard Tel. *Introduction to distributed Algorithms*, Cambridge Hall.