

THÈSE

Présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE

Pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
DE FRANCHE-COMTÉ**
Spécialité Mathématiques et Applications

**CONTRIBUTIONS À LA MODÉLISATION ET
AU CONTRÔLE DES SYSTÈMES
INTELLIGENTS DISTRIBUÉS : Application au
contrôle de vibrations d'une poutre**

Par

Mahamane KADER

Soutenue le 28 juin 2000 après avis de :

Rapporteurs	M. BERGOUNIOUX	Professeur à l'Université de Franche- Comté
	F. BOURQUIN	H.D.R., Ingénieur en chef, LCPC Champs sur Marne
	devant la Commission d'Examen :	
Président	P. LESAINT	Professeur à l'Université de Franche- Comté
Directeur de thèse	M. LENCZNER	Maître de Conférence, HDR, à l'Université de Franche- Comté
Examineurs	F. BOURQUIN	H.D.R., Ingénieur en chef, LCPC Champs sur Marne
	Ph. DESTUYNDER	Professeur Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris
	A. HENROT	Professeur à l'École des Mines de Nancy
	M. TUCSNAK	Professeur à l'Université Henri-Poincaré-Nancy I

THÈSE

Présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTE

Pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
DE FRANCHE-COMTÉ**
Spécialité Mathématiques et Applications

**CONTRIBUTIONS À LA MODÉLISATION ET
AU CONTRÔLE DES SYSTÈMES
INTELLIGENTS DISTRIBUÉS : Application au
contrôle de vibrations d'une poutre**

Par

Mahamane KADER

Soutenu le 28 juin 2000 après avis de :

Rapporteurs	M. BERGOUNIOUX	Professeur à l'Université de Franche- Comté
	F. BOURQUIN	H.D.R., Ingénieur en chef, LCPC Champs sur Marne
	devant la Commission d'Examen :	
Président	P. LESAINT	Professeur à l'Université de Franche- Comté
Directeur de thèse	M. LENCZNER	Maître de Conférence, HDR, à l'Université de Franche- Comté
Examineurs	F. BOURQUIN	H.D.R., Ingénieur en chef, LCPC Champs sur Marne
	Ph. DESTUYNDER	Professeur Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris
	A. HENROT	Professeur à l'École des Mines de Nancy
	M. TUCSNAK	Professeur à l'Université Henri-Poincaré-Nancy I

*À Kongho
À ma mère et mon père
À Youssouf
À Alpha et Abdoukader*

Remerciements

J'aimerais ici témoigner de ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien les quelques travaux exposés dans les pages suivantes ...

A mon directeur de thèse, Michel LENCZNER, H.D.R., maître de conférences de l'Université de Franche-comté, pour son suivi et ses conseils, bien sûr, mais aussi pour l'ambiance amicale qu'il a su créer entre nous.

Madame Maïtine BERGOUNIOUX, Professeur de l'Université d'Orléans, pour avoir accepté de faire un rapport sur cette thèse.

Aux membres de la commission d'examen :

Monsieur Pierre LESAIN, Professeur de l'Université de Franche-Comté, d'avoir accepté la direction administrative, et pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Monsieur Frédéric BOURQUIN, H.D.R., Ingénieur en chef, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Champs s/ Marnes, pour avoir accepté d'être rapporteur et pour ses conseils.

Messieurs Philippe DESTUYNDER, Professeur C.N.A.M, Paris, Antoine HENROT, Professeur à l'École des Mines de Nancy, Marius TUCSNAK, Professeur à l'Université de Nancy I, pour avoir accepté de faire partie de ce Jury malgré leurs nombreuses occupations.

Un travail de thèse n'est jamais l'œuvre d'une personne seule. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous les collègues et amis du Laboratoire de Mathématiques de Besançon avec qui il fut si agréable de travailler ; en particulier Madame Eva BAYER-FLUCKIGER.

Mes très sincères remerciements à Monique DIGU, Catherine PAGANI, Catherine VUILLEMENOT, Jacques VERNEREY, Jean-Daniel TISSOT, Odile HENRI, Nathalie PASQUET pour leurs disponibilité et gentillesse.

J'adresse mes vifs et sincères remerciements à Idrissa TOURÉ et sa famille, Sounkalo DEMBÉLÉ et sa famille pour leur accueil et leur soutien.

J'aimerais enfin remercier mes parents, Kongho, ma femme, pour les deux enfants qui ont vu le jour durant cette thèse, pour son soutien et sa compréhension surtout pendant la rédaction de cette thèse.

Je dédie cette thèse à mes parents, à ma femme et mes enfants.

RÉSUMÉ

Nous présentons une approche nouvelle pour la conception des systèmes intelligents distribués dans le cadre du contrôle des vibrations d'une poutre. Nous construisons un circuit analogique distribué qui réalise une approximation d'une loi de contrôle optimal, avec un système d'observation et de contrôle utilisant des transducteurs piézoélectriques distribués. Ce résultat théorique obtenu a été validé par des calculs numériques. Nous proposons une paramétrisation des contrôleurs dynamiques H-infini pour des équations d'état linéaires de dimension infinie. Cela a permis de construire deux contrôleurs dynamiques particuliers pour l'équation des ondes et une large classe de contrôleurs. Un modèle simplifié de l'équation des ondes à deux échelles, qui modélise l'évolution d'un système régi par l'équation des ondes en une dimension à coefficients et données oscillants, est présenté. La solution du modèle à deux échelles est décomposée sur les ondes de Bloch. Les coefficients de la solution du modèle à coefficients constants sont solutions d'une infinité d'équations des ondes découplées, posées sur le domaine macroscopique, avec des conditions de Dirichlet homogènes. Une étude de stabilisation a été réalisée sur le modèle à coefficients constants. Les résultats théoriques obtenus ont été validés par des calculs numériques.

Mots clés :

Systèmes intelligent distribué, contrôle H-infini, ondes de Bloch, homogénéisation, vibrations, circuit électronique, contrôle optimal, contrôle distribué, transformation à deux échelles pour les ondes.

ABSTRACT

We present a new approach for the design of distributed intelligent systems within the framework of the beam vibrations control. We build a distributed analog circuit which realizes an approximation of an optimal control law. The sensors and actuators are piezoelectric transducers and are distributed in the host structure. This theoretical result has been validated by numerical simulations. We propose a parameterization of H -infinite dynamic controllers for infinite dimension linear systems. Then two particular dynamic controllers for the waves equation and a large class of controllers are derived. A two-scale model for the wave equation with oscillating coefficients and data is formulated. It has been derived using an asymptotic method based on the two-scale convergence and on the Bloch waves decomposition. A numerical validation in the case of constant coefficients and oscillating data is also presented. The coefficients of the solution of this model are solutions of an infinity of uncoupled waves equations, posed on the macroscopic field, with Dirichlet homogeneous conditions. A stabilization problem is solved in that. This result has also been validated by numerical simulation.

Key words :

Distributed intelligent systems, H -infinity control, Bloch waves, homogenization, vibrations, optimal control, electronic circuit, distributed control, two_scale transformation for the waves.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Model of Elastic Plate with Distributed Piezoelectric Patches and Electronic Circuits	9
2.1	The elastic thin plate with piezoelectric patches	9
2.1.1	Equations	10
2.1.2	The electrical circuit	11
2.2	Variational formulation	12
2.3	Numerical simulation tools	16
2.3.1	Electronic circuits simulator : Alecsis	16
2.3.2	Finite elements description of the coupled model	16
3	Distributed control based on distributed electronic circuits. Application to vibration control	21
3.1	Introduction	21
3.2	Statement of the optimal control problem	22
3.2.1	The three-dimensional plate model	22
3.2.2	The two-dimensional plate model	22
3.2.3	The homogenized one-dimensional beam model	23
3.2.4	Optimal control	24
3.3	Exact solution X_{ARE} of the algebraic Riccati equation	25
3.3.1	An approximation of X_{ARE}	28
3.4	Approximation by a distributed electronic circuit	29
3.5	Numerical results	30
3.5.1	Analysis of the exact solution	30
3.5.2	Eigenvalues and eigenfunctions	30
3.5.3	The homogenized model	31
3.5.4	The non-homogenized model (3.1)	34
4	Parametrization of H_∞-suboptimal controllers : Application to the wave equation	41
4.1	Introduction	41
4.2	Main result and application to the wave equation	43
4.2.1	Main result	43
4.2.2	Application to the wave equation	45
4.3	Proofs	50
4.3.1	Extension of the algebraic lemma of [7]	50
4.3.2	Proof the theorem 2 (ii)	59

4.3.3	Proof of theorem 3	60
4.4	Appendix	64
4.4.1	Proof of lemma 6	64
5	Un modèle simplifié de l'équation des ondes à coefficients et données oscillants. Application à un problème de stabilisation	67
5.1	Introduction:	67
5.2	Présentation des résultats principaux	68
5.2.1	Position du problème	68
5.2.2	Modèle à deux échelles de l'équation des ondes.	69
5.2.3	Application à un problème de stabilisation	73
5.2.4	Tests numériques	74
5.3	La convergence à deux échelles pour les ondes	88
5.3.1	Décompositon en ondes de Bloch	88
5.3.2	La transformation à deux échelles pour les ondes.	90
5.3.3	Convergence à deux échelles pour les ondes	92
5.4	Le modèle limite	92
5.5	Démonstration de la proposition 2	94
5.6	Démonstration de la proposition 1	94
5.7	Démonstration de la proposition 3	97
5.8	Démonstration de la proposition 4	99
5.8.1	Equations à l'échelle microscopique (5.5-5.7)	99
5.8.2	Obtention de (5.5), (5.6) et (5.7).	104
5.9	Démonstration de la proposition 5	110
5.9.1	Caractérisation des solutions de (5.3-5.4)	110
5.9.2	Interprétation de la formulation variationnelle (5.5-5.6)	112
5.9.3	Obtention des conditions aux limites (5.15)	116

Chapitre 1

Introduction

La thèse présentée ici a pour thème principal l'étude des systèmes intelligents distribués. Un système intelligent distribué "SID" est une structure mécanique incluant des capteurs et des actionneurs en très grand nombre, distribués et reliés par un réseau de circuits électroniques [10]. L'architecture des SID est telle que chaque couple capteur et actionneur est relié par un circuit électronique, qui n'est connecté qu'avec ses voisins les plus proches. Les domaines d'application des systèmes intelligents distribués sont nombreuses. Ils sont utilisés par exemple pour le contrôle d'un champ de propagation d'ondes acoustiques ou de transfert acoustique à travers une paroi [7], de vibrations d'une structure mécanique [7], d'écoulement d'un fluide [8]. Un groupe du Laboratoire de Mathématiques de Besançon développe des méthodes mathématiques, numériques et expérimentales pour la conception de tels systèmes.

Les résultats présentés dans cette thèse donnent des réponses parfois partielles, parfois complètes à des questions nouvelles apparues dans l'étude des systèmes intelligents distribués. Les deux premiers chapitres de cette thèse présentent une approche nouvelle pour la conception des systèmes intelligents distribués. Les deux autres sont consacrés à des problèmes mathématiques apparus lors de l'analyse de ces systèmes.

La conception des systèmes intelligents distribués se fait en plusieurs étapes. La modélisation théorique de structures élastiques munies de transducteurs piézo-électriques couplées avec des réseaux de circuits électroniques, la réduction des modèles mathématiques obtenus, la synthèse de lois de contrôle, la simulation numérique et l'expérimentation.

Dans la suite nous allons développer brièvement ces différents points et poser quelques questions auxquelles cette thèse apporte des éléments de réponse.

La modélisation consiste à établir des modèles mathématiques des systèmes couplés à partir des lois fondamentales de la physique et des équations de circuits électroniques. Il en découle des systèmes d'équations aux dérivées partielles couplées à des équations algèbro-différentielles. L'étude de tels systèmes nécessite une formulation mathématique unifiée.

Un cadre variationnel a déjà été introduit par Senouci-Bereksi et Michel Lenczner [6] pour le couplage d'une coque élastique munie des transducteurs piézo-électriques reliés par un circuit électronique analogique. Le circuit utilisé comprenait des sources de courant, des sources de tension, des résistances et des amplificateurs tension-tension. Un théorème d'existence et unicité de la solution du problème variationnel a été démontré.

Il est naturel de se demander si ce résultat reste valable dans le cas des circuits électroniques analogiques ou/et digitaux plus généraux, d'autres types de transducteurs et d'autres structures mécaniques.

Les modèles mathématiques obtenus ne sont en général exploitables, ni pour la synthèse de

lois de contrôle, ni pour la simulation numérique. Ceci est dû à la limitation des moyens de calcul pour la simulation et des méthodes d'analyse des systèmes intelligents distribués. Ce qui conduit à la réduction des modèles en vue d'une synthèse de lois de contrôle et de la simulation numérique. Celle-ci peut être faite par diverses méthodes. Les modèles simplifiés utilisés pour la simulation numérique dans cette thèse sont obtenus par les méthodes asymptotiques classiques [4].

Toutes les théories dérivant du contrôle optimal au sens large (incluant LQR, LQG, H-infini, LMI, ...) conduisent à des contrôleurs formulés à l'aide des solutions d'équations de Riccati. Les solutions d'équations de Riccati sont en général des opérateurs pseudo-différentiels (opérateurs non locaux) qui conduisent à des lois de contrôle apparemment incompatibles avec l'architecture des systèmes intelligents distribués. Il est donc nécessaire de trouver des méthodes d'approximation de ces opérateurs. La formulation de celles-ci doit être en terme de circuits électroniques distribués satisfaisant les contraintes formulées dans la définition des systèmes intelligents distribués. Il est judicieux de trouver une bonne approximation d'une loi de contrôle optimal par un circuit électronique distribué, dont la réalisation technologique par un système intelligent distribué soit réaliste.

Ce type de contrôleur exige la connaissance complète de l'état à chaque instant, ce qui nécessite de disposer d'un estimateur d'état. Ceci rend la réalisation d'un système intelligent distribué très coûteuse et irréaliste du point de vue technologique. Nous nous sommes donc intéressés à des stabilisateurs dynamiques qui prennent en compte le taux de décroissance et la robustesse. L'obtention de ces stabilisateurs ne nécessite pas la connaissance complète de l'état du système à chaque instant, mais de l'observation partielle de son état. On peut chercher à caractériser des classes de contrôleurs dynamiques, qui en plus de la stabilisation minimisent l'influence des perturbations sur l'état mesuré.

Les systèmes intelligents distribués peuvent aussi interagir avec un champ de propagation d'ondes à caractère multi-échelles, par exemple l'écoulement d'un fluide sur les bords d'attaque d'une aile d'avion. Lorsque le système intelligent distribué est utilisé pour contrôler un champ de propagation d'ondes ayant un caractère multi-échelles, soit en terme fréquentiel, soit en terme spatial, la modélisation et la synthèse de lois de contrôle doivent en tenir compte. Il est naturel de chercher des stratégies de modélisation permettant de représenter correctement ce caractère multi-échelles. Dans ce qui suit nous présentons les résultats de cette thèse.

Dans le premier chapitre, les équations classiques de la mécanique et de l'électronique sont introduites. Nous présentons une formulation globale d'un modèle de plaque élastique munie de capteurs et d'actionneurs piézo-électriques couplée avec un circuit électronique analogique général. Ce dernier comprend des sources de courant, des sources de tension, des résistances, des capacités, des inductances et des amplificateurs tension-tension, tension-courant, courant-tension et courant-courant. Nous avons établi une équivalence entre les formulations classiques et la formulation variationnelle globale. Cette dernière est compatible avec la méthode nodale modifiée utilisée habituellement pour la simulation numérique des circuits électroniques [12]. Ce qui constitue une réponse partielle à la généralisation du résultat présenté dans [6]. Ce cadre variationnel global nous a permis de bien formuler les méthodes numériques.

La résolution numérique de la formulation variationnelle globale nécessite de disposer d'outils adaptés. On peut envisager deux approches. La première consiste à coupler des codes existants : l'un pour la structure mécanique avec transducteurs piézo-électriques et l'autre pour les circuits électroniques. La résolution du système global étant effectuée par un procédé itératif. La seconde consiste en l'utilisation des deux codes pour générer les matrices globales associées à la formulation variationnelle globale. Par cette approche, la résolution peut être effectuée par

des méthodes directes.

Dans cette thèse nous avons choisi la première approche. Une description du couplage du simulateur de circuits électroniques " ALECSIS " [1] et une méthode d'éléments finis, utilisée pour la résolution du système couplé, est exposée à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous développons une approche nouvelle pour la conception des systèmes intelligents distribués dans un cas particulier. Nous présentons une approximation d'une loi de contrôle optimal par un circuit électronique analogique distribué au sens des systèmes intelligents distribués. Celle-ci est construite en plusieurs étapes :

- Un modèle bidimensionnel de plaque est extrait du modèle tridimensionnel.

- Les transducteurs piézo-électriques étant supposés périodiquement distribués sur la plaque, un modèle homogénéisé est obtenu en utilisant la théorie de l'homogénéisation.

- En supposant que le mouvement de la plaque est principalement un mouvement de flexion dans la direction longitudinale, le modèle de plaque est remplacé par un modèle de poutre. Ce modèle simplifié est utilisé pour la synthèse de la loi de contrôle.

Nous avons formulé un problème de contrôle optimal sur ce modèle simplifié. Du fait du modèle homogénéisé, les opérateurs de contrôle et d'observation sont des opérateurs aux dérivées partielles à coefficients constants distribués dans toute la surface de la plaque. La fonctionnelle à minimiser a été choisie de façon à garantir un même taux de décroissance à tous les modes de la poutre. Ce choix a l'avantage d'éviter la saturation des actionneurs, ainsi les tensions appliquées aux actionneurs relativement aux hautes et basses fréquences sont du même ordre de grandeur.

Le contrôle est formulé à l'aide de la solution d'une équation de Riccati, qui est une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels. Après une approximation du contrôleur par des opérateurs aux dérivées partielles au sens des hautes fréquences, et une approximation aux différences finies de ceux-ci, nous donnons sa formulation en terme de circuits électroniques analogiques distribués respectant les contraintes imposées par la définition des systèmes intelligents distribués.

A la fin du chapitre, nous comparons les effets du contrôleur optimal approché et d'un contrôle par simple rétroaction. Le coefficient d'amplification du contrôle par simple rétroaction a été choisi de sorte que le premier mode ait le même taux de décroissance pour les deux types de contrôle.

Conformément aux prédictions le contrôleur par simple rétroaction amortit plus rapidement les autres modes que le contrôleur optimal approché. Mais les tensions appliquées sont très élevées avec le contrôleur par simple rétroaction qu'avec le contrôleur optimal approché. Ce qui rend le contrôleur par simple rétroaction inutilisable.

Le troisième chapitre aborde la question de la caractérisation de classes de contrôleurs dynamiques. Nous étudions le problème de contrôle H-infini pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires. Rappelons tout d'abord le problème de contrôle H_∞ standard : Etant donné un système G à deux entrées (u, w) et deux sorties (z, y) représenté par

$$G : \begin{cases} x' = Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) = 0, \\ z = C_1 x + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_{21} w. \end{cases}$$

Le problème est de trouver un contrôleur K de la forme

$$K : \begin{cases} p' = A_K p + B_K y & p(0) = 0, \\ u = C_K p, \end{cases}$$

tel que le système couplé (G, K) soit stable et γ -dissipatif pour $\gamma \in \mathbb{R}^{*+}$.
On dit qu'un tel système est γ -dissipatif si

$$\|\mathcal{F}(G, K)\|_{H_\infty} < \gamma,$$

où \mathcal{F} est la fonction de transfert de $w \rightarrow z$.

La théorie de contrôle H-infini élaborée par Zames [13], Doyle [3] et Safonov [11], a permis de formuler rigoureusement et résoudre (numériquement par des équations de Riccati) des problèmes de contrôle robuste. Dans [3] les auteurs ont montré que l'existence d'un contrôleur K est équivalente à celle de la solution des équations de Riccati couplées. Ce résultat a été généralisé à des systèmes linéaires de dimension infinie par Van B. Keulen [9]. P. Gahinet a utilisé le lemme du réel borné pour caractériser une large classe de contrôleurs H_∞ sous-optimaux pour des systèmes linéaires en dimension finie [5].

Nous abordons le problème par l'approche de P. Gahinet. Nous énonçons des conditions d'existence des solutions d'un système de deux équations de Riccati couplées. Nous établissons l'équivalence entre ces conditions et l'existence d'un contrôleur dynamique minimisant l'influence des perturbations sur la solution mesurée.

Nous avons obtenu une paramétrisation générale de ces contrôleurs dynamiques de type H-infini pour des problèmes linéaires abstraits posés dans des espaces de dimension infinie. L'intérêt de celle-ci réside dans le fait qu'elle conduit à un contrôleur qui ne nécessite pas la connaissance complète de l'état du système, autrement dit, elle ne nécessite pas l'utilisation d'un estimateur d'état. Une observation partielle de l'état suffit pour déterminer la loi de contrôle. Nous avons établi un exemple d'application de cette théorie dans le cas de l'équation des ondes avec contrôle interne et une observation partielle de l'état ne contenant que le champ de déplacement. Nous avons déterminé en détail deux contrôleurs particuliers, puis une large classe de stabilisateurs dynamiques de type H_∞ pour l'équation des ondes.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de contrôles distribués de phénomènes de propagation d'ondes présentant un caractère multi-échelles. Nous proposons un modèle simplifié de l'équation des ondes à deux échelles, qui modélise l'évolution d'un système régi par l'équation des ondes en une dimension à coefficients et données oscillants. Nous avons étudié le cas particulier de l'équation des ondes à coefficients constants et données oscillantes. La solution du modèle à deux échelles est décomposée sur les ondes de Bloch. Les coefficients de celle-ci sont les solutions d'une infinité d'équations des ondes découplées, posées sur le domaine macroscopique, avec des conditions de Dirichlet homogènes. Les données initiales sont les projections de la limite à deux échelles des données initiales sur les modes de Bloch.

Une étude de stabilisation a été réalisée sur le modèle à coefficients constants. Dans ce chapitre, nous comparons les solutions numériques de l'équation des ondes complète et du modèle simplifié sans stabilisation dans le cas à coefficients constants. La solution de l'équation des ondes complète sans stabilisation et celle du modèle simplifié avec stabilisation sont également comparées.

Bibliographie

- [1] Alecsis, <http://venus.elfak.ni.ac.yu/~homer/ealecsis.htm>
- [2] Ciarlet P.G., *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures, Série RMA, vol. 14, Masson (1990).*
- [3] Doyle, J., Glover K., Khargoneker P.P. and Francis A., *State space solutions to standard H-2 and H-infinity control problems. IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC 34, pp. 831-847, 1987.*
- [4] Francfort, G.A. ; Murat, F., *Oscillations and energy densities in the wave equation. (English) [J] Commun. Partial Differ. Equations 17, No.11/12, 1785-1865 (1992).*
- [5] P. Gahinet, *A new parametrization of H_∞ suboptimal controllers, Int. J. Control, vol. 59, n°4, pp 1031-1051 (1994).*
- [6] Ghouti Senouci-Bereksi et Lenczner M., *Modelling of a thin piezoelectric shell coupled with a distributed electronic circuit by distributed piezoelectric transducers. Soumis, 1999.*
- [7] <http://amsl.mit.edu/>
- [8] <http://ho.seas.ucla.edu/>
- [9] Keulen, V. B., *H-infinity control for infinite dimensional systems : a state-space approach, Thesis, University of Groningen, 1993.*
- [10] Lenczner, M., *Microsystèmes actifs distribués, Chapitre IX de l'ouvrage collectif " ARAGO 21 : Microsystèmes ", ED. Observatoire Français des Techniques Avancées, 1999.*
- [11] [9] Safonov, M. G., *Frequency domain design of multivariable control systems for insensitivity to large plant parameter variations. In Proc. IEEE Conf. On Decision and Control, pp. 247-249, 1979.*
- [12] Vlach, J., and Singhal, K., *Computer methods for circuit analysis and design, VNR, New York.*
- [13] Zames G., *Stability of systems with sectors nonlinearities : A comparison of various inequalities. IEEE Trans. Aut. Control, pp 709-711, 1968.*

Chapitre 2

Model of Elastic Plate with Distributed Piezoelectric Patches and Electronic Circuits

In this first chapter we introduce the basic tools, which will be used in the later chapters. In the section 1 we recall the classical equations of mechanics and electronics. We established an equivalence between these equations and a variational formulation in section 2. The last part is devoted to the description of the tools for numerical simulation.

2.1 The elastic thin plate with piezoelectric patches

A three-layers plate, made of elastic core and symmetrically attached pairs piezoelectric patches is considered. In the model formulation and simulation, the piezoelectric patches are assumed to be distributed and perfectly bonded on both the top (sensor) and bottom (actuator) surface of the plate. The plate is considered as several stepped sections which are not necessarily of the same thickness nor the same material. We denote the domain occupied by the plate $\Omega^a = \Omega_e^a \cup \Omega_p^a$, where Ω_e^a and Ω_p^a are filled up with elastic material and piezoelectric patches respectively, its boundary is $\Gamma^a = \Gamma_0^a \cup \Gamma_1^a \cup \Gamma_2^a$. The plate is clamped on a portion Γ_0^a of its lateral surface. The subscripts e and p refer to elastic material and piezoelectric patches respectively and $a > 0$ is the half of the thickness of the plate. Greek indices take their value in $\{1, 2\}$, Latin indices take their value in $\{1, 2, 3\}$ and the summation convention with respect to repeated indices is used.

- The components of the stiffness tensor satisfy the symmetry and positivity properties :

$$R_{ijkl} = R_{klij} = R_{jikl},$$

and

$$R_{ijkl}K_{ij}K_{kl} \geq CK_{ij}K_{ij} \text{ for all } K_{ij} = K_{ji}, C \geq 0.$$

- The components of the piezoelectric tensor satisfy the symmetry property $e_{kij} = e_{kji}$ for every $i, j, k = 1, \dots, 3$. The tensor $(e_{kij})_{i,j,k=1,\dots,3}$ vanishes in Ω_e^a .
- The permittivity tensor $(c_{ij})_{i,j=1,\dots,3}$ satisfies the symmetry property $c_{ij} = c_{ji}$ for every $i, j = 1, \dots, 3$.

We assume that the piezoelectric patches are electrically insulated from the elastic matrix. Therefore we define

$$e_{k,ij} = 0 \text{ and } c_{ij} = 0 \text{ in } \Omega_e^a \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Here we denote by :

- $u = (u_i(t, x))$, $i = 1, 2, 3$ the mechanical displacements, at each time t , at the position $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^a$;
- $\phi(t, x)$ the electric potential, at each time t , at the position $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^a$;
- ρ is the density mass;
- n the unit outer normal vector;
- $f = (f_i)$ and $g = (g_i)$ are respectively volume forces in Ω^a and surface forces in Γ_2^a ;
- $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1..3}$ and $D = (D_i)_{i=1..3}$ are respectively the mechanical stress and electric displacement, associated to the linear strains $s_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.

2.1.1 Equations

The elastodynamic equation in each layer is given by

$$\rho \partial_{tt} u - \partial_j \sigma_{ij} = f \quad \text{in } \Omega^a \quad (2.1)$$

when the electrostatic equation is written in each piezoelectric patch

$$-\partial_i D_i = 0 \quad \text{in } \Omega_p^a. \quad (2.2)$$

Here mechanical stresses and electric displacements are

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= R_{ijkl} s_{kl}(u) + e_{kij} \partial_k \phi \quad \text{in } \Omega^a \\ D_k &= e_{kij} s_{ij}(u) - c_{ki} \partial_i \phi \quad \text{in } \Omega_p^a. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Boundary conditions :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n &= g \text{ on } \Gamma_2^a, \\ \sigma_{ij} n &= 0 \text{ on } \Gamma_1^a, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_0^a, \\ D_i \cdot n_i &= 0 \text{ on } \Gamma^a / \Gamma_2^a. \end{aligned} \quad (2.4)$$

In the following Γ_n^\pm denote the upper/lower faces of the n^{th} layer, for every $n = 1, 2, 3$, and the continuity conditions between the layers are :

$$(u)_{\Gamma_n^+} = (u)_{\Gamma_{n+1}^+} \text{ and } (\sigma_{ij} \cdot n)_{\Gamma_n^+} = -(\sigma_{ij} \cdot n)_{\Gamma_{n+1}^-}. \quad (2.5)$$

Concerning the boundary condition on $\Gamma_1^a \cup \Gamma_2^a$ of the piezoelectric patches, we assume that the lower side of each piezoelectric patch is covered by a metallization and is linked to the earth. The upper side of each piezoelectric patch is also covered by a metallization and linked to one branch of the electrical circuit. The electrical potential and the current flowing from Γ_2^a satisfy the following conditions :

$$\phi = 0 \text{ on } \Gamma_1^a, \phi = \text{constant} \text{ on each } \Gamma_2^a, \quad (2.6)$$

The current following out of piezoelectric patch is :

$$i_{\Gamma_2^a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma_2^a} D_i \cdot n_i d\Gamma_2^a. \quad (2.7)$$

The layers are electrically insulated, so there are no continuity conditions related to the electrical displacement or to the electrical potential.

2.1.2 The electrical circuit

In this subsection we recall the classical electric circuit equations. For more detail see [8]. In the mathematical point of view an electrical network is composed by vertices and edges. Two vertices are linked by one edge. The set of edges is denoted by $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^3$. The subset of the vertices linked to earth is denoted by v_0 , that is the place where electrical potential is equal zero. The set \mathbb{E} is partitioned in $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3^{(c,c)}, \mathbb{E}_3^{(v,c)}, \mathbb{E}_3^{(c,v)}, \mathbb{E}_3^{(v,v)}, \mathbb{E}_4^{(c,c)}, \mathbb{E}_4^{(v,c)}, \mathbb{E}_4^{(c,v)}$ and $\mathbb{E}_4^{(v,v)}$. They are occupied respectively by the voltage sources, the current sources, the passive components (resistors, capacitors, inductors, etc.), the input $\mathbb{E}_3^{(\cdot)}$ of the amplifiers and the output $\mathbb{E}_4^{(\cdot)}$ of the amplifiers. The superscripts (c, c) , (c, v) , (v, c) and (v, v) refer respectively to the current to current, current to voltage, voltage to current and voltage to voltage amplifiers. For each edge $e \in \mathbb{E}$ we denote by s_e^+ and s_e^- its two vertices. The positive sense of e is defined by $s_e^+ \rightarrow s_e^-$. The set of edges arriving with a positive (respectively negative) sense at a vertex s is denoted by \mathbb{E}_s^+ (respectively \mathbb{E}_s^-).

The function $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ constant on each edge $e \in \mathbb{E}$, is defined by

$$L(x) = |e| \text{ for } x \in e. \quad (2.8)$$

It represents the length of e .

The potential function ϕ is an affine function defined on each edge $e \in \mathbb{E}$ and $\phi(s_e^+) = \phi^+$ and $\phi(s_e^-) = \phi^-$. The sets $\mathbb{P}^0(X)$ and $\mathbb{P}^1(X)$ denote the constant and continuous affine functions on X respectively.

Following the theory of electronic networks it is well known that :

- The voltage v on each edge $e \in \mathbb{E}$ is given by

$$v|_e = \phi^+ - \phi^- \quad (2.9)$$

which is equivalent to

$$-L(x) \nabla_\tau \phi = v \text{ for } x \in e \subset \mathbb{E}, \quad (2.10)$$

where $\nabla_\tau \phi$ is the tangential derivative of the function ϕ along \mathbb{E} .

- The current for every vertex s is given by :

$$\sum_{e \in \mathbb{E}_s^+} i_{s_e^+} - \sum_{e \in \mathbb{E}_s^-} i_{s_e^-} = 0. \quad (2.11)$$

Its weak formulation is given by

$$\int_{\mathbb{E}} i(x) \nabla_\tau \psi(x) dl(x) = 0 \text{ for all } \psi \in \mathbb{P}^1(\mathbb{E}) \text{ such that } \psi = 0 \text{ on } v_0. \quad (2.12)$$

Passive devices

In this part the superscripts R, C, L and P refer to resistor, capacitor, inductor and piezoelectric element respectively, and $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_2^R \cup \mathbb{E}_2^C \cup \mathbb{E}_2^L \cup \mathbb{E}_2^P$.

A resistor is an element for which the current i and the voltage v are linked by the Ohm's law :

$$v = Ri = \frac{1}{g^R} i,$$

where R is the resistance and $1/g^R \in \mathbb{P}^0(\mathbb{E}_2^R)$ is the conductance. It is equivalent to :

$$g^R L \nabla_\tau \phi = i. \quad (2.13)$$

In a capacitor the current and voltage are linked by the constitutive linear equation on \mathbb{E}_2^C :

$$i = L g^C \frac{d \nabla_\tau \phi}{dt} \text{ on } \mathbb{E}_2^C, \quad (2.14)$$

where $1/g^C$ is the capacitance.

In an inductor the equation is written as

$$g^L L \nabla_\tau \phi = \frac{di}{dt}, \quad (2.15)$$

with the inverse relation (here $i_0 = i(0)$)

$$i(t) = i_0 + \int_0^t g^L L \nabla_\tau \phi(\tau) d\tau. \quad (2.16)$$

Active devices

In the following $k^{(\dots)}$ represents the amplification coefficient.

Amplifiers	Equations
current to current	$i_{\mathbb{E}_4^{c,c}} = k^{c,c} i_{\mathbb{E}_3^{c,c}}$ $v_{\mathbb{E}_3^{c,c}} = 0,$
tension to current	$i_{\mathbb{E}_4^{t,c}} = k^{v,c} v_{\mathbb{E}_3^{t,c}}$ $i_{\mathbb{E}_3^{v,c}} = 0,$
current to tension	$v_{\mathbb{E}_4^{c,v}} = k^{c,v} i_{\mathbb{E}_3^{c,v}}$ $v_{\mathbb{E}_3^{c,v}} = 0.$
tension to tension	$v_{\mathbb{E}_4^{v,v}} = k^{v,v} v_{\mathbb{E}_3^{v,v}}$ $i_{\mathbb{E}_3^{v,v}} = 0.$

2.2 Variational formulation

The space of admissible functions for the model is

$$\mathbb{V}_{ad}(u_d, i_d) = \left(H_{\Gamma_0^a}^1(\Omega^a) \right)^3 \times \Psi_{ad}(u_d) \times \mathbb{P}(i_d), \quad (2.18)$$

$$H_{\Gamma_0^a}^2(\Omega^a) = \{v \in H^1(\Omega^a) / v = 0 \text{ on } \Gamma_0^a\}$$

where, for $u_d \in \mathbb{P}^0(\mathbb{E}_0)$ and $i_d \in \mathbb{P}^0(\mathbb{E}_1)$

$$\Psi_{ad}(u_d) = \left\{ \begin{array}{l} \psi \in H^1(\Omega_p^a \cup \mathbb{E}/\mathbb{E}_2^P) / -L \nabla_\tau \psi = u_d \text{ on } \mathbb{E}_0, \text{ and} \\ \psi = 0 \text{ on } \Gamma_P^-, \nabla_\tau \psi = 0 \text{ on } \mathbb{E}_3^{c,c}, \frac{1}{k^{c,v}} \nabla_\tau \psi = i \text{ on } \mathbb{E}_3^{c,v} \end{array} \right\}. \quad (2.19)$$

$$\mathbb{P}(i_d) = \{i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{E}) \text{ and } i = i_d \text{ on } \mathbb{E}_1, i = 0 \text{ on } \mathbb{E}_4^{v,c} \cup \mathbb{E}_4^{v,v}\}$$

Here Γ_P^- denote the lower faces of all piezoelectric patches. We assume that the solutions are smooth enough such that the following equation have a sense. The problem can be written as follows :

Find $(u, \phi, i)(t) \in \mathbb{V}_{ad}(u_d)$ for all $t \geq 0$ solution of

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, \phi), (v, \psi) \right) + d \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi, \psi \right) + \\ a((u, \phi), (v, \psi)) + b_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} i, \psi \right) = l(v), \text{ for all } (v, \psi, j) \in \mathbb{V}_{ad}(0, 0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} b_2^{c,c}(\phi, j) &= 0 \\ b_2^{c,v}(\phi, j) &= 0 \\ b_2^{v,v}(\phi, j) &= 0 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} c((u, \phi), (v, \psi)) &= \int_{\Omega^a} \rho u v dx + \int_{\mathbb{E}_2^C} L g^C \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x) + \\ &\int_{\Omega_p^a} (e_{kij} s_{ij}(u) + c_{ki} \partial_i(\phi)) \partial_i(\psi) dx, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} a((u, \phi), (v, \psi)) &= \int_{\Omega^a} (R_{ijkl} s_{kl}(u) + e_{kij} \partial_k(\phi)) s_{ij}(v) dx + \\ &\int_{\mathbb{E}_2^L} g^L L \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x). \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} d(\phi, \psi) &= \int_{\mathbb{E}_2^R} L g^R \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{v,c}} k^{v,c} \nabla_\tau \phi j dl(x) \\ &+ \frac{1}{k^{c,v}} \int_{\mathbb{E}_3^{c,v}} \nabla_\tau \phi |_{\mathbb{E}_4^{v,v}} \nabla_\tau \psi dl(x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} b_1(i, \psi) &= \int_{\mathbb{E}_4^{c,c}} k^{c,c} i \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{v,v}} i \nabla_\tau \psi dl(x) \\ &+ \int_{\mathbb{E}_0} i \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{c,v}} i \nabla_\tau \psi dl(x). \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} b_2^{c,c}(\phi, j) &= \int_{\mathbb{E}_3^{c,c}} \nabla_\tau \phi j dl(x), \\ b_2^{c,v}(\phi, j) &= \int_{\mathbb{E}_3^{c,v}} \nabla_\tau \phi j dl(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$b_2^{v,v}(\phi, j) = \int_{\mathbb{E}_4^{v,v}} \nabla_\tau \phi j dl(x) - \int_{\mathbb{E}_3^{v,v}} k^{v,v} \nabla_\tau \phi j dl(x).$$

$$l(v) = \int_{\Omega^a} f v dx + \int_{\Gamma_2^a} g v ds. \quad (2.26)$$

Lemma 1 The equations (2.1-2.5) and (2.12) are equivalent to the variational formulation (2.20-2.26).

Remark 2 Our goal is not to prove the existence and uniqueness of the solution (see [7] about this question in a particular case), but to prove the equivalence between the classical formulation and a variational formulation, which will be used in the numerical simulation.

Proof. Let $(v, \psi, j) \in \mathbb{V}_{ad}(0, 0)$, from (2.1-2.4), and using the symmetry of σ_{ij} and the Green's theorem, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^a} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx + \int_{\Omega^a} (R_{ijkl} s_{kl}(u) + e_{kij} \partial_k(\phi)) s_{ij}(v) dx \\ = \int_{\Omega^a} f v dx + \int_{\Gamma_2^a} g v ds. \end{aligned}$$

From the electrostatic equation (2.2) arises

$$\int_{\Omega_p^a} -\partial_i D_i \psi dx = 0,$$

the above equation is equivalent to

$$\int_{\Omega_p^a} (e_{kij} s_{ij}(u) + c_{ki} \partial_i(\phi)) \partial_i \psi dx - \int_{\Gamma_2^a} D_i \cdot n_i \psi d\Gamma = 0.$$

The derivative with respect to t gives

$$\int_{\Omega_p^a} \left(e_{kij} s_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} u_i \right) + c_{ki} \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi \right) \right) \partial_i \psi dx - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma_2^a} D_i \cdot n_i \psi d\Gamma = 0. \quad (2.27)$$

From (2.7), on each piezoelectric patch

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma_2^a} D_i \cdot n_i \psi d\Gamma = i_{\Gamma_2^a} \psi,$$

with an abuse notation, it will be denoted by

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma_2^a} D_i \cdot n_i \psi d\Gamma = - \int_{\mathbb{E}_2^a} i \nabla_\tau \psi dl(x),$$

where $\psi = 0$ on the lower face each piezoelectric patch. Then the equation (2.27) can be written as follows

$$\int_{\Omega_p^a} \left(e_{kij} s_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right) + c_{ki} \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi \right) \right) \partial_i(\psi) dx - \int_{\mathbb{E}_2^a} i \nabla_\tau \psi dl(x) = 0.$$

The derivative with respect to t the above equation is

$$\int_{\Omega_p^a} \left(e_{kij} s_{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u \right) + c_{ki} \partial_i \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \right) \right) \partial_i(\psi) dx - \int_{\mathbb{E}_2^a} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) = 0.$$

Then

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^a} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx + \int_{\Omega^a} (R_{ijkl} s_{kl}(u) + e_{kij} \partial_k(\phi)) s_{ij}(v) dx + \\ \int_{\Omega_p^a} \left(e_{kij} s_{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + c_{ki} \partial_i \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \right) \partial_i(\psi) dx \\ - \int_{\mathbb{E}_2^a} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) = \int_{\Omega^a} f v dx + \int_{\Gamma_2^a} g v ds. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Now we consider the circuit equation (2.12)

$$\int_{\mathbb{E}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}_0} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_1} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_2^R} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \\ \int_{\mathbb{E}_2^C} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_2^L} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_2^P} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \\ \int_{\mathbb{E}_3^{c,c}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_3^{v,c}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_3^{v,v}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \\ \int_{\mathbb{E}_3^{c,v}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{c,c}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{v,c}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \\ \int_{\mathbb{E}_4^{v,v}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{c,v}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) = 0. \end{aligned}$$

Since $i = i_d$ on \mathbb{E}_1 , $i = 0$ on $\mathbb{E}_3^{v,c}$, $i = 0$ on $\mathbb{E}_3^{v,v}$, $\nabla_\tau \psi = 0$ on $\mathbb{E}_3^{c,c}$, $\frac{1}{k^{c,v}} \nabla_\tau \psi = i$ on $\mathbb{E}_3^{c,v}$ and $i = k^{v,c} \nabla_\tau \phi$ on $\mathbb{E}_4^{v,c}$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}_2^R} Lg^R \frac{\partial \nabla_\tau \phi}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_2^C} Lg^C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_2^P} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \\ \int_{\mathbb{E}_2^L} Lg^L \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{c,c}} k^{c,c} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{v,c}} k^{v,c} \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x) + \\ \frac{1}{k^{c,v}} \int_{\mathbb{E}_3^{c,v}} \frac{\partial \nabla_\tau \phi}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{v,c}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) + \int_{\mathbb{E}_4^{v,v}} \frac{\partial i}{\partial t} \nabla_\tau \psi dl(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Finally from the first equations of (2.17) we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}_3^{c,c}} \nabla_\tau \phi j dl(x) = 0, \\ \int_{\mathbb{E}_4^{c,v}} (\nabla_\tau \phi - k^{c,v} i_{|\mathbb{E}_3^{c,v}}) j dl(x) = 0, \\ \int_{\mathbb{E}_4^{v,v}} \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x) - \int_{\mathbb{E}_3^{v,v}} k^{v,v} \nabla_\tau \phi \nabla_\tau \psi dl(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

The variational formulation yields from (2.28), (2.29) and (2.30).

Conversely, defining the current i on $\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2 \cup \mathbb{E}_3^{v,c} \cup \mathbb{E}_3^{v,v} \cup \mathbb{E}_3^{c,v} \cup \mathbb{E}_4^{c,c}$ by $i = i_d$ on \mathbb{E}_1 , $i = Lg \nabla_\tau \phi$ on \mathbb{E}_2 , $i = 0$ on $\mathbb{E}_3^{v,c}$, $i = 0$ on $\mathbb{E}_3^{v,v}$, $i = \frac{1}{k^{c,v}} \nabla_\tau \phi_{|\mathbb{E}_3^{c,v}}$ on $\mathbb{E}_3^{c,v}$, $i = k^{c,c} i_{|\mathbb{E}_3^{c,c}}$ on $\mathbb{E}_4^{c,c}$, and the voltage $L \nabla_\tau \psi = u_d$ on \mathbb{E}_0 , and $\nabla_\tau \psi = 0$ on $\mathbb{E}_3^{c,c}$, then the variational formulation yields the equations (2.1-2.2) and (2.12).

2.3 Numerical simulation tools

2.3.1 Electronic circuits simulator : Alecsis

The Analogue and Logic Electronic Circuit SIMulation System "ALECSIS", is a hybrid simulator developed in the Laboratory for Electronic Design Automation (LEDA), University of Niš. It represents the coupling of the interpreter and the linker with the simulation engine, and the connection between the mechanisms for analogue and digital simulation.

Alecsis [1] does not have tools for description of partial differential equations and their discretization. However, for finite elements solvers, these tools are usually separate programs, where mechanical device can be drawn, and where meshing is performed automatically or by hand. The finite elements solver and Alecsis are coupled, as it is schematically presented in the following figure.

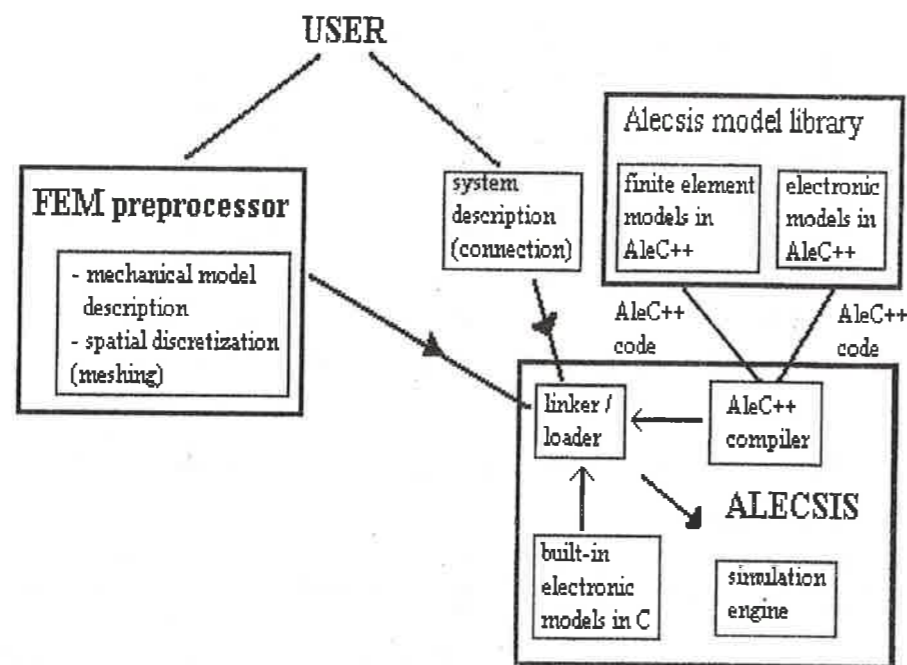


Figure 1. Coupling of Alecsis and finite elements method

2.3.2 Finite elements description of the coupled model

Both finite elements (FE) and circuit simulators define models as contributions to the overall system of equations. When finite elements model or electronic component model is known, that means that its contribution to the system of equations is defined. All contributions are assembled into the system, and the system is solved. The problem is to define finite elements models that is correctly coupled with electronic models when they are assembled into the system.

To make correct coupling, it is necessary to formulate finite elements models in the network simulators framework. Network simulators use modified nodal approach (MNA) to formulate equations [8]. The mechanical structure together with the piezoelectric sensors and actuators are described by a finite elements method. Electrical variables of piezoelectric sensors and actuators appear as new degrees of freedom in the finite elements model (see description of the mesh). The ADINI's finite elements is used for the discretization of the mechanical field (see [6]), with twelve (12) degrees of freedom. The potential is considered to be constant on each element. So \mathbb{P}_0 finite elements are used for the potentials.

For modified nodal approach, it is important that the voltage flowing from the piezoelectric patch, appears as new degrees of freedom (new unknown), and the current is expressed as function of voltage and node displacement. When formulated in this manner, piezoelectric patches are correctly coupled to electrical components in the circuit. When variational formulation (2.20-2.26) is used to describe electromechanical problems, we obtain a numerical method equivalent to the modified nodal approach. In this formulation the mechanical part is discretized using finite elements method, and description of electronics is the usual one according to the modified nodal approach [8].

Finite element of Adini

Let us recall the definition of the Ari Adini's rectangular element, as it is stated in [6].

Definition 3 Ari Adini's element [ARI] is defined as follows :

- i) The geometrical shape is a rectangle (or a parallelogram),
- ii) The degrees of the freedom are the value of the function and of its first order derivatives at the vertices of the rectangle,
- iii) The space P_K of the shape functions is defined by :

$$P_K = \left\{ P = \hat{p} \circ F_K^{-1}; \text{ for all } \hat{p} \in \hat{P} \right\}, \text{ with } \hat{P} = \{ P(3) \cup \{ \xi^3 \eta \} \cup \{ \xi \eta^3 \} \}.$$

F_K is defined for all $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ by :

$$F_K : \begin{cases} x = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}x_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}x_2 \\ \quad + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}x_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}x_4, \\ y = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}y_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}y_2 \\ \quad + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}y_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}y_4, \end{cases}$$

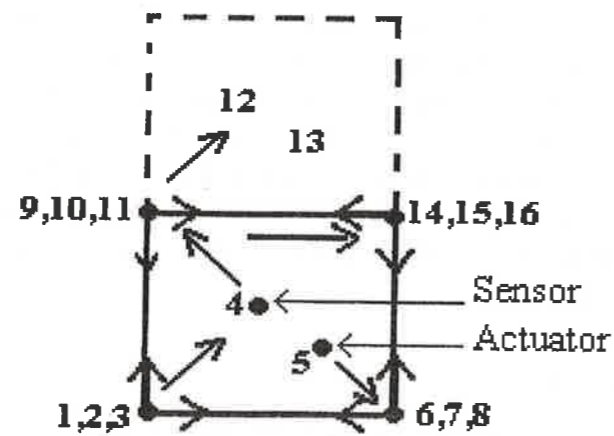
where (x_i, y_j) are the coordinates of the vertices A_i , $1 \leq i \leq 4$.

Description of the mesh

Here we describe the mesh of the one-dimensional model, which will be used in the second chapter. The mesh is defined by two numbering :

Local numbering

Each element with or without piezoelectric element has its numbering given by :



● Local value

↗ Local values of the derivatives

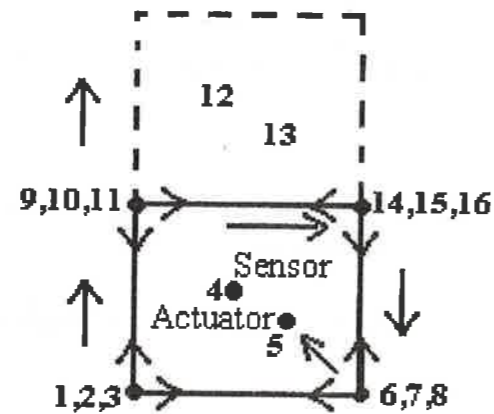
Figure 2. Local numbering

The degrees of freedom of the first element is the following set

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\}.$$

Global numbering

The global numbering of the mechanical structure with piezoelectric sensor and actuator is defined as follows :



● Local value

↗ Local values of the derivatives

Figure 3. Global numbering

The degrees of freedom of the first element is the following set

$$\{1, 2, 3, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 6, 7, 8, 4, 5\}.$$

Bibliographie

- [1] Alecsis, User's Manual, <http://venus.elfak.ni.ac.yu/~homer/ealecsis.htm>
- [2] Canon, E. et Lenczner, M., Models of elastic Plates with Piezoelectric Inclusions. Part I : Models without Homogenization. Math. Comput. Modelling Vol. 26, No. 5, pp. 79-106, 1997.
- [3] Canon, E. et Lenczner, M. Deux modèles de plaque mince avec inclusions de piézoélectriques et circuits électroniques distribués, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série II b, p. 793-798, 1998.
- [4] Ciarlet P.G., Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures, Série RMA, vol. 14, Masson (1990).
- [5] Ciarlet P.G., and Destuynder P., A justification of the two-dimensional plate model, Comp. Meth. Appl. Eng. 17/18, 227-52, (1979).
- [6] Lascaux, P., and Lesaint, P., Some nonconforming finite elements for the plate bending problem, R.A.I.R.O., R-1, pp.9-53, 1975.
- [7] Lenczner M., and Senouci G., Modelling of a thin piezoelectric shell coupled with a distributed electronic circuit by distributed piezoelectric transducers, soumis.
- [8] Vlach, J., and Singhal, K., Computer methods for circuit analysis and design, VNR, New York.

Chapitre 3

Distributed control based on distributed electronic circuits. Application to vibration control

3.1 Introduction

This chapter is related to a distributed control problem arising in structural mechanics. Consider a thin beam covered on one side with a distribution of piezoelectric actuators and on the other side with piezoelectric sensors. Assume that this beam is subjected to either external forces or initial excitation. Our control objective is the optimal reduction of the vibration level.

The control strategy determination can be based on different theories. One of them, the optimal control theory, leads to an explicit expression of the control law. It has the advantage to be optimal, relatively to a choice of functional that is minimized. Mathematical foundations of such a theory are well established and are classical also for infinite dimensional systems. In practice, there is a strong limitation in use of it for distributed control with many actuators and sensors. In fact, it produces a control law requiring that each actuator uses the data coming from every sensors. This constraint is generally unacceptable for realistic fabrication of distributed control systems.

The goal of this chapter is to propose a new implementation of optimal control that does not suffer such a limitation. We show how optimal control can be applied, in a realistic way, using a distributed electronic circuit. Each (actuator, sensor) couple is only linked with its closer neighbors.

Let us remark that the problem of vibration control for a one dimensional beam is quite simple and does not require a distribution of many actuators and sensors. However, this study is a preliminary investigation before considering more complex cases of distributed control. Further interesting applications could be acoustic control or fluid flow control.

The chapter is organized as follows. In section 2.2, the statement of model and its reduction using asymptotic analysis are given. This simplified model is used in order to construct an optimal control law. The solution of the algebraic Riccati equation and its approximation with partial differential operators are given in section 2.3. Then, its approximation by distributed analog circuit is described in section 2.4. The last section is devoted to the numerical results.

3.2 Statement of the optimal control problem

We consider an elastic rectangular plate partially covered on both sides with piezoelectric transducers. Those located on the top are used as sensors when those located on the other face are actuators. The plate is assumed to be clamped on its boundaries Γ_0^a normal to the width direction and free on the other. Lower face of each piezoelectric transducer is connected to the earth. The upper face of each sensor is connected to the input of a current to current amplifier when the one's of each actuator is connected to the output of an active voltage source.

3.2.1 The three-dimensional plate model

The motion equations of multilayered plate equipped with a distributed piezoelectric transducers are given by the dynamic equation :

$$\int_{\Omega^a} (\rho^a \partial_{tt}^2 u_i^a \cdot v_i + \sigma_{ij}^a s_{ij}(v)) dx = 0,$$

for all admissible displacement field $v \in V_{ad}$. In addition, electrostatic equation

$$\int_{\Omega^a} D_i^a \partial_i \psi dx = 0,$$

for all admissible potential ψ . Here Ω^a , ρ^a , u^a , σ^a , and D^a are respectively the domain occupied by the plate, volume mass, vector of mechanical displacements, mechanical stress tensor, and vector of electric displacement. The index a refers to the thickness of the plate. Mechanical stresses and electric displacements are assumed to be linearly dependent of strain tensor $s_{kl}(u^a)$ and the electrical field $\partial_k \phi^a$ (ϕ^a is the electrical potential) :

$$\sigma_{ij}^a = R_{ijkl} s_{kl}(u^a) + e_{kij} \partial_k \phi^a \text{ and } D_k^a = e_{kij} s_{ij}(u^a) - c_{ki} \partial_i \phi^a.$$

3.2.2 The two-dimensional plate model

In the following model formulation and simulation, the piezoelectric patches are assumed to be perfectly bonded to the surface of the plate. In order to maintain symmetry of the geometric structure, the piezoelectric sensors and actuators are bonded symmetrically on the top and bottom. The thin plate model considered has been derived in [3] using asymptotic method.

The motion equation of the two-dimensional model is given by :

$$\int_{\omega} \rho \partial_{tt}^2 u v + (c_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2 u_3 + e_{\alpha\beta} \phi) \partial_{\alpha\beta}^2 v = 0, \quad (3.1)$$

for all admissible displacement $v \in V_{ad}$, with

$$V_{ad} = \left\{ u \in H^2(\omega) \text{ such that } u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_0 \subset \partial\omega \right\}.$$

Here ω , Γ_0 , ρ , u , $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $e_{\alpha\beta}$ and ϕ are the mean surface of the plate, the part of the boundary $\partial\omega$ where the plate is clamped, the surface mass, the transverse mechanical displacement, the bending stiffness tensor of the plate, the piezoelectric constant and the electric voltage on actuators. The mean value of the charges flowing out of the upper surface S of a sensor is equal to :

$$q = e_{\alpha\beta} \frac{1}{|S|} \int_S \partial_{\alpha\beta}^2 u ds. \quad (3.2)$$

This two-dimensional model has been used in the numerical simulation presented in this work.

3.2.3 The homogenized one-dimensional beam model

Let us assume that sensors and actuators are numerous and periodically distributed in the plate. Thanks to homogenization theory, one can derive a simplified model of such a composite structure (see [3] for a rigorous presentation). It leads to a model of an homogeneous electro-mechanical medium which presents a behavior close to original one. Nevertheless the stiffness tensor, the piezoelectric strain and the permittivity matrix of this model are constants. The current flowing out of the upper surface of a sensor is modelled by a distributed continuous field. The voltage on the actuator is represented by a distributed continuous voltage. The equations of the homogenized plate model are the same that (3.1-3.2). Only the value of the coefficients makes a difference. We do not introduce new notations for them. This model is used in the optimal control synthesis.

We assume that the plate strains are pure bending in the direction ξ of the beam axis. It turns out that, the strain in the other direction is small. Then the homogenized plate model can be replaced by a one-dimensional beam model :

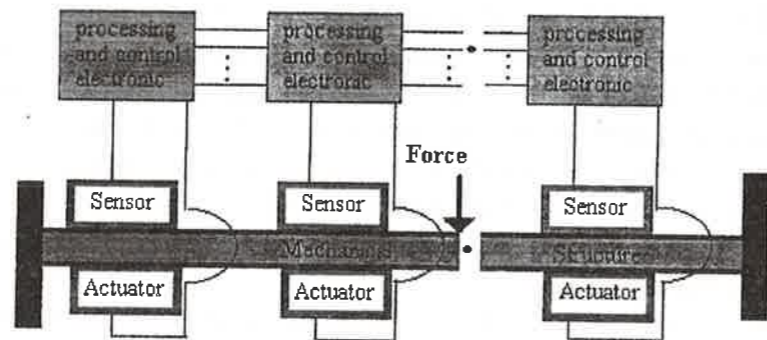
$$\partial_{tt}^2 u + r \Delta^2 u + d \Delta \phi = 0 \text{ on } \mathbb{R}^+ \times \Omega. \quad (3.3)$$

Here,

$$r = \frac{R_{1111}}{\rho}, \quad d = \frac{e_{111}}{\rho}, \quad e = e_{111}, \text{ and } \Omega = [0, 1].$$

The boundary conditions are $u = \partial_\xi u = 0$ on $\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$. Initial conditions are $u(0, \xi) = g(\xi)$ and $\partial_t u(0, \xi) = 0$. Here, Δ is the one-dimension Laplace operator : $\Delta = \partial_{\xi\xi}^2$. In terms of control theory u is the state variable and v is considered as a control variable. The density of electric charges and of current delivered by the sensors are

$$q = e \Delta u \text{ and } i = e \Delta \partial_t u.$$



Mechanical structure equipped with distributed electronic circuit

Figure 1

3.2.4 Optimal control

In the following, an optimal control theory is applied to the one-dimensional homogeneous beam model. First, let us write the model as a first order system of differential equations :

$$\partial_t x = Ax + B\phi \text{ for } t > 0 \text{ and } x(0) = x^0. \quad (3.4)$$

Here the state variable $x = {}^t(x_1, x_2) = {}^t(u, \partial_t u)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ where $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\Omega = [0, 1]$ denotes the one-dimensional domain occupied by the beam and $H_0^2(\Omega)$ is the set of functions u belonging to $H^2(\Omega)$ such that $u(t, \xi) = \partial_\xi u(t, \xi) = 0$ on the clamped boundary $\mathbb{R}^+ \times \Gamma_0 = \mathbb{R}^+ \times \{0, 1\}$. The operator A is defined as follows,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -rA_0 & 0 \end{pmatrix},$$

with domain $D(A) = H^4(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^2(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega) \subset \mathcal{H}$, where $A_0 = \Delta^2 = \frac{d^4}{d\xi^4}$. Its adjoint is equal to :

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -rI \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The control operator $B : U = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}$ is defined by :

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -d\Delta \end{pmatrix}.$$

A straightforward calculation shows that the adjoint $B^* : \mathcal{H} \rightarrow U$ of B is defined by :

$$B^*x = (0, -d\Delta^{-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -d\Delta^{-1}x_2.$$

Consider a scalar d_1 and the operator $C : \mathcal{H} \rightarrow Y = H_{\Gamma_0}^2(\Omega)$ defined by :

$$Cx = (d_1I \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = d_1x_1 \in Y.$$

Now, we consider the minimization problem : Find v which minimizes the cost functional

$$J(v) = \int_0^\infty |Cx|_Y^2 + |\phi|_U^2 dt, \quad (3.5)$$

where the state variable x and the control variable v are constrained by the state equation (4.5). Since (A, B) is exponentially stabilizable and (C, A) is exponentially detectable, this minimization problem admits a unique solution. Following the optimal control theory, there exists a unique nonnegative self-adjoint solution X_{ARE} to the Algebraic Riccati Equation (ARE) :

$$(A^*X_{ARE} + X_{ARE}A - X_{ARE}BB^*X_{ARE} + C^*C)x = 0, \text{ for all } x \in D(A) \quad (3.6)$$

and the optimal control ϕ is given by

$$\phi = -B^*X_{ARE}x \quad (3.7)$$

Remark 4 (i) The choice of the control space U leads to the fact that the bounded operator $BB^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^2I \end{pmatrix}$. In distributed control this choice has not effect on the control law. This implies that the Riccati operator X can be written as series of A_0 .

(ii) The velocity feedback $\phi = ki = ke\partial_{\xi\xi}^3 u$ leads to the exponentially stable system $\partial_{tt}^2 u + r\Delta^2 u + d\Delta\phi = 0$ on $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. The norm of ϕ is strongly dependant of the frequencies. It increases like a square of the frequencies, then the energy increases in the same sense. In practice such feedback leads to the saturation of the amplifiers and /or actuators.

(iii) The cost functional is chosen such that the effect of this controller is not uniform for all frequencies. This choice avoids the saturation of the amplifiers.

3.3 Exact solution X_{ARE} of the algebraic Riccati equation

In this section, we propose an approximation X_0 of the exact solution X_{ARE} . The derivation of X_0 is based on the expression of the exact solution X_{ARE} . Then, we detail the control law that is obtained when X_{ARE} is replaced by X_0 . Since the state equation is a second order one, X_{ARE} is a 2×2 matrix of operators :

$$X_{ARE} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Its adjoint with respect to the scalar product $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ is given by

$$X_{ARE}^* = \begin{pmatrix} X_{11}^* & A_0^{-1}X_{21}^* \\ A_0X_{12}^* & X_{22}^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Since the operator X_{ARE} is self-adjoint then

$$X_{11} = X_{11}^*, X_{22} = X_{22}^*, X_{12} = A_0^{-1}X_{21}^* \text{ and } X_{21} = A_0X_{12}^*.$$

All components X_{ij} of X_{ARE} can be written as $X_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k A_0^k$ with $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Hence $X_{12} = X_{12}^*$ and $X_{21} = X_{21}^*$.

Lemma 5 The unique self-adjoint non negative solution of the ARE (2.6) is given by :

$$X_{11} = \frac{\sqrt{2}}{d^2} r^{\frac{3}{2}} \sqrt{-A_0 + A_0 \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}}} \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}},$$

$$X_{12} = \frac{r}{d^2} \left(-I + \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}} \right),$$

$$X_{21} = \frac{r}{d^2} \left(-A_0 + A_0 \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}} \right),$$

$$X_{22} = \frac{\sqrt{2r}}{d^2} \sqrt{-A_0 + A_0 \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}}}.$$

Proof. The equation $A^*X + XA - XBB^*X + C^*C = 0$ is equivalent to :

$$0 = \begin{pmatrix} d_1^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -rI \\ A_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & A_0^{-1}X_{21}^* \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{11} & A_0^{-1}X_{21}^* \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -rA_0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{11} & A_0^{-1}X_{21}^* \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & A_0^{-1}X_{21}^* \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

which is equivalent to

$$\begin{cases} -rX_{21} - A_0^{-1}X_{21}^*rA_0 + d_1^2 I - d^2 A_0^{-1}X_{21}^*X_{21} = 0 \\ -rX_{22} + X_{11} - d^2 A_0^{-1}X_{21}^*X_{22} = 0 \\ A_0X_{11} - X_{22}rA_0 - d^2 X_{22}X_{21} = 0 \\ X_{21}^* + X_{21} - d^2 X_{22}X_{22} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Since $X_{21} = X_{21}^*$ and commutes with A_0 :

$$d^2 A_0^{-1}X_{21}X_{21} + 2rX_{21} - d_1^2 = 0, \quad (3.9)$$

$$X_{11} = rX_{22} + d^2 A_0^{-1}X_{21}X_{22}, \quad (3.10)$$

$$A_0X_{11} - X_{22}rA_0 - d^2 X_{22}X_{21} = 0, \quad (3.11)$$

$$X_{22}^2 = \frac{2}{d^2} X_{21}. \quad (3.12)$$

The equation (3.9) has two roots

$$X_{21} = \frac{1}{d^2} \left(-rA_0 \pm A_0 \sqrt{r^2 + d^2 d_1^2 A_0^{-1}} \right).$$

From (3.12) $X_{21} \geq 0$, so we make the choice

$$X_{21} = \frac{r}{d^2} \left(-A_0 + A_0 \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}} \right).$$

Since $X_{22} \geq 0$, from (3.12) and (3.10) we obtain respectively

$$X_{22} = \sqrt{\frac{2r}{d^4} \left(-A_0 + A_0 \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}} \right)},$$

$$X_{11} = \frac{\sqrt{2}r^{\frac{3}{2}}}{d^2} \sqrt{-A_0 + A_0 \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}}} \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}}.$$

Since, $X_{12} = A_0^{-1}X_{21}$, then

$$X_{12} = \frac{r}{d^2} \left(-I + \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} A_0^{-1}} \right).$$

Remark 6 It is worth looking this exact solution. Since it is composed of square roots of partial differential operators, it is clearly a non local operator. Implementation of such control law using distributed circuits, should require that any given actuator should receive measurement from every sensor. As it was already explained in introduction, this constraint is too strong for fabrication of real systems. That is the reason why an approximation of X_{ARE} will be considered.

3.3.1 An approximation of X_{ARE}

An analysis of the algebraic Riccati equation shows that each component X_{ij} of X_{ARE} can be written as $X_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k A_0^k$. We make a Taylor expansion with respect to A_0^{-1} , for each component

$$X_{11} = \frac{d_1 \sqrt{r}}{d} I + \frac{d d_1^3}{2r^{\frac{3}{2}}} A_0^{-1} + o(A_0^{-1}),$$

$$X_{12} = \frac{d_1^2}{2r} A_0^{-1} - \frac{d^2 d_1^4}{8r^3} A_0^{-2} + o(A_0^{-2}),$$

$$X_{21} = \frac{d_1^2}{2r} I - \frac{d^2 d_1^4}{8r^3} A_0^{-1} + o(A_0^{-1}),$$

$$X_{22} = \frac{d_1}{d \sqrt{r}} I - \frac{d d_1^3}{8r^{\frac{3}{2}}} A_0^{-1} + o(A_0^{-1}).$$

For high frequencies, X_{ARE} can be approximated by the operator X_0 :

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{d_1 \sqrt{r}}{d} I + \frac{d d_1^3}{2r^{\frac{3}{2}}} A_0^{-1} & \frac{d_1^2}{2r} A_0^{-1} \\ \frac{d_1^2}{2r} I & \frac{d_1}{d \sqrt{r}} I \end{pmatrix}.$$

Let us define the residual operator

$$Q(X_0) = A^* X_0 + X_0 A - X B B^* X + C^* C,$$

then

$$Q(X_0) = \begin{pmatrix} -\frac{d^2 d_1^4}{4r^2} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The approximation error is given by the norm of the residual operator

$$\|Q(X_0)x\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{d^2 d_1^4}{4r^2} \frac{1}{\mu_0} \|x\|_{\mathcal{H}},$$

where μ_0 is the first eigenvalue of A_0 .

Lemma 7 $Q(X_0) \leq 0$ and the system (4.5) stabilized by $\phi = -B^* X_0 x$ is exponentially stable.

Proof. With this particular choice of X_0 we find that

$$Q(X_0) = \begin{pmatrix} -\frac{d^2 d_1^4}{4r^2} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 0. \blacksquare$$

Now, replacing X_{ARE} by X_0 in (3.7), $v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ is solution of the boundary value problem:

$$\begin{cases} \Delta \phi = \frac{d(d_1)^2}{2r} u + \frac{d_1}{\sqrt{r}} \partial_t u & \text{in } \Omega \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.13)$$

By another way, from the current equation, $\partial_t u = u_t \in H_0^2(\Omega)$ is solution of:

$$\begin{cases} \Delta u_t = \frac{i}{e} & \text{in } \Omega, \\ u_t = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

The same thing can be done for the equation of charges. Using these equations, one can compute $\partial_t u$ and u in Ω . Using (3.13), one can deduce v . The resulting control law is derived by a cascade of equations involving only local operators. Thus, it can be approximated by a distributed electronic circuit having connections only between neighbors.

3.4 Approximation by a distributed electronic circuit

The control law based on X_{ARE} or on X_0 has been derived from the homogenized beam model. That is the reason why it is constituted with partial differential operators with constant coefficients. Evidently, this control law cannot be directly applied to a real system having a finite number of actuators and sensors. Now, we will discretize the cascade of equation constituting the controller. Then, a distributed circuit implementing the discretized controller will be described. Finally, results of our numerical simulation will be discussed. Consider a one-dimensional mesh with nodes $(\xi_n)_{n=0..N+1}$ located at the centers of actuators (or of sensors). The distance between two actuators (or sensors) is denoted by h .

A finite difference approximation of the controller equations is given by:

$$\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{h} + \frac{\phi_{n-1} - \phi_n}{h} = -h \frac{d(d_1^2)}{2r} u_n - h \frac{d_1}{\sqrt{r}} u_{t,n} \quad (3.15)$$

for $n = 1, \dots, N$ and $v_0 = v_{N+1} = 0$.

$$\frac{u_{t,n+1} - u_{t,n}}{h} + \frac{u_{t,n-1} - u_{t,n}}{h} = \frac{h}{e} i, \quad u_{t,0} = u_{t,N+1} = 0. \quad (3.16)$$

A similar equation for the determination of u can be derived using the equation of charges. This cascade of equation can be implemented with a cascade of distributed circuits as shown on the following figure

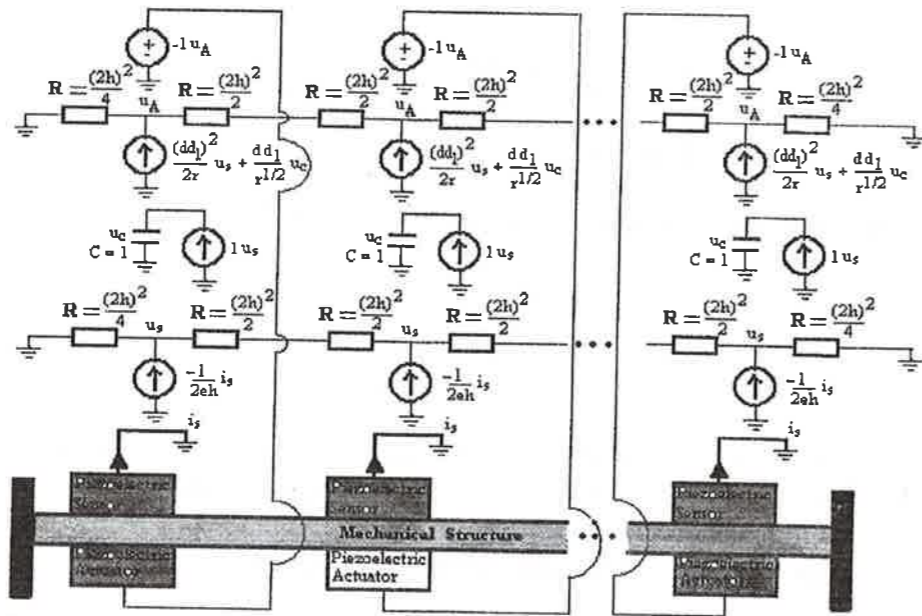


Figure 2. Electronic Circuit realizing equations (3.15) and (3.16).

In the above figure the subscripts A , s and c refer respectively to the actuator, sensor and the capacitor, and u , i denote the voltage and the current.

3.5 Numerical results

3.5.1 Analysis of the exact solution

In this subsection we analyze the solution of the analytic solution of (3.3) without control.

3.5.2 Eigenvalues and eigenfunctions

The eigenvalues problem associated to the equation (3.3) is given by

$$r \frac{d^4 w}{dx^4} - \omega^2 w = 0. \quad (3.17)$$

Defining

$$\xi = \frac{x}{l} \text{ and } \eta = \frac{w}{l},$$

where l is the length of the beam, we get

$$\eta'''' - \mu^4 \eta = 0. \quad (3.18)$$

Then

$$\mu^4 = \frac{\omega^2 l^2}{r}. \quad (3.19)$$

The general solution of (3.18) can be written

$$\eta(\mu\xi) = As_1(\mu\xi) + Bc_1(\mu\xi) + Cs_2(\mu\xi) + Dc_2(\mu\xi), \quad (3.20)$$

where

$$\begin{aligned} s_1(\mu\xi) &= \sin(\mu\xi) + \sinh(\mu\xi), \\ c_1(\mu\xi) &= \cos(\mu\xi) + \cosh(\mu\xi), \\ s_2(\mu\xi) &= -\sin(\mu\xi) + \sinh(\mu\xi), \\ c_2(\mu\xi) &= -\cos(\mu\xi) + \cosh(\mu\xi). \end{aligned} \quad (3.21)$$

From the boundary conditions we obtain

$$\cos \mu \cosh \mu - 1 = 0,$$

and

$$\eta(\mu\xi) = C \left(s_2(\mu\xi) - \frac{s_2(\mu)}{c_2(\mu)} c_2(\mu\xi) \right).$$

n	1	2	3	4	5
μ_n	4.730	7.853	10.996	14.137	17.278

Five first eigenvalues of the clamped beam.

3.5.3 The homogenized model

In this section we compute the exact solution of the homogenized controlled beam equation (3.3). We compare the effect of the velocity feedback $\phi = ki$ and the optimal control feedback. The coefficient k is chosen such that the decay rates of the first mode are equal in both cases. Let us recall that the cost functional associated to the optimal control problem has been chosen so that the decay rate of each modal component of the solution is the same.

Consider the solution $u(t, \xi)$ on the basis $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ of the eigenfunctions associated to the eigenvalues $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ of the operator $r\Delta^2$ on Ω , as follows

$$u(t, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \psi_k(\mu_k \xi), \quad (3.22)$$

Then the equation of (3.3) becomes

$$u_{tt} + r\mu_k^4 u + d\mu_k^2 \phi = 0. \quad (3.23)$$

We first consider the velocity feedback

$$\phi = \alpha u_t, \quad (3.24)$$

from (3.23) we obtain

$$\omega^2 + \alpha d\mu_k^2 \omega + r\mu_k^4 = 0, \quad (3.25)$$

with

$$\omega = \frac{1}{2} \left(-\alpha d\mu_k^2 \pm j\mu_k^2 \sqrt{4r - \alpha^2 d^2 \mu_k^4} \right). \quad (3.26)$$

Then the solution of (3.3) is given by

$$u_k(t) = e^{-\frac{1}{2}\alpha d\mu_k^2} \left(\frac{1}{k} \cos(ct) + \frac{\alpha d\mu_k^2}{c} \sin(ct) \right) \text{ with } c = \mu_k^2 \sqrt{4r - \alpha^2 d^2 \mu_k^4},$$

$$\text{and } \psi_k(\mu_k \xi) = \left(s_2(\mu_k \xi) - \frac{s_2(\mu)}{c_2(\mu)} c_2(\mu_k \xi) \right),$$
(3.27)

Now, consider the optimal control case. The feedback is given by

$$\begin{cases} \phi = d\mu_k^{-2} (X_{21}u + X_{22}u_t), \\ X_{21}(\mu_k) = \frac{r\mu_k^4}{d^2} \left(-1 + \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} \mu_k^{-4}} \right), \\ X_{22}(\mu_k) = \sqrt{\frac{2r}{d^4} \left(-\mu_k^4 + \mu_k^4 \sqrt{I + \frac{d^2 d_1^2}{r^2} \mu_k^{-4}} \right)}. \end{cases}$$
(3.28)

Substitute ϕ in equation (3.23) we obtain

$$u_k(t) = e^{-\frac{1}{2}d^2 X_{22}(\mu_k)} \left(\frac{1}{k} \cos(c_1 t) + \frac{d^2 X_{22}(\mu_k)}{c_1} \sin(c_1 t) \right)$$

where $c_1 = \sqrt{4r\mu_k^4 + 4d^2 X_{21}(\mu_k) - d^2 X_{22}^2(\mu_k)}$.

Remark 8 In the computation, the coefficient α is chosen such that $\alpha d\mu_1^2 = d^2 X_{22}(\mu_1)$, so

$$\alpha = \frac{dX_{22}(\mu_1)}{\mu_1^2}.$$

The displacements at $\xi = \frac{1}{3}$ for the four first modes in velocity and optimal feedbacks are plotted in figures (3) to (6). The voltages input to the third actuator corresponding to the four modes are also plotted in figures (3)- (6). For the first mode the displacements are the same in both cases. According to the predictions the velocity feedback is more effective when the mode number increases than the optimal control one. However the actuator voltages become also very high. The initial condition in both cases is $u(0, \xi) = \frac{1}{k}$ and $\partial_t u(0, \xi) = 0$ where k is the number of the mode.

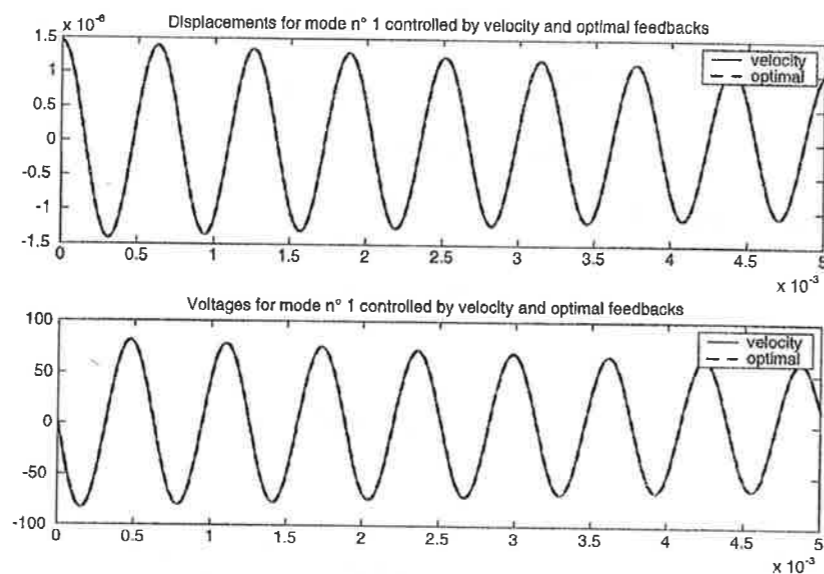


Figure 3

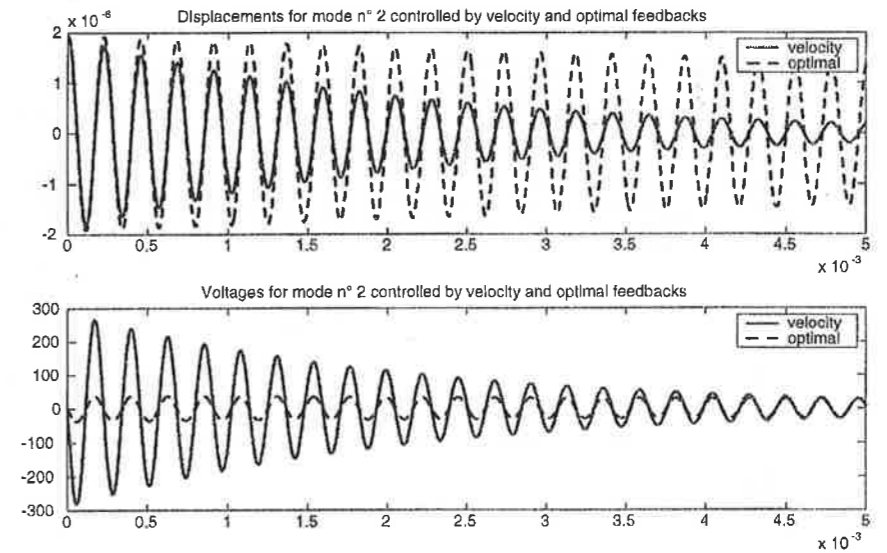


Figure 4

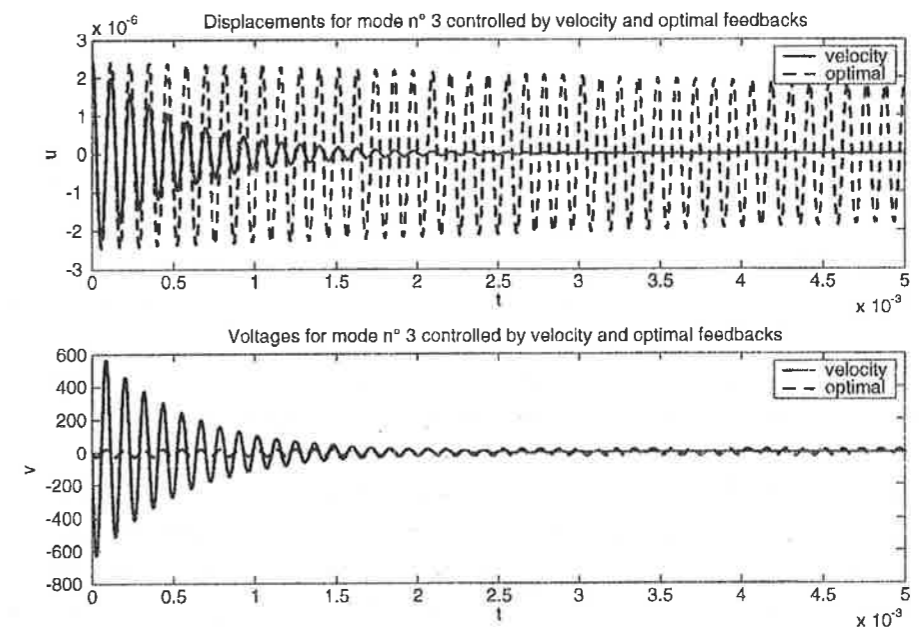


Figure 5

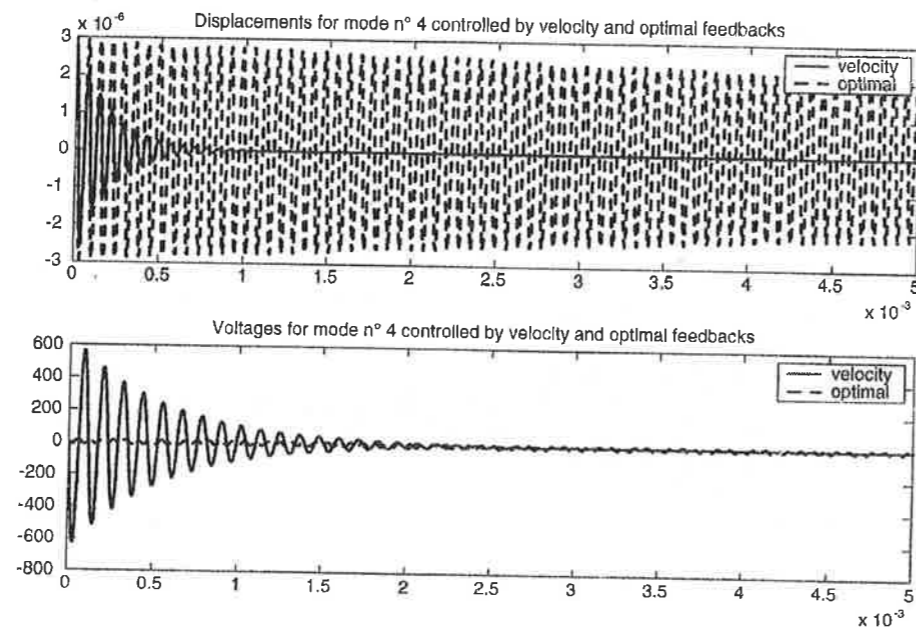


Figure 6

3.5.4 The non-homogenized model (3.1)

In this simulation we use a brass elastic plate. Its dimensions are $95\text{mm} \times 5\text{mm} \times 2\text{mm}$. This elastic plate is equipped with ten pairs of sensors/actuators and electronics that is able to change mechanical characteristics of the structure. The ten pairs of piezoelectric elements are PZT ceramics, with dimensions $5\text{mm} \times 5\text{mm} \times 0.2\text{mm}$. The distance between of two piezoelectric elements is 5mm .

The two-dimensional plate model is discretized using a finite elements method. The elastic plate is discretized with nineteen elements in the longitudinal direction and one element in the other. The global system constituted with mechanical structure and distributed circuit, is solved by an electronic circuit simulator Alecsis [1]. The electrical circuits and their connection with the mechanical structure are defined in Alecsis. The FE solver provides the mesh and elementary matrices. The files created by the FE processing program and the description of electronic circuit are introduced in Alecsis. This last constructs the global matrix and solves the global linear system.

Here, piezoelectric sensors give informations about displacement. Each electronic cell of the circuit processes those informations and gives appropriate input to the piezoelectric actuator. In this way, the displacement can be controlled by applying suitable voltage input to the piezoelectric actuator. Each processing cell of the circuit communicates only with neighboring cells, which makes this electronic system somewhat similar to cellular neural networks (CNN). We make the same calculations than the above subsection, that is we compare the displacements at $\xi = \frac{1}{3}$ for the four modes in both local and optimal feedbacks cases.

The local feedback, means that each electronic cell of the circuit takes its input from the sensor (time derivative of the displacement), calculates the controlling voltage and applies it, as the voltage input to the piezoelectric actuator. In this case there is no connections between the cells of the circuit. This is a velocity feedback, because the feedback voltage is proportional to the time derivative of the displacement. In the optimal control case, each electronic cell of the circuit takes the input from a sensor, receives informations from neighboring cells, calculates the controlling voltage and applies it, as the voltage input to the piezoelectric actuator.

Waveforms of the local-controlled (velocity feedback) and optimal controlled plate displacements at $\xi = \frac{1}{3}$, and voltages to the third actuator, are plotted for the four first modes respectively in figures (7)-(14).

The controller X_0 and the velocity feedback give about the same decay rate about the first mode. The optimal controller X_0 provides the same decay rate for the four modes. The input voltages related to the modes 2 to 4 of the velocity feedback are more important than those of the controller X_0 . However let us remark that in contrary to the theoretical predictions, the applied voltages of the controller X_0 for the first mode are more higher than those of the velocity feedback. This error yields from the approximation of the Laplacian close to the boundaries. The physical parameters of the plate piezoelectric system are the following :

	Dimensions	Parameters
Brass plate	$length = 95\text{mm},$ $width = 5\text{mm}$ $Thickness = 2\text{mm}$	$\rho = 5850\text{kg/m}^3$
		$\epsilon_{33} = 7.1e - 6\text{Fm}^{-1}$ $R_{1111} = 1.3E5$ $R_{2222} = 1.3E5$ $r = 16.29$ $d = 10$ $e = 1.6E - 6$
Piezoelectric	$length = 5\text{mm},$ $width = 5\text{mm}$ $Thickness = 0.2\text{mm}$	$\rho = 7600\text{kg/m}^3$ $e = 1.1E - 2$ $e_{111} = 11.$

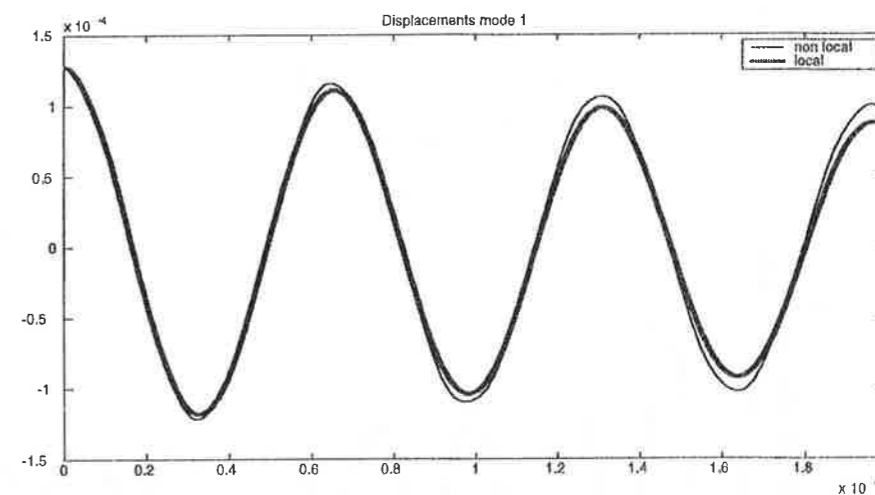


Figure 7

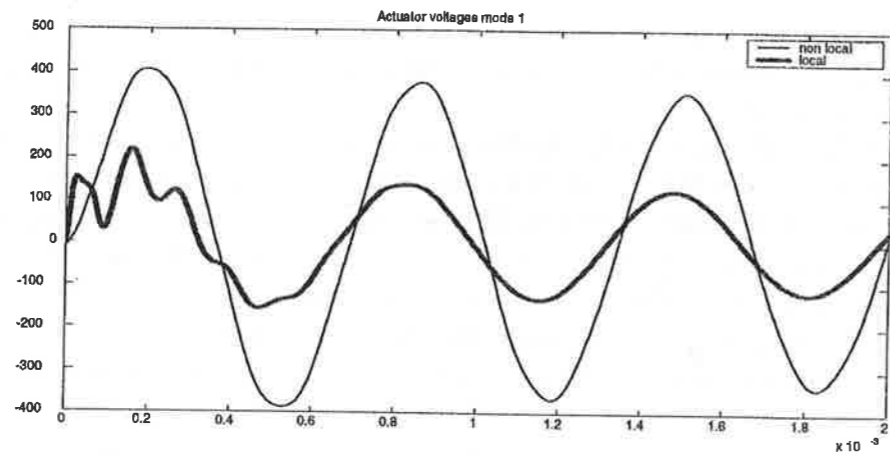


Figure 8

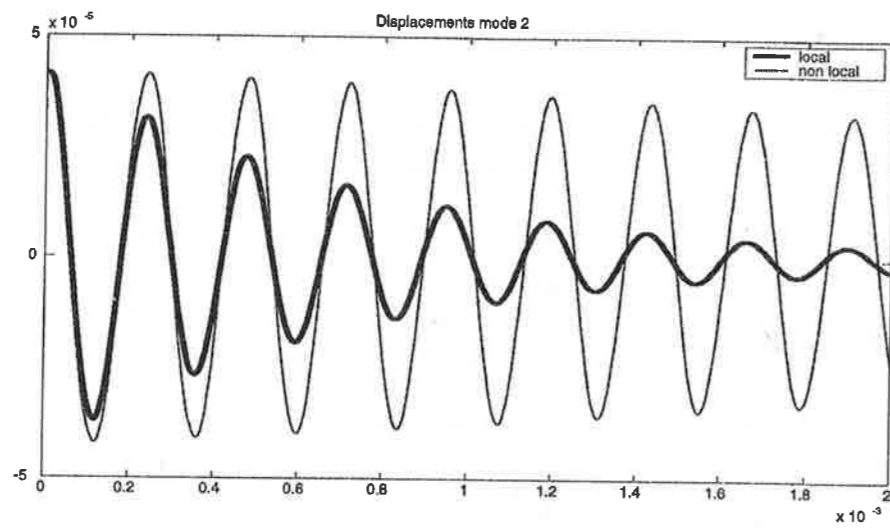


Figure 9

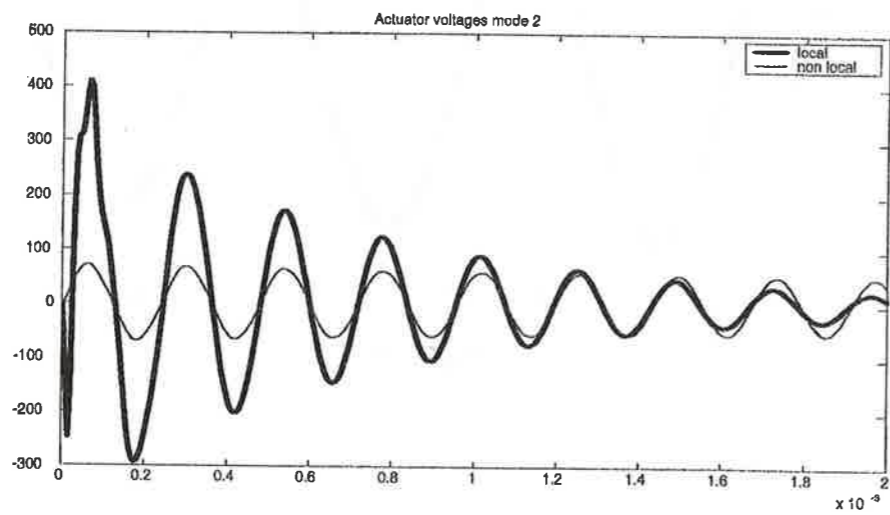


Figure 10

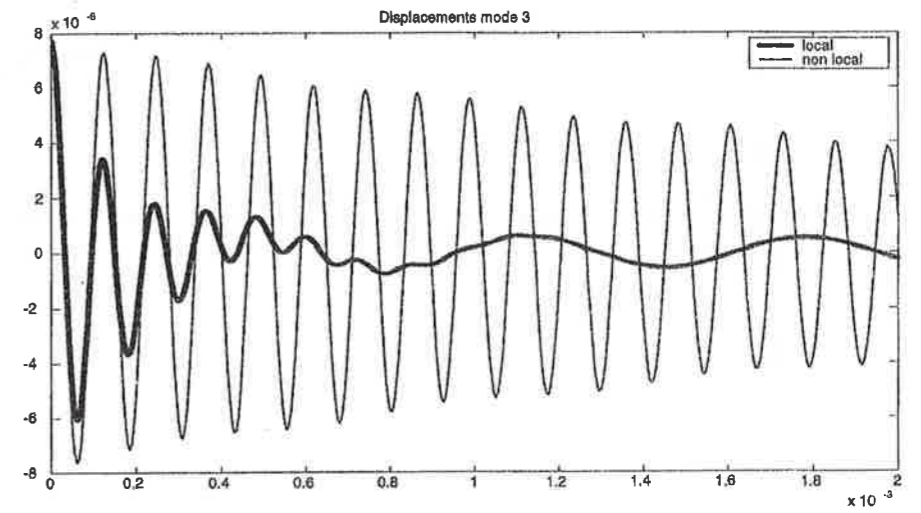


Figure 11

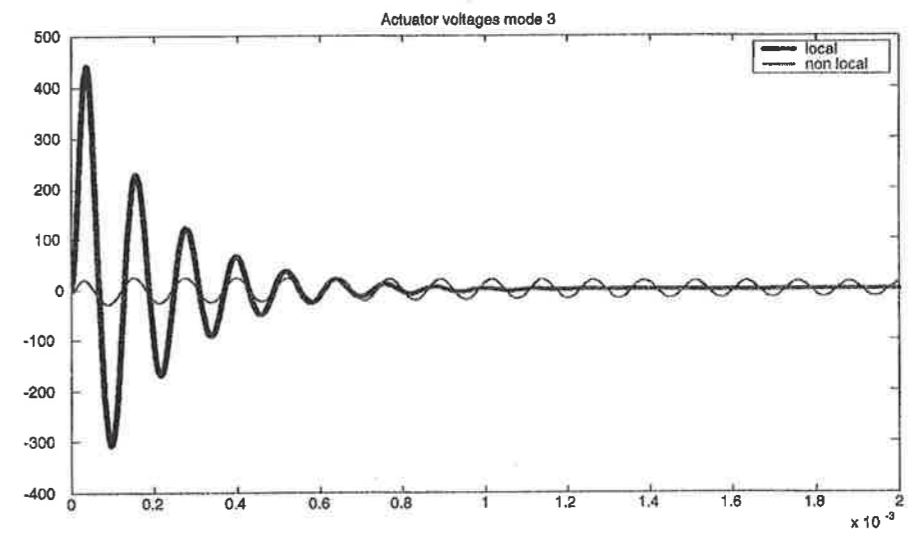


Figure 12

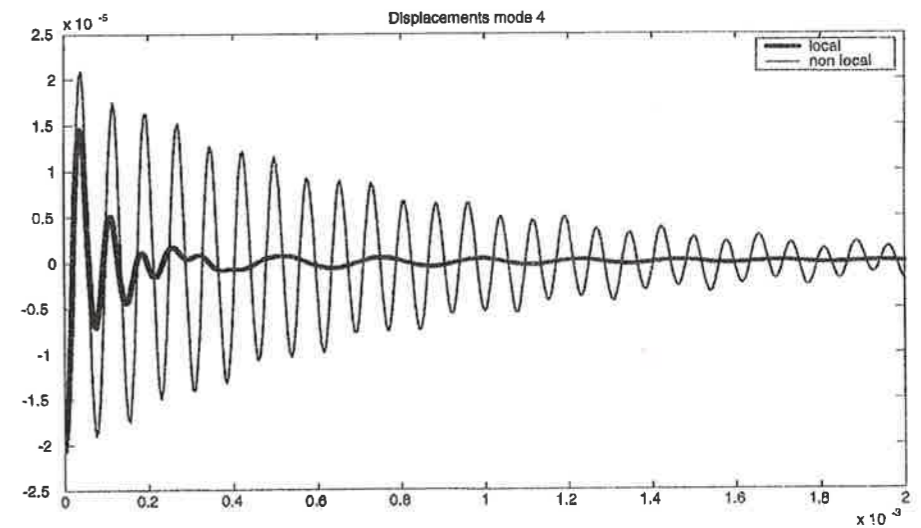


Figure 13

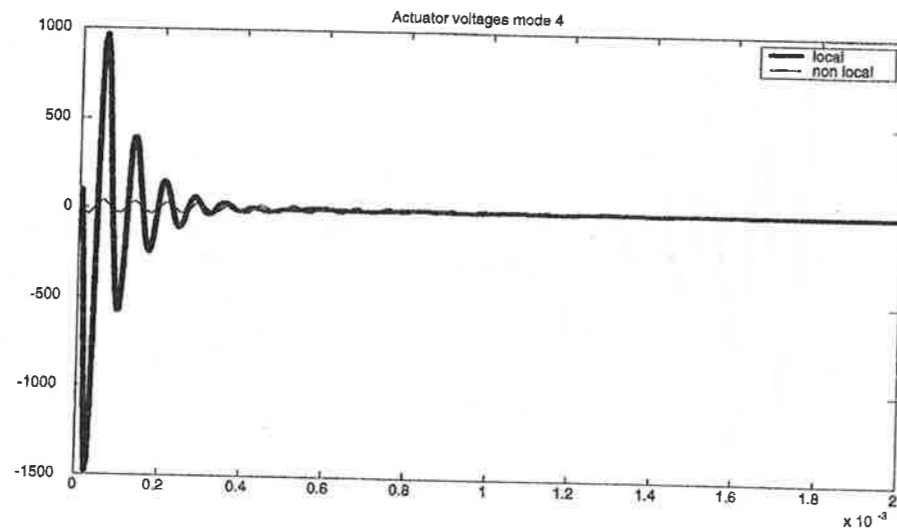


Figure 14

Bibliographie

- [1] Alecsis, <http://venus.elfak.ni.ac.yu/~homer/ealecsis.htm>
- [2] Bailey, T., and Hubbard, I.J.E., Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam, *AIAA Journal of Guidance and control*, vol. 6, No. 5, pp. 605-611 (1985).
- [3] Canon, E. et Lenczner, M., Deux modèles de plaque mince avec inclusions de piézoélectriques et circuits électroniques distribués, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série II b, p. 793-798, 1998.
- [4] Canon, E. et Lenczner, M. Models of elastics with piezoelectric inclusions. Part I : Models without homogenization. *Math. Comput. Modelling*, vol. 26, No. 5, pp. 79-106, (1997).
- [5] Kais, A. and Marius, T., Stabilization of the Bernoulli-Euler beams by means of pointwise feedback force, *R.I. N°414*, janvier 1999.
- [6] Komornik, V., *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*. Research in Applied Mathematics, 36, Paris, Masson 156 p. (1994).
- [7] Lasiecka, I., Approximations of Riccati equation for abstract boundary control problems-Applications to hyperbolic systems, *Num. Funct. Anal. and optimiz.*, 8(3&4), 207-248 (1985-86).

Chapitre 4

Parametrization of H_∞ -suboptimal controllers : Application to the wave equation

A parametrization of the H_∞ -suboptimal dynamic controllers is proposed for some infinite dimensional systems. An application to the wave equation with internal control and internal perturbation is presented. This parametrization is the generalization to the infinite dimension case of a result obtained by P. Gahinet for the finite dimension case.

4.1 Introduction

Let $X, U, W = W_y \times W_x$ be real, separable Hilbert spaces, and let $\mathcal{L}(U, X)$, $\mathcal{L}(W, X)$ be the class of linear bounded operators from, respectively, U to X and W to X . In this work, we consider the uncertain equation G on X :

$$G : \begin{cases} x' = Ax + B_1 w_x + B_2 u \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

where $B_1 \in \mathcal{L}(W_x, X)$, $B_2 \in \mathcal{L}(U, X)$; u is the control and w_x is an unknown disturbance, with $u(t) \in U$ and $w_x(t) \in W_x$. The operator A is the infinitesimal generator of a strongly semigroup $S(t)$ on X . The partial observation is given by

$$y = C_2 x + D_{21} w_y, \quad (4.2)$$

where $C_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ and $D_{21} \in \mathcal{L}(W_y, Y)$, Y being a Hilbert space, called the space of measurements, $w_y(t)$ is being another disturbance, modeling the measurement error. Here the controller is allowed to be only causal function of the observation y . The performance index z is written in terms of a second output :

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (4.3)$$

where $z(t) \in Z$, with Z a real Hilbert space, $C_1 \in \mathcal{L}(X, Z)$, $D_{12} \in \mathcal{L}(U, Z)$ satisfying the following standard hypotheses :

- (H1) $D_{12}^* D_{12}$ is coercive on U ,
(H2) $D_{21} D_{21}^*$ is coercive on Y ,
(H3) $D_{12}^* C_1 = 0$ on X ,
(H4) $D_{21} B_1^* = 0$ on X .

Remark 9 The two last assumptions mean that $|C_1 x + D_{12} u|_Z^2 = |C_1 x|_Z^2 + |D_{12} u|_Z^2$ for all $(x, u) \in X \times U$ and $|B_1^* x + D_{21}^* y|_W^2 = |B_1^* x|_W^2 + |D_{21}^* y|_W^2$ for all $(x, y) \in X \times Y$.

Let the cost function corresponding to the output z be

$$\rho_{x_0}(u, w) = \int_0^{+\infty} \|z(t)\|_Z^2 dt = \int_0^{+\infty} (\|C_1 x(t)\|_Z^2 + (D_{12}^* D_{12} u, u)_U) dt. \quad (4.4)$$

We describe a method to determine a class of H_∞ dynamic controllers K for (4.1) and (4.2), characterized by $(A_K, D(A_K))$ an unbounded operator, $B_K \in \mathcal{L}(Y, V_K)$, $C_K \in \mathcal{L}(V_K, U)$, having the form

$$\begin{cases} p' = A_K p + B_K y, & p(0) = 0, \\ u = C_K p. \end{cases} \quad (4.5)$$

The operator A_K is the infinitesimal generator of a strongly semigroup $S_K(t)$ on V_K , where V_K is a real Hilbert space. If $V_K = X$, then A_K can be chosen as a bounded perturbation of the unbounded operator A , with $A_K = A + M_K$, where $M_K \in \mathcal{L}(X, X)$.

The H^∞ -optimal control for (4.1) under (4.2) and (4.5), with the cost function (4.4) is the following: Given $\gamma > 0$, find A_K, B_K and C_K such that

$$\sup_{w_x, w_y} \frac{\rho_{x_0}(u, w)}{\int_0^{+\infty} (\|w_y(t)\|_{W_y}^2 + \|w_x(t)\|_{W_x}^2) dt} < \gamma^2, \quad (4.6)$$

where $w_x \in L^2(0, +\infty; W_x)$ and $w_y \in L^2(0, +\infty; W_y)$, with $L^2(0, +\infty; W_x)$ is the Hilbert space of Lebesgue square integrable functions on $(0, +\infty)$ with values in W_x .

Definition 10 The γ -attenuation level is attained for system (4.1) with the observation (4.2) and cost function (4.4), if there exist A_K, B_K and C_K in (4.5) such that (4.6) holds.

Our result generalizes to infinite dimension the one's in [8]. The proof is based on two lemmas. The first one is the bounded real lemma in infinite dimension, proved in [4], and the second is a generalization of an algebraic lemma used by Gahinet [8] in the proof of his main result.

In addition to the general parametrization, we apply it to the construction of particular dynamic controllers for the wave equation with internal control and internal perturbation. In a second application, a large class of dynamic controllers is explicitly formulated for the same problem. Let us make some comments on the problem of the parametrization of the H_∞ -optimal controllers. This H_∞ control problem was first formulated for finite dimension linear time-invariant systems. Several approaches to solve the problem were adopted: frequency domain, state-space and combinations of these. One of the main contributions to solve the problem was done by J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis in [6]. The authors have used the state-space approach of the problem to show the equivalence between the suboptimal problems and the solvability of two Riccati equations. In [9], B. Van Keulen has extended the results of [6] to the Pritchard-Salomon class. All the assumptions done in [6] have been generalized to their natural

infinite dimensional counterparts. By another way, in [8], Pascal Gahinet has solved the same problem with a proof based on the Bounded Real lemma.

Concerning the parametrization of dynamic stabilizers for the wave equation, D.L. Russel [11] and F. Ammar Khodja and A. Benabdallah [2] have described some large classes of stabilizers being of first order in time, while M. Afilal and Ammar Khodja [1] have described a large class of stabilizers being of second order in time.

The paper is organized as follows. In section 2, the general parametrization is described and the two applications to the wave equation are detailed. The proofs are reported in section 3. In section 4 is devoted to an appendix.

4.2 Main result and application to the wave equation

In the first subsection we present our main result. In the second subsection, we describe its application to the wave equation. A general class of controllers for wave equation is given.

4.2.1 Main result

Let X, U, W, Y, Z be some real separable Hilbert spaces and A be the infinitesimal generator of a C_0 -semigroup e^{At} on X with domain $D(A)$, $B_1 \in \mathcal{L}(W, X)$, $B_2 \in \mathcal{L}(U, X)$, $C_1 \in \mathcal{L}(X, Z)$, $C_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $D_{12} \in \mathcal{L}(U, Z)$, $D_{21} \in \mathcal{L}(W, Y)$. Here $\mathcal{L}(X, Y)$ denotes the set of bounded linear operators defined from X into Y . We denote the Hilbert adjoint of an operator $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ by $K^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, for example, $B_1^* \in \mathcal{L}(X, W)$. We consider the uncertain system

$$G : \begin{cases} x' = Ax + B_1 w + B_2 u, & x(0) = 0, \\ z = C_1 x + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_{21} w, \end{cases} \quad (4.7)$$

Here $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ is the state of the system, $u \in L^2(\mathbb{R}^+, U)$ is the control input, $w \in L^2(\mathbb{R}^+, W)$ is an unknown deterministic disturbance, $y \in L^2(\mathbb{R}^+, Y)$ is the partial observer and $z \in L^2(\mathbb{R}^+, Z)$ is the performance index (also called the controlled output). We shall denote the inner product of a space H by $(\cdot, \cdot)_H$ and the corresponding norm by $|\cdot|_H$. Throughout in the paper, we suppose that the standards hypotheses (H1-H4) hold.

Furthermore, let a system K , which takes y as an input, and produces the output u , be defined as follows

$$K : \begin{cases} p' = A_K p + B_K y & p(0) = 0, \\ u = C_K p, \end{cases} \quad (4.8)$$

where $A_K : D(A_K) \hookrightarrow V_K \rightarrow V_K$, is an infinitesimal generator of a C_0 -semigroup $e^{A_K t}$ on a separable real Hilbert space V_K with domain $D(A_K)$, $B_K \in \mathcal{L}(Y, V_K)$ and $C_K \in \mathcal{L}(V_K, U)$.

Given a dynamic controller K we denote by

$$\mathcal{F}(G, K) : \begin{matrix} L^2(\mathbb{R}^+, W) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+, Z) \\ w \rightarrow z, \end{matrix}$$

the closed loop operator and its norm by $\|\mathcal{F}(G, K)\|$.

This above function is called the transfer function of the following coupled system :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}' = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \mathcal{B}w, & \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z = \mathcal{C} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (4.9)$$

where

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_K D_{21} \end{pmatrix}, \mathcal{C} = (C_1 \quad D_{12} C_K). \quad (4.10)$$

An equivalent definition of the definition 1 is the following.

Definition 11 For a given positive number γ , we shall denote by $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$ the class of dynamic controllers K of the form (4.8) having the following properties :

- (i) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is exponentially stabilizable and $(\mathcal{A}^*, \mathcal{C}^*)$ is exactly controllable,
- (ii) $\|\mathcal{F}(G, K)\| < \gamma$.

In order to give a sense to the sequence, we assume that :

(H5) (A, B_2) is exponentially stabilizable and (A, C_2) is exponentially detectable,

(H6) (A, B_1) and (C_1^*, A^*) are exactly controllable.

Remark 12 Assumptions (C_1^*, A^*) is exactly controllable and $D_{12}^* C_1 = 0$ imply the following condition : There exists $\varepsilon > 0$ such that for all $(\omega, x, u) \in \mathbb{R} \times D(A) \times U$ satisfying $i\omega x = Ax + B_2 u$, there holds $|C_1 x + D_{12} u|_Z^2 \geq \varepsilon |x|_X^2$. This latter is the analogue of the invariant zeros condition for the finite dimensional case : (A, B_2, C_1, D_{12}) has no invariant zeros on the imaginary axis.

Definition 13 We shall denote by $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$ the class of dynamic controllers of the form (4.8) build as follows : $A_K : D(A_K) \hookrightarrow V_K \rightarrow V_K$, $B_K \in \mathcal{L}(Y, V_K)$, $C_K \in \mathcal{L}(V_K, U)$. Given two self adjoint coercive operators P and Q from X into X , two injective operators with closed ranges $M \in \mathcal{L}(V_K, X)$, $N \in \mathcal{L}(V_K, X)$ jointly satisfy

$$\begin{aligned} & (Ax, Py)_X + (Px, Ay)_X + (P(\gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 (D_{12}^* D_{12})^{-1} B_2^*) Px, y)_X + (C_1 x, C_1 y)_Z + \\ & \left((PB_2 (D_{12}^* D_{12})^{-\frac{1}{2}} + MC_K^* (D_{12}^* D_{12})^{\frac{1}{2}})^* x, (PB_2 (D_{12}^* D_{12})^{-\frac{1}{2}} + MC_K^* (D_{12}^* D_{12})^{\frac{1}{2}})^* y \right)_U = 0 \\ & \text{for every } x, y \in D(A), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & (Qx, A^* y)_X + (A^* x, Qy)_X + (Q(\gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* (D_{21} D_{21}^*)^{-1} C_2) Qx, y)_X + (B_1^* x, B_1^* y)_W \\ & + \left((QC_2^* (D_{21} D_{21}^*)^{-\frac{1}{2}} + NB_K (D_{21} D_{21}^*)^{\frac{1}{2}})^* x, (QC_2^* (D_{21} D_{21}^*)^{-\frac{1}{2}} + NB_K (D_{21} D_{21}^*)^{\frac{1}{2}})^* y \right)_Y = 0 \\ & \text{for every } x, y \in D(A^*), \end{aligned} \quad (4.12)$$

with

$$MN^* = \gamma^{-2} PQ - I, \quad (4.13)$$

$$r_\sigma(PQ) = r_\sigma(QP) < \gamma^2. \quad (4.14)$$

In addition,

$$\begin{aligned} A_K \tilde{M}^* &= M^*(A + \gamma^{-2} B_1 B_1^* P + B_2 C_K M^*) \\ &- B_K C_2 + \gamma^{-2} \tilde{N}^{-1} Q M C_K^* (B_2^* P + D_{12}^* D_{12} C_K M^*) \end{aligned} \quad (4.15)$$

or equivalently

$$\begin{aligned} \tilde{N} A_K &= \{A + \gamma^{-2} Q C_1^* C_1 + N B_K C_2\} \tilde{N} \\ &- B_2 C_K + \gamma^{-2} (Q C_2^* + N B_K (D_{21} D_{21}^*)) (N B_K)^* P (\tilde{M}^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

where $\tilde{N} \in L(V_K, \text{Im}(N))$ and $\tilde{M} \in L(V_K, \text{Im}(M))$ are the invertible and continuous operators associated to N and M .

Let us recall the following well known result.

Definition 14 Assume that (H5) and (H6) are satisfied. We call γ_{opt} the small positive value of γ , such that for every $M \in \mathcal{L}(V_K, X)$ (respectively for every $N \in \mathcal{L}(V_K, X)$) there exists a unique self adjoint positive solution $P \in \mathcal{L}(X)$ (respectively $Q \in \mathcal{L}(X)$) of the Riccati equation (4.11) (respectively (4.12)).

We are now ready to state the main theorem.

Theorem 15 Consider a parameter γ greater than γ_{opt} ,

- (i) if K belongs to $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$ then K belongs to $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$,
- (ii) let us assume that (H5) and (H6) are fulfilled, if K belongs to $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$ then K belongs to $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$.

Proof : see subsection 3.2 and 3.3.

4.2.2 Application to the wave equation

In this section we apply the point (ii) of the theorem 2 to the wave equation. First we built two particular controllers $K \in \mathcal{P}_\infty$, then we propose a family of such controllers.

Let Ω be an open bounded subset of \mathbb{R}^n with a regular boundary. Let us consider the wave equation :

$$\begin{cases} u'' = \Delta u + w_2 + v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases} \quad (4.17)$$

First case

With the partial observation

$$y = u_t + w_1 \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (4.18)$$

and the measurement output

$$\begin{cases} z_1 = v \\ z_2 = u_t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{array} \quad (4.19)$$

where the control variable is $v \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ and the perturbation variable is $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in W = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. The system of equations (4.17), (4.18) and (4.19) can be written in the form (4.7) with $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, $Z = (L^2(\Omega))^2$, $U = L^2(\Omega)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \tilde{B}_1^*$, $\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$, $\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \tilde{C}_1^*$, $\tilde{B}_2^* = (0 \ I)$, $\tilde{C}_2 = (0, I)$, $\tilde{C}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$, $\tilde{D}_{21} = (I, 0)$ and $\tilde{D}_{12} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$.

Second case

With the partial observation

$$y = u + w_1 \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad (4.20)$$

and the measurement output

$$\begin{cases} z_1 = u \\ z_2 = v \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{array} \quad (4.21)$$

where the control variable is $v \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ and the perturbation variable is $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in W = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. The system form by (4.17), (4.20) and (4.21) can be written in the form (4.7) with $X = Z = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $Y = H_0^1(\Omega)$, $U = L^2(\Omega)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = B_1^*$, $B_2 = D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C_1^*$, $B_2^* = (0 \ I)$, $C_2 = D_{21} = (I \ 0)$ and $C_2^* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$.

Here Δ is the Laplace operator with the domain $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. The assumptions (H1)-(H6) are clearly satisfied in both cases. In order to apply the part (ii) of the theorem, let us consider a $\gamma > \gamma_{opt} \geq 2$.

Particular controllers

Let us pose $V_K = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, we define the following operators

First case

$$A_K = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

with

$$\alpha = -\frac{2(\gamma^2 - 1)\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma(\gamma^2 - 2)}, \quad (4.23)$$

$$B_K = -\frac{\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 2} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C_K = \left(0, -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}I\right). \quad (4.24)$$

The dynamic controller is given by

$$K : \begin{cases} p_{tt} = \Delta p + \alpha p_t - \frac{\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 2} y, \\ v = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} p_t \end{cases} \quad (4.25)$$

Finally the coupled system is given by

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} p_t + w_2, \\ p_{tt} = \Delta p + \alpha p_t - \frac{\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 2} u_t - \frac{\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 2} w_1, \end{cases} \quad (4.26)$$

with

$$\alpha = -\frac{2(\gamma^2 - 1)\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma(\gamma^2 - 2)}.$$

In [1] it is proved that the system (4.26) is exponential stable.

Second case

$$A_K = A + (\gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^*)P + (\gamma^{-2}QP - I)^{-1}QC_2^*C_2, \quad (4.27)$$

$$B_K = -(\gamma^{-2}QP - I)^{-1}QC_2^*, \quad \text{and} \quad C_K = -B_2^*P,$$

with

$$P = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}}A_I & (-I + A_I) \\ (-\Delta)(-I + A_I) & \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}} & -I + A_I \\ (-\Delta)(-I + A_I) & \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}} A_I \end{pmatrix},$$

where

$$A_I(\gamma, \Delta) = \left(I + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} (-\Delta)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem 16 For γ greater than γ_{opt} , the system K characterized by (A_K, B_K, C_K) in both cases belongs to $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$.

Remark 17 i) The value γ_{opt} depends on the first eigenvalue of the Laplace operator.

(ii) The theorem 3 is a direct consequence of the theorem 2. The derivation of the controller is based on the resolution of the equations (4.11)-(4.15) where we have made the choice $M = I$,

$$PB_2 + C_K^* = 0$$

and

$$QC_2^* + NB_K = 0,$$

with

$$N = (\gamma^{-2}QP - I)^{-1}.$$

The fact that $V_K = X$ results of the choice $M = I$. If M is an arbitrary invertible operator, with continuous inverse, between a separable Hilbert space X_M and X a similar computation leads to another controller (A_K, B_K, C_K) such that $V_K = X_M$. This means that the choice of V_K is a direct consequence of the choice of M .

(iii) Contrary to optimal control, this controller is obtained by using a partial observation.

(iv) Since the condition (4.13) is not in general fulfilled, then this method does not apply to the boundary control.

A class of controllers

In this section we generalize the controller exhibited in the last section. It leads to a wide class of controllers. Consider two linear operators

$$Q_P : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

and

$$Q_Q : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

such that each components $\begin{pmatrix} Q_{P1} \\ Q_{P2} \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} Q_{Q1} \\ Q_{Q2} \end{pmatrix}$ are some arbitrary functions of $-\Delta$. In addition, we assume that $Q_{P1}Q_{P2}^*$ and $Q_{Q1}Q_{Q2}^*$ are some non-positive bounded operators. Now, let us consider the operators $P \in \mathcal{L}(X)$ and $Q \in \mathcal{L}(X)$, defined by

$$P = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} (I + (-\Delta)^{-1} A_P) \left(2A_P + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} Q_{P2}Q_{P2}^* \right)^{\frac{1}{2}} - Q_{P1}Q_{P2}^* & (-\Delta)^{-1} A_P \\ A_P & \left(2A_P + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} Q_{P2}Q_{P2}^* \right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\text{with } A_P = \Delta + \left(\Delta^2 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \Delta (I + Q_{P1}Q_{P1}^*) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \left(2A_Q + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} Q_{Q2}Q_{Q2}^* \right)^{\frac{1}{2}} & (-\Delta)^{-1} A_Q \\ A_Q & (I + (-\Delta)^{-1} A_Q) \left(2A_Q + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} Q_{Q2}Q_{Q2}^* \right)^{\frac{1}{2}} - Q_{Q1}Q_{Q2}^* \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\text{with } A_Q = \Delta + \left(\Delta^2 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \Delta (I + Q_{Q2}Q_{Q2}^*) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Let us pose $V_K = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,

$$A_K = A + (\gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^*)P + B_2^*Q_P^* - (\gamma^{-2}QP - I)^{-1}(Q_Q - QC_2^*)C_2 + \gamma^{-2}(\gamma^{-2}QP - I)^{-1}(Q_P - PB_2)Q_P^*, \quad (4.30)$$

$$C_K = Q_P^* - B_2^*P \text{ and } B_K = (\gamma^{-2}QP - I)^{-1}(Q_Q - QC_2^*).$$

Consider a $\gamma > \gamma_{opt}$ such that the lemma 1 is applicable when

$$PB_2(D_{12}^*D_{12})^{-\frac{1}{2}} + MC_K^*(D_{12}^*D_{12})^{\frac{1}{2}} = Q_P$$

$$QC_2^*(D_{21}D_{21}^*)^{-\frac{1}{2}} + NB_K(D_{21}D_{21}^*)^{\frac{1}{2}} = Q_Q,$$

and such that $r_\sigma(PQ) < \gamma^2$.

Theorem 18 For every operators Q_P and Q_Q satisfying the above conditions, the system K characterized by (A_K, B_K, C_K) given by (4.30) belongs to $\mathcal{P}_\infty(\gamma)$.

4.3 Proofs

4.3.1 Extension of the algebraic lemma of [7]

Here γ denotes any positive real number. Consider two separable Hilbert spaces V and W . In the following lemma, we consider two self adjoint invertible and bounded operators $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(V \times W)$ and $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(V \times W)$. Let us consider the decompositions of \mathcal{P} and of \mathcal{Q} relatively to $V \times W$:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^* & \theta \end{pmatrix} \text{ and } \mathcal{Q} = \gamma^{-2}\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^* & \Psi \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

where $R \in \mathcal{L}(V)$, $S \in \mathcal{L}(V)$, $M \in \mathcal{L}(W, V)$, $N \in \mathcal{L}(W, V)$, $\theta \in \mathcal{L}(W)$, $\Psi \in \mathcal{L}(W)$.

Lemma 19 (i) If \mathcal{P} is positive then R and S are positive and the spectral radius $r_\sigma(R^{-1}S^{-1})$ is strictly less than γ^2 .

(ii) Conversely, given self-adjoint, positive and invertible operators $R \in \mathcal{L}(V)$ and $S \in \mathcal{L}(V)$ such that $r_\sigma(R^{-1}S^{-1})$ is strictly less than γ^2 . If there exists $M \in \mathcal{L}(W, V)$ and $N \in \mathcal{L}(W, V)$ two injective operators with closed ranges such that $MN^* = \gamma^{-2}I - RS$. Then there exists unique self-adjoint, positive and invertible operators $\theta \in \mathcal{L}(W)$ and $\Psi \in \mathcal{L}(W)$ such that the operators $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(V \times W)$ and $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(V \times W)$ defined by (4.31) are positive and $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \gamma^{-2}I$.

Proof of the lemma 4 : The proof is done for $\gamma = 1$. The general result can be obtained by scaling $\bar{\mathcal{P}} = \gamma^{-1}\mathcal{P}$ and $\bar{\mathcal{Q}} = \gamma^{-1}\mathcal{Q}$.

Necessity part (i). Suppose that $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^* & \theta \end{pmatrix}$ is invertible and positive. Since $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ then $R = R^*$ and

$$(Rx, x)_V = \left(\mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{V \times W} > 0 \text{ for all } x \in V,$$

then R is positive. Since \mathcal{P} is invertible then that \mathcal{P} is injective, it follows that R is injective. From the above lemma (A.3.6 [5]) one deduces that R is invertible. For the same reason S is invertible and positive. Now it remains to prove the inequality $r_\sigma(R^{-1}S^{-1}) < 1$.
From

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} RS + MN^* & RN + M\Psi \\ M^*S + \theta N^* & M^*N + \theta\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

arises the following system,

$$MN^* = I - RS \text{ and } M\Psi = -RN,$$

which implies that

$$M\Psi M^* = -R(MN^*)^* = R(SR - I).$$

But, $\Psi > 0$ implies that

$$R(SR - I) > 0,$$

or equivalently

$$(R^{\frac{1}{2}}SR^{\frac{1}{2}} - I) > 0,$$

therefore

$$(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}R^{-\frac{1}{2}} - I) < 0.$$

Lemma 20 If A is a bounded self-adjoint positive operator on a Hilbert space, then

$$r_\sigma(A) < 1 \iff A - I < 0.$$

Proof. The proof of this lemma is in appendix.

From the lemma 5 we deduce that $r_\sigma(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}R^{-\frac{1}{2}}) < 1$.

Let us recall the well known result.

Lemma 21 ([5]) Let T, S be bounded operators on the Banach space X . The following relation holds :

$$r_\sigma(TS) = r_\sigma(ST).$$

From the lemma 6 we conclude that

$$r_\sigma\left(\left(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}\right)R^{-\frac{1}{2}}\right) = r_\sigma\left(R^{-\frac{1}{2}}\left(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}\right)\right) = r_\sigma(R^{-1}S^{-1}) < 1.$$

Sufficiency part (ii). We construct two invertible and positive operators θ and Ψ . Let us prove that there exists a unique invertible and positive $\theta \in \mathcal{L}(W)$ such that

$$\theta N^* + M^*S = 0. \quad (4.32)$$

This equation is equivalent to

$$N\theta N^* + NM^*S = 0.$$

Using the relations $NM^* = I - SR$ and $(SR - I)S = S(RS - I)$ this is equivalent to

$$N\theta N^* = S(RS - I).$$

4.3 Proofs

4.3.1 Extension of the algebraic lemma of [7]

Here γ denotes any positive real number. Consider two separable Hilbert spaces V and W . In the following lemma, we consider two self adjoint invertible and bounded operators $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(V \times W)$ and $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(V \times W)$. Let us consider the decompositions of \mathcal{P} and of \mathcal{Q} relatively to $V \times W$:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^* & \theta \end{pmatrix} \text{ and } \mathcal{Q} = \gamma^{-2}\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^* & \Psi \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

where $R \in \mathcal{L}(V)$, $S \in \mathcal{L}(V)$, $M \in \mathcal{L}(W, V)$, $N \in \mathcal{L}(W, V)$, $\theta \in \mathcal{L}(W)$, $\Psi \in \mathcal{L}(W)$.

Lemma 19 (i) *If \mathcal{P} is positive then R and S are positive and the spectral radius $r_\sigma(R^{-1}S^{-1})$ is strictly less than γ^2 .*

(ii) Conversely, given self-adjoint, positive and invertible operators $R \in \mathcal{L}(V)$ and $S \in \mathcal{L}(V)$ such that $r_\sigma(R^{-1}S^{-1})$ is strictly less than γ^2 . If there exists $M \in \mathcal{L}(W, V)$ and $N \in \mathcal{L}(W, V)$ two injective operators with closed ranges such that $MN^ = \gamma^{-2}I - RS$. Then there exists unique self-adjoint, positive and invertible operators $\theta \in \mathcal{L}(W)$ and $\Psi \in \mathcal{L}(W)$ such that the operators $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(V \times W)$ and $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(V \times W)$ defined by (4.31) are positive and $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \gamma^{-2}I$.*

Proof of the lemma 4 : The proof is done for $\gamma = 1$. The general result can be obtained by scaling $\bar{\mathcal{P}} = \gamma^{-1}\mathcal{P}$ and $\bar{\mathcal{Q}} = \gamma^{-1}\mathcal{Q}$.

Necessity part (i). Suppose that $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^* & \theta \end{pmatrix}$ is invertible and positive. Since $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ then $R = R^*$ and

$$(Rx, x)_V = \left(\mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{V \times W} > 0 \text{ for all } x \in V,$$

then R is positive. Since \mathcal{P} is invertible then that \mathcal{P} is injective, it follows that R is injective. From the above lemma (A.3.6 [5]) one deduces that R is invertible. For the same reason S is invertible and positive. Now it remains to prove the inequality $r_\sigma(R^{-1}S^{-1}) < 1$.
From

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} RS + MN^* & RN + M\Psi \\ M^*S + \theta N^* & M^*N + \theta\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

arises the following system,

$$MN^* = I - RS \text{ and } M\Psi = -RN,$$

which implies that

$$M\Psi M^* = -R(MN^*)^* = R(SR - I).$$

But, $\Psi > 0$ implies that

$$R(SR - I) > 0,$$

or equivalently

$$(R^{\frac{1}{2}}SR^{\frac{1}{2}} - I) > 0,$$

therefore

$$(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}R^{-\frac{1}{2}} - I) < 0.$$

Lemma 20 *If A is a bounded self-adjoint positive operator on a Hilbert space, then*

$$r_\sigma(A) < 1 \iff A - I < 0.$$

Proof. The proof of this lemma is in appendix.

From the lemma 5 we deduce that $r_\sigma(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}R^{-\frac{1}{2}}) < 1$.

Let us recall the well known result.

Lemma 21 ([5]) *Let T, S be bounded operators on the Banach space X . The following relation holds :*

$$r_\sigma(TS) = r_\sigma(ST).$$

From the lemma 6 we conclude that

$$r_\sigma\left(\left(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}\right)R^{-\frac{1}{2}}\right) = r_\sigma\left(R^{-\frac{1}{2}}\left(R^{-\frac{1}{2}}S^{-1}\right)\right) = r_\sigma(R^{-1}S^{-1}) < 1.$$

Sufficiency part (ii). We construct two invertible and positive operators θ and Ψ . Let us prove that there exists a unique invertible and positive $\theta \in \mathcal{L}(W)$ such that

$$\theta N^* + M^*S = 0. \quad (4.32)$$

This equation is equivalent to

$$N\theta N^* + NM^*S = 0.$$

Using the relations $NM^* = I - SR$ and $(SR - I)S = S(RS - I)$ this is equivalent to

$$N\theta N^* = S(RS - I).$$

Since N is injective with closed range then N^* is surjective, that is for all $x \in W$ there exist $y \in V$ such that $N^*y = x$. The operator θ is defined by

$$(\theta x, x)_W = (\theta N^*y, N^*y)_V = (S(RS - I)y, y)_V.$$

This defines a unique θ which satisfies (4.32). The nonnegativity of θ results of the nonnegativity of $S(RS - I)$ which in turn results of the inequality $r_\sigma(R^{-1}S^{-1}) \leq 1$. Since $S(RS - I)$ is self-adjoint, it follows that θ is self-adjoint.

From (4.32) one deduces

$$\theta N^*S^{-1} + M^* = 0,$$

thus $\theta N^*S^{-1}N + M^*N = 0$, together with $M^*N = I - \theta\Psi$ imply that $\theta(\Psi - N^*S^{-1}N) = I$. Then $\theta^{-1} = \Psi - N^*S^{-1}N$, which is a self-adjoint, invertible and positive operator.

We use the same arguments to construct the invertible and positive operator $\Psi \in \mathcal{L}(W)$ solution of

$$RN + M\Psi = 0. \quad (4.33)$$

Now we prove that $M^*N + \theta\Psi = I$.

$$\begin{aligned} N(M^*N + \theta\Psi)M^* &= (NM^*)^2 + (N\theta)(\Psi M^*) \\ &= (I - SR)^2 + S(I - RS)R \\ &= (I - SR)(I - SR + SR) \\ &= I - SR = NM^*. \end{aligned}$$

Since M and N are injective, then

$$M^*N + \theta\Psi = I. \quad (4.34)$$

Then by construction $\begin{pmatrix} R & M \\ M^* & \theta \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} S & N \\ N^* & \Psi \end{pmatrix}$ are the algebraic inverse each other and belong to $\mathcal{L}(V \times W)$. We define $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^* & \theta \end{pmatrix}$ thus $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$, \mathcal{P} is invertible and $\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^* & \Psi \end{pmatrix}$. It remains to prove that \mathcal{P} is positive.

From (4.32), (4.33) and (4.34), $RN + M\Psi = 0$ imply $N + R^{-1}M\Psi = 0$ thus $M^*N + M^*R^{-1}M\Psi = 0$, together with $M^*N = I - \theta\Psi$ imply that $\Psi^{-1} = \theta - M^*R^{-1}M$. Therefore

$$\theta - M^*R^{-1}M > 0. \quad (4.35)$$

The inequality $(\theta y, y)_W > (R^{-1}My, My)_V$ for every $y \in W$ yields

$$(Rx, x)_V + (\theta y, y)_W > (Rx, x)_V + (R^{-1}My, My)_V \text{ for every } x \in V,$$

$$(Rx, x)_V + (\theta y, y)_W > -2 \left(R^{\frac{1}{2}}x, R^{-\frac{1}{2}}My \right)_V = -2(x, My)_V,$$

then $(Rx, x)_V + 2(x, My)_V + (\theta y, y)_W > 0$, therefore

$$\left(\mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)_{V \times W} = (Rx, x)_V + 2(x, My)_V + (\theta y, y)_W > 0.$$

This completes the proof of the lemma 5. ■

Proof of the theorem 2 (i)

Before we prove the theorem, we recall the bounded real lemma, which is the basic tool of our approach.

Lemma 22 Suppose that \mathcal{A} is the infinitesimal generator of the C_0 -semigroup $T(t)$ on the Hilbert space Z and that $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(Z, Y)$, where U, Y are Hilbert spaces. Consider the operator $\mathcal{F}(u) : L^2(\mathbb{R}^+; U) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+; Y)$ such that $\mathcal{F}(u)(t) = \mathcal{C} \int_0^t T(t-s)\mathcal{B}u(s) ds$.

If $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is exponentially stabilizable and $(\mathcal{A}^*, \mathcal{C}^*)$ is exactly controllable, then for any γ strictly greater than zero the following two assertions are equivalent :

i) $T(t)$ is exponentially stable and $\|\mathcal{F}\|$ is strictly less than γ .

ii) The following algebraic Riccati equation has a bounded self-adjoint, positive, coercive solution $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(Z)$ such that $\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{B}^*\mathcal{P}$ generates an exponentially stable C_0 -semigroup on Z :

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{P}x)_Z + (\mathcal{P}x, \mathcal{A}x)_Z + (\mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{B}^*\mathcal{P}x, x)_Z + \gamma^{-2}(\mathcal{C}x, \mathcal{C}x)_Y = 0 \quad (4.36)$$

for all $x \in D(\mathcal{A})$.

Proof. This result is proved in [4], except the fact that \mathcal{P} is coercive. This fact is proved as follows. Let $x = e^{At}x_0$ for an arbitrary $x_0 \in D(\mathcal{A})$. Then

$$\frac{d}{dt} (e^{At}x_0, \mathcal{P}e^{At}x_0)_Z = (e^{At}x_0, \mathcal{P}\mathcal{A}e^{At}x_0)_Z + (\mathcal{A}e^{At}x_0, \mathcal{P}e^{At}x_0)_Z.$$

Since \mathcal{P} is solution of (4.36), this latter is equivalent to

$$\frac{d}{dt} (e^{At}x_0, \mathcal{P}e^{At}x_0)_Z = -(\mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{B}^*\mathcal{P}x, x)_Z - \gamma^{-2}(\mathcal{C}x, \mathcal{C}x)_Y.$$

Integrating with respect to t yields

$$(e^{AT}x_0, \mathcal{P}e^{AT}x_0) - (x_0, \mathcal{P}x_0) = - \int_0^T (\|B^* \mathcal{P}e^{At}x_0\|_U^2 + \|Ce^{At}x_0\|_Y^2) dt$$

Since $e^{At}x_0 \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$, we have that

$$(\mathcal{P}x_0, x_0) \geq \int_0^\infty \|Ce^{At}x_0\|_Y^2 dt \geq \alpha \|x_0\|^2$$

because (A^*, C^*) is exactly controllable. Hence \mathcal{P} is a coercive, bounded operator, invertible, with continuous bounded inverse. ■

Remark 23 From lemma 2.35 in [9], the Riccati equation (4.36) is equivalent to the following

i)

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(D(A)) \subset D(A^*) \quad \text{and} \\ & (A^* \mathcal{P} + \mathcal{P}A + \mathcal{P}B B^* \mathcal{P} + \gamma^{-2} C^* C) x = 0 \quad \text{for all } x \in D(A). \end{aligned} \quad (4.37)$$

ii)

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \in \mathcal{L}(D(A), D(A^*)) \quad \text{and} \\ & (A^* \mathcal{P} + \mathcal{P}A + \mathcal{P}B B^* \mathcal{P} + \gamma^{-2} C^* C) x = 0 \quad \text{for all } x \in D(A). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Proof of (4.11-4.14).

Now, define $\mathcal{X} = \mathcal{X}' = X \times V_K$. Let us apply the bounded real lemma to the coupled system (4.9) related to a controller $K \in \mathcal{P}_\infty(\gamma)$. The equation (4.37) has a positive self adjoint solution $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ which is coercive. The operator \mathcal{P} may be decomposed in blocs relatively to the decomposition of $\mathcal{X} = X \times V_K : \mathcal{P} = \begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. The equation (4.37) can be rewritten as follows

$$\begin{pmatrix} A^* & (B_K C_2)^* \\ (B_2 C_K)^* & A_K^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_K D_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^* & (B_K D_{21})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$\gamma^{-2} \begin{pmatrix} C_1^* \\ (D_{12} C_K)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & D_{12} C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

for all $(u, v) \in D(A) \times D(A_K)$.

It is equivalent to

$$\begin{pmatrix} A^* S + (\bar{N} B_K C_2)^* & A^* \bar{N} + (B_K C_2)^* \Psi \\ (B_2 C_K)^* S + (\bar{N} A_K)^* & (B_2 C_K)^* \bar{N} + A_K^* \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} SA + \bar{N} B_K C_2 & SB_2 C_K + \bar{N} A_K \\ \bar{N}^* A + \Psi B_K C_2 & \bar{N}^* B_2 C_K + \Psi A_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 B_1^* & B_1 (B_K D_{21})^* \\ (B_K D_{21}) B_1^* & (B_K D_{21}) (B_K D_{21})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$\gamma^{-2} \begin{pmatrix} C_1 C_1^* & C_1^* (D_{12} C_K) \\ (D_{12} C_K)^* C_1 & (D_{12} C_K)^* (D_{12} C_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

for all $(u, v) \in D(A) \times D(A_K)$.

Let us pose $v = 0$ in the first equation :

$$\begin{aligned} & (A^* S + SA + (\bar{N} B_K C_2)^* + \bar{N} B_K C_2 + SB_1 B_1^* S + \\ & (\bar{N} B_K D_{21}) (\bar{N} B_K D_{21})^* + \gamma^{-2} C_1^* C_1) u = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

for all $u \in D(A)$,

Pose $u = 0$ in the second equation we obtain :

$$\begin{aligned} & (A^* \bar{N} + (B_K C_2)^* \Psi + SB_2 C_K + \bar{N} A_K + SB_1 B_1^* \bar{N} + \\ & \bar{N} (B_K D_{21}) (B_K D_{21})^* \Psi + \gamma^{-2} C_1^* (D_{12} C_K)) v = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

for all $v \in D(A_K)$,

and pose $u = 0$ in the fourth equation provides

$$\begin{aligned} & (A_K^* \Psi + \Psi A_K + (B_2 C_K)^* \bar{N} + \bar{N}^* B_2 C_K \bar{N}^* B_1 B_1^* \bar{N} + \\ & \Psi (B_K D_{21}) (B_K D_{21})^* \Psi + \gamma^{-2} (D_{12} C_K)^* (D_{12} C_K)) v = 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

for all $v \in D(A_K)$.

Defining $Q = S^{-1}$, $u = Q \tilde{u}$ with $\tilde{u} \in D(A^*)$ and $N = Q \bar{N}$, then equation (4.39) can be rewritten as follows

$$\begin{aligned} & (AQ + QA^* + Q(\gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* (D_{21} D_{21}^*)^{-1} C_2) Q + B_1 B_1^* + \\ & (QC_2^* (D_{21} D_{21}^*)^{-\frac{1}{2}} + NB_K (D_{21} D_{21}^*)^{\frac{1}{2}}) (QC_2^* (D_{21} D_{21}^*)^{-\frac{1}{2}} + NB_K (D_{21} D_{21}^*)^{\frac{1}{2}})^* \tilde{u} = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

for all $\tilde{u} \in D(A^*)$

Since \mathcal{P} is invertible, with bounded inverse, one may define $\mathcal{Q} = \gamma^{-2}\mathcal{P}^{-1}$. It is solution of

$$\begin{cases} (A\mathcal{Q} + \mathcal{Q}A^* + \mathcal{Q}C^*C\mathcal{Q} + \gamma^{-2}BB^*)V = 0, \\ \text{for all } V \in D(A^*). \end{cases}$$

The operator \mathcal{Q} may be decomposed in blocs relatively to the decomposition of $\mathcal{X} = X \times V_K$:
 $\mathcal{Q} = \gamma^{-2}\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} R & \overline{M} \\ \overline{M}^* & \theta \end{pmatrix}$. It follows that

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A & B_2C_K \\ B_KC_2 & A_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & \overline{M} \\ \overline{M}^* & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} R & \overline{M} \\ \overline{M}^* & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & (B_KC_2)^* \\ (B_2C_K)^* & A_K^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} R & \overline{M} \\ \overline{M}^* & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^* \\ (D_{12}C_K)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & D_{12}C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & \overline{M} \\ \overline{M}^* & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ & \gamma^{-2} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_KD_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^* & (B_KD_{21})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \\ & \text{for all } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A^*). \end{aligned}$$

This is equivalent to

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} AR + B_2C_K\overline{M}^* & A\overline{M} + B_2C_K\theta \\ B_KC_2R + A_K\overline{M}^* & B_KC_2\overline{M} + A_K\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} RA + \overline{M}(B_2C_K)^* & R(B_KC_2)^* + \overline{M}A_K^* \\ \overline{M}^*A^* + \theta(B_2C_K)^* & \overline{M}^*(B_2C_K)^* + \theta A_K^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} R & \overline{M} \\ \overline{M}^* & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1C_1^* & C_1^*(D_{12}C_K) \\ (D_{12}C_K)^*C_1 & (D_{12}C_K)^*(D_{12}C_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & \overline{M} \\ \overline{M}^* & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ & \gamma^{-2} \begin{pmatrix} B_1B_1^* & B_1(B_KD_{21})^* \\ (B_KD_{21})B_1 & (B_KD_{21})(B_KD_{21})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \\ & \text{for all } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A^*). \end{aligned}$$

In particular, for $v = 0$ in the first equation, we get

$$\begin{pmatrix} AR + RA^* + B_2C_K\overline{M}^* + \overline{M}(B_2C_K)^* + RC_1^*C_1R + \overline{M}(D_{12}C_K)^*C_1R \\ + RC_1^*(D_{12}C_K)\overline{M}^* + \overline{M}(D_{12}C_K)^*(D_{12}C_K)\overline{M}^* + \gamma^{-2}B_1B_1^* \end{pmatrix} u = 0, \quad (4.43)$$

for all $u \in D(A^*)$.

Defining $P = R^{-1}$, $u = Pv$ with $v \in D(A)$ and $M = P\overline{M}$, we obtain finally

$$\begin{aligned} & (A^*P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2(D_{12}^*D_{12})^{-1}B_2^*)P + C_1^*C_1 + \\ & (PB_2(D_{12}^*D_{12})^{-\frac{1}{2}} + MC_K^*(D_{12}^*D_{12})^{\frac{1}{2}}) (PB_2(D_{12}^*D_{12})^{-\frac{1}{2}} + MC_K^*(D_{12}^*D_{12})^{\frac{1}{2}})^*)v = 0, \\ & \text{for all } v \in D(A). \end{aligned} \quad (4.44)$$

The derivation of the coupling condition.
 From the relation $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \gamma^{-2}I$, we obtain

$$\overline{MN}^* = \gamma^{-2}I - RS.$$

It is equivalent to

$$(P\overline{M})(Q\overline{N})^* = \gamma^{-2}PQ - I.$$

Then

$$MN^* = \gamma^{-2}PQ - I.$$

From the lemma 5 we have R, S are invertible positive and self adjoint operators and $r_\sigma(R^{-1}S^{-1}) < \gamma^2$, hence

$$P > 0, Q > 0 \text{ and } r_\sigma(PQ) < \gamma^2.$$

This is (4.11-4.14). Remark that the existence of P, Q, M and N are a consequence of the existence of \mathcal{P} .

Proof of (4.15).

Let us prove (4.15). Equation (4.40) is equivalent to

$$((A^* + SB_1B_1^*)\overline{N} + SB_2C_K + \overline{N}A_K + (C_2^* + \overline{N}B_K(D_{21}D_{21}^*))B_K^*\Psi)v = 0 \quad (4.45)$$

for all $v \in D(A_K)$.

Since \overline{M} is injective with closed range, that is \overline{M}^* is surjective, then for all $v \in D(A_K) \subset V_K$ there exist $\tilde{v} \in X$ such that $\overline{M}^*\tilde{v} = v$. Together with $R\overline{N} + \overline{M}\Psi = 0$, the equation (4.45) is equivalent to

$$\begin{aligned} \bar{N}A_K\bar{M}^*\tilde{v} &= -(A + B_1B_1^*S)^*(\gamma^{-2}I - SR)\tilde{v} - SB_2C_K\bar{M}^*\tilde{v} \\ &+ (C_2^* + \bar{N}B_K(D_{21}D_{21}^*))(\bar{N}B_K)^*R\tilde{v}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pre- and post-multiply (4.46) by $S^{-1} = Q$ and $R^{-1} = P$, respectively, and (4.46) can be rewritten as follows

$$\begin{aligned} NA_KM^*\tilde{v} &= -(AS^{-1} + B_1B_1^*)^*(\gamma^{-2}R^{-1} - S)\tilde{v} - B_2C_KM^*\tilde{v} \\ &+ (S^{-1}C_2^* + NB_K(D_{21}D_{21}^*))(\bar{N}B_K)^*\tilde{v}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} NA_KM^*Q\tilde{v} &= -(AQ + B_1B_1^*)^*(\gamma^{-2}PQ - I)\tilde{v} - B_2C_KM^*Q\tilde{v} \\ &+ (QC_2^* + NB_K(D_{21}D_{21}^*))(\bar{N}B_K)^*\tilde{v}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Eliminate $B_1B_1^*$ in the equation (4.42)

$$B_1B_1^* = -AQ - QA^* - \gamma^{-2}QC_1^*C_1Q - QC_2^*B_K^*N^* - NB_KC_2Q - NB_K(D_{21}D_{21}^*)B_K^*N^*,$$

and replace it by its expression in the above equation

$$\begin{aligned} NA_KM^*Q\tilde{v} &= -(-QA^* - \gamma^{-2}QC_1^*C_1Q)^*(\gamma^{-2}PQ - I)\tilde{v} \\ &- (QC_2^*B_K^*N^* + NB_KC_2Q + NB_K(D_{21}D_{21}^*)B_K^*N^*)^*(\gamma^{-2}PQ - I)\tilde{v} \\ &- B_2C_KM^*Q + (QC_2^* + NB_K(D_{21}D_{21}^*))(\bar{N}B_K)^*\tilde{v}. \end{aligned}$$

We regroup and simplify the opposed terms, and post-multiply by Q^{-1} , to get

$$\begin{aligned} NA_KM^*\tilde{v} &= \{A + \gamma^{-2}QC_1^*C_1 + NB_KC_2\}(\gamma^{-2}QP - I)\tilde{v} \\ &- B_2C_KM^*\tilde{v} + \gamma^{-2}(QC_2^* + NB_K(D_{21}D_{21}^*))(\bar{N}B_K)^*P\tilde{v}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

for $\tilde{v} \in X$.

Now let us establish the second relation. From the equation (4.58) we have

$$\begin{aligned} NA_KM^*\tilde{v} &= -\{A + \gamma^{-2}QC_1^*C_1 + NB_KC_2\}\tilde{v} + \gamma^{-2}AQP\tilde{v} + (\gamma^{-2}QC_1^*C_1Q)(\gamma^{-2}P)\tilde{v} \\ &+ \gamma^{-2}NB_KC_2QP\tilde{v} - B_2C_KM^*\tilde{v} + \gamma^{-2}(QC_2^* + NB_K(D_{21}D_{21}^*))(\bar{N}B_K)^*P\tilde{v}. \end{aligned}$$

We eliminate $\gamma^{-2}QC_1^*C_1Q$ in the equation (4.42), and replace it by its expression in the above equation to get

$$\begin{aligned} NA_KM^*\tilde{v} &= -(A + \gamma^{-2}Q(A^*P))\tilde{v} - (\gamma^{-2}B_1B_1^*P + B_2C_KM^*)\tilde{v} \\ &- (\gamma^{-2}QC_1^*C_1 + NB_KC_2)\tilde{v}. \end{aligned}$$

Finally eliminate A^*P in (4.41) and replace it by its expression in the latter to get

$$\begin{aligned} NA_KM^*\tilde{v} &= (\gamma^{-2}QP - I)\{A + \gamma^{-2}B_1B_1^*P + B_2C_KM^*\}\tilde{v} \\ &- NB_KC_2\tilde{v} + \gamma^{-2}QMC_K^*(B_2^*P + C_KM^*)\tilde{v}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Let us denote $\tilde{M} \in \mathcal{L}(V_K, \text{Im}(M))$ and $\tilde{N} \in \mathcal{L}(V_K, \text{Im}(N))$ the invertible operators associated respectively to the operators M and N . Therefore the equations (4.58) and (4.59) are equivalent to

$$\begin{aligned} \tilde{N}A_K\tilde{M}^*\tilde{v} &= (A + \gamma^{-2}QC_1^*C_1 + NB_KC_2)\tilde{N}\tilde{M}^*\tilde{v} \\ &- B_2C_K\tilde{M}^*\tilde{v} + \gamma^{-2}(QC_2^* + NB_K(D_{21}D_{21}^*))(\bar{N}B_K)^*P\tilde{v}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{N}A_K\tilde{M}^*\tilde{v} &= \tilde{N}M^*(A + \gamma^{-2}B_1B_1^*P + B_2C_KM^*)\tilde{v} \\ &- \tilde{N}B_KC_2\tilde{v} + \gamma^{-2}QMC_K^*(B_2^*P + C_KM^*)\tilde{v}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

for $\tilde{v} \in X$.

From (4.51) and (4.52), we get (4.15) by using \tilde{N} and \tilde{M} , which are the continuous invertible operators associated to N and M . Using one of these expressions, the existence and uniqueness of A_K is straightforward. ■

4.3.2 Proof the theorem 2 (ii)

Now, consider a controller $K \in \mathcal{Q}_\infty$ associated to A_K, B_K, C_K, P, Q, M and N . Here the proof consists in proving that the equation (4.37) has a solution \mathcal{P} which is a positive self adjoint coercive operator. Defining $R = P^{-1}$, $S = Q^{-1}$, $\bar{M} = P^{-1}M$, $\bar{N} = Q^{-1}N$, then \bar{M} and \bar{N} are

injective with closed ranges respectively. Let us pose $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} S & \bar{N} \\ \bar{N}^* & \Psi \end{pmatrix}$ and $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} R & \bar{M} \\ \bar{M}^* & \theta \end{pmatrix}$ where θ and Ψ are given by the lemma 5 (ii) such that \mathcal{P} and \mathcal{Q} are two bounded positive self adjoint operators and $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \gamma^{-2}I$.

To complete the proof, we must verify that \mathcal{P} and A_K hence computed satisfy equation (4.37). In the proof of (4.11-4.14), it was showed that (4.37) is equivalent to the three equations (4.39)-(4.41). Recalling that (4.39) is equivalent to (4.11) and A_K satisfies (4.40). It remains to verify only (4.41). We pre- and post-multiply (4.41) by \bar{M} and \bar{M}^* , respectively, and use $\Psi\bar{M}^* = -\bar{N}R$ to rewrite (4.41) as follows

$$\begin{aligned} & (-\bar{M}A_K^*\bar{N}^*R - R\bar{N}A_K\bar{M}^* + \bar{M}^*(B_2C_K)^*NM^* + \bar{M}\bar{N}^*B_2C_K\bar{M}^* + \bar{M}\bar{N}^*B_1B_1^*\bar{N}M^* \\ & + R\bar{N}B_KB_K^*\bar{N}^*R + \gamma^{-2}\bar{M}C_K^*C_K\bar{M}^*)\tilde{v} = 0, \text{ for } \tilde{v} \in X. \end{aligned}$$

From (4.46) and the identity $\bar{M}\bar{N}^* = \gamma^{-2}I - RS$, the above equation is equivalent to

$$\begin{aligned} & ((\gamma^{-2}I - RS)(A + B_1B_1^*S)R + \bar{M}C_K^*B_2^*SR - R\bar{N}B_K(C_2 + B_K^*\bar{N}^*)R + \\ & \gamma^{-2}\bar{M}C_K^*C_K\bar{M}^* + R(A + B_1B_1^*S)^*(\gamma^{-2}I - SR) + RSB_2C_K\bar{M}^* - \\ & R(C_2^* + \bar{N}B_K)(\bar{N}B_K)^*R + R\bar{N}B_KB_K^*\bar{N}^*R + \bar{M}(B_2C_K)^*(\gamma^{-2}I - SR) + \\ & (\gamma^{-2}I - RS)B_2C_K\bar{M}^* + (\gamma^{-2}I - RS)B_1B_1^*(\gamma^{-2}I - SR))\tilde{v} = 0, \\ & \text{for } \tilde{v} \in X. \end{aligned}$$

Regroup and simplify the opposed terms to get

$$\begin{aligned} & (\gamma^{-2}(AR + RA^* + \gamma^{-2}B_1B_1^* + \bar{M}C_K^*B_2^* + B_2C_K\bar{M}^* + \bar{M}C_K^*C_K\bar{M}^*) - \\ & R(A^*S + SA + SB_1B_1^*S + C_2^*B_K^*\bar{N}^* + \bar{N}B_KC_2 + \bar{N}B_KB_K^*\bar{N}^*)R)\tilde{v} = 0, \\ & \text{for } \tilde{v} \in X. \end{aligned}$$

From the relations (4.39) and (4.43), we obtain

$$\gamma^{-2}(-RC_1^*C_1R)\tilde{v} - R(-\gamma^{-2}C_1^*C_1)R\tilde{v} = 0, \text{ for } \tilde{v} \in X.$$

Hence equation (4.41) is checked. ■

4.3.3 Proof of theorem 3

Given B_K, C_K , to prove that K is a controller for (4.17), it is enough to find P, Q, M and N satisfying $\mathcal{Q}_\infty(\gamma)$. For this, let us consider the positive self adjoint operators $P \in \mathcal{L}(X)$ and $Q \in \mathcal{L}(X)$ defined by

$$P = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}}A_I & (-I + A_I) \\ (-\Delta)(-I + A_I) & \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

$$Q = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}} & -I + A_I \\ (-\Delta)(-I + A_I) & \sqrt{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(-I + A_I)^{\frac{1}{2}}A_I \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

where $A_I = \left(I + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}(-\Delta)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Defining $M = I$ and $N = \gamma^{-2}QP - I$, one easily checks that P, Q, M, N, B_K and C_K satisfy the following equations

$$\begin{aligned} & PB_2 + MC_K^* = 0, \\ & QC_2^* + NB_K = 0, \\ & MN^* = \gamma^{-2}PQ - I. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Hence, equations (4.11) and (4.12) can be rewritten as follows

$$A^*P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^*)P + C_1^*C_1 = 0, \quad (4.56)$$

and

$$AQ + QA^* + Q(\gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2)Q + B_1B_1^* = 0. \quad (4.57)$$

Using the following lemma ends the proof.

Lemma 24 Under the assumptions (H5)-(H6), the above operators P and Q are positive solutions of (4.56) and (4.57) respectively, and for γ greater than 2, then $r_\sigma(PQ)$ is less than γ^2 .

Proof : First, let us compute the adjoint of an operator $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$.

$$\left(P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right)_{H_0^1 \times L^2} = (P_{11}x, z)_{H_0^1} + (P_{12}y, z)_{H_0^1} + (P_{21}x, t)_{L^2} + (P_{22}y, t)_{L^2},$$

$$\begin{aligned} \left(P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right)_{H_0^1 \times L^2} &= (x, P_{11}^*z)_{H_0^1} + (y, P_{12}^*(-\Delta)z)_{L^2} + (x, (-\Delta)^{-1}P_{21}^*t)_{H_0^1} \\ &+ (y, P_{22}^*t)_{L^2}. \end{aligned}$$

Therefore

$$P^* = \begin{pmatrix} P_{11}^* & (-\Delta)^{-1} P_{21}^* \\ P_{12}^* (-\Delta) & P_{22}^* \end{pmatrix}.$$

This leads to the following necessary and sufficient condition under which P is self adjoint :

$$P_{11}^* = P_{11}, P_{12} = (-\Delta)^{-1} P_{21}^* \text{ and } P_{22} = P_{22}^*.$$

By construction the operator P defined by (4.53) is self adjoint. Now it remains to show that P is solution of the equation (4.55) and that P is positive. Since

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ (-\Delta) P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

the equation (4.55) can be rewritten as follows

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ (-\Delta) P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ (-\Delta) P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ (-\Delta) P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\gamma^{-2} - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ (-\Delta) P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

The following system arise

$$\begin{cases} \Delta P_{12} + \Delta P_{12} + (\gamma^{-2} - 1) (-\Delta) P_{12}^2 + I = 0 \\ -P_{22} + P_{11} + (\gamma^{-2} - 1) P_{12} P_{22} = 0 \\ (-\Delta) P_{11} + (\Delta) P_{22} + (\gamma^{-2} - 1) (-\Delta) P_{12} P_{22} = 0 \\ (-\Delta) P_{12} + (-\Delta) P_{12} + (\gamma^{-2} - 1) P_{22}^2 = 0. \end{cases} \quad (4.59)$$

It is easily checked that P defined by (4.53) is solution of (4.59). Now we show that P is positive.

To proof this, we show that all eigenvalues of P are strictly positive. It is well known that $(-\Delta)$ is self-adjoint, strictly positive and that $(-\Delta)^{-1}$ is compact. As a consequence the eigenvalues of $(-\Delta)$ form an increasing sequence $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$, and its eigenvectors $\{\Phi_k\}_k$ form a basis of $L^2(\Omega)$. Let $(u, v) \in H_0^1 \times L^2$ such that $u = \sum_k u_k \Phi_k$, $v = \sum_k v_k \Phi_k$ and

$$P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11}(-\Delta) & p_{12}(-\Delta) \\ p_{21}(-\Delta) & p_{22}(-\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} p_{11}(-\Delta)u + p_{12}(-\Delta)v = \lambda u \\ p_{21}(-\Delta)u + p_{22}(-\Delta)v = \lambda v. \end{cases}$$

Then for $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} (p_{11}(\mu_k) - \lambda)u_k + p_{12}(\mu_k)v_k = 0 \\ p_{21}(\mu_k)u_k + (p_{22}(\mu_k) - \lambda)v_k = 0 \end{cases},$$

It follows from the above system

$$\lambda^2 - S\lambda + p = 0,$$

where

$$S = (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 \mu_k} \sqrt{\mu_k}}}}$$

$$\text{and } p = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}.$$

Since for $k = 1, 2, \dots$ S and p are strictly positive, then $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.

Similarly $Q > 0$ solves (4.56). Now, we are checked the spectral radius condition $r_\sigma(PQ) < \gamma^2$.

$$PQ = \frac{\gamma^4}{(\gamma^2 - 1)^2} \begin{pmatrix} 2(-\Delta)(-I + A_I)A_I & (-I + A_I)^2 \\ (-\Delta)^2(-I + A_I)^2 & 2(-\Delta)(-I + A_I)A_I \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

The eigenvalues β of $PQ = \begin{pmatrix} f_{11}(-\Delta) & f_{12}(-\Delta) \\ f_{21}(-\Delta) & f_{11}(-\Delta) \end{pmatrix}$ are given by

$$\beta_1 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \text{ and}$$

$$\beta_2 = \frac{3\gamma^2}{\gamma^2 - 1} - \frac{4\gamma^4}{(\gamma^2 - 1)^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 \mu_k}} \right) \mu_k$$

for $k = 1, 2, \dots$

It is to check that

$$\beta_2 - \beta_1 = \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 - 1 + 2\gamma^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 \mu_k}} \right) \mu_k},$$

whence

$$r_\sigma(PQ) = \beta_2$$

Now, we check that $\beta_2 < \gamma^2$. To this purpose, for $\gamma \geq 2$ and μ_k for $k \geq 1$, we get

$$\gamma^2 - \beta_2 = \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 - 1)^2} \left(4 + \gamma^4 + \gamma^2 \left(4 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 \mu_k}} \right) \mu_k - 5 \right) \right) > 0.$$

Remark : In one dimensional case, we use Mathematica 3.0, to determine the approximate value γ_{opt} .

Ω	μ_1	γ_{opt}
$[0, \pi]$	1	1.7354
$[0, 1]$	π^2	1.5046

4.4 Appendix

4.4.1 Proof of lemma 6

Sufficient part.

Suppose that

$$(Ax, x) \leq \|x\|^2 \quad \text{for all } x \in X,$$

it follows that

$$\|A\| \leq 1.$$

Since $r_\sigma(A) \leq \|A\|$ then $r_\sigma(A) \leq 1$.

Necessity part. Suppose that $r_\sigma(A) \leq 1$. From proposition VI.9 in [3], it follows that

$$\|A\| = r_\sigma(A) \leq 1,$$

then

$$(Ax, x) \leq \|x\|^2 \quad \text{for all } x \in X,$$

whence

$$A - I \leq 0.$$

Bibliographie

- [1] M. Afilal and F. Ammar Khodja, *Stability of coupled second order equations. Prépublications de l'équipe de Mathématiques de Besançon n° 97/25 (1997).*
- [2] F. Ammar Khodja and A. Benabdallah, *Sufficient conditions for the uniform stabilization of second order equations by dynamical controllers. To appear in Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems.*
- [3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. Masson, Paris, (1983).*
- [4] R. F. Curtain, *The strict bounded real lemma in infinite dimensions. Systems and Control Letters, vol 20, pp 113-116 (1993).*
- [5] R. F. Curtain and H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Systems Theory. Springer-Verlag, New York, (1995).*
- [6] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, *State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. IEEE Trans. Aut. control, vol AC 34, pp 831-847 (1989).*
- [7] F. Flandoli, I. Lasiecka, and R. Triggiani, *Algebraic Riccati equations with non-smoothing observation arising in Hyperbolic and Euler-Bernoulli equations, Ann. Mathem. Pura and Appl., vol. Clix (1988), 307-382.*
- [8] P. Gahinet, *A new parametrization of H_∞ suboptimal controllers, Int. J. Control, vol. 59, n° 4, pp 1031-1051 (1994).*
- [9] B. V. Keulen, *H_∞ control for infinite dimensional systems : a state-space approach, Thesis, University of Groningen, April 1993.*
- [10] B. V. Keulen, M. Peters, R. Curtain, *H_∞ control with State-Feedback : The infinite-Dimensional case, Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control, vol. 3, 1993, pp. 1-39.*
- [11] D.L. Russell, *General framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems. Journal of Math. Anal. and Applic., vol 173, pp 339-358 (1993).*

Chapitre 5

Un modèle simplifié de l'équation des ondes à coefficients et données oscillants. Application à un problème de stabilisation

Résumé - On propose un modèle à deux échelles de l'équation des ondes à coefficients et données oscillants. Il est obtenu à l'aide d'une méthode asymptotique combinant la convergence à deux échelles et la décomposition sur les ondes de Bloch. Une validation numérique du modèle est également présentée dans le cas de coefficients constants et de données oscillantes pour un problème de stabilisation.

Two-scale Model of the wave equation with oscillating coefficients

Abstract - A two-scale model for the wave equation with oscillating coefficients and data is formulated. It has been derived using an asymptotic method based on a two-scale convergence and on the Bloch waves decomposition. A numerical validation in the case of constant coefficients and oscillating data is also presented for a problem of stabilization.

5.1 Introduction.

Notre étude s'inscrit dans le cadre d'un travail que nous menons sur le contrôle distribué de phénomènes de propagation d'ondes qui présentent un caractère multi-échelles. La construction d'une loi de contrôle pour un tel problème requiert un modèle simplifié, formulé en variables d'espace et de temps, et qui du point de vue spectral, représente bien le phénomène étudié. Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de modélisation répondant à ces exigences. Elle est appliquée à l'équation des ondes avec données et coefficients oscillants.

Par souci de clarté, la méthode est présentée en dimension 1. Il semble qu'il n'y ait pas d'obstacle à sa généralisation en dimension $n \geq 1$.

Des modèles simplifiés de l'équation des ondes à données et coefficients oscillants ont été déjà obtenus à l'aide de la méthode de l'homogénéisation dans [2] et [3]. Ils ont été formulés en variables d'espace et de temps. A cet égard, ils pourraient être utilisés pour la synthèse d'une loi de contrôle. Leur obtention s'effectue par passage à la limite faible dans l'équation des ondes, lorsque la taille de la période d'oscillation des coefficients et des données tend vers zéro. Néanmoins, les auteurs ont montré que l'énergie associée à la solution de l'équation des ondes, ne converge pas vers l'énergie associée à la solution du modèle limite. La raison de ce défaut de

convergence, est que la méthode d'homogénéisation qui a été utilisée contraint la solution du modèle limite à être périodique par rapport à la variable des petites échelles en espace. Cette contrainte est trop forte pour que les ondes qui se propagent à petite échelle (ondes de Bloch) soient représentées. La définition des ondes de Bloch pourra être trouvée dans l'ouvrage de J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia [7].

A la suite de cette constatation, certains auteurs se sont consacrés à la caractérisation de la limite de l'énergie. G. Francfort et F. Murat [3] l'ont réalisée avec des outils d'optique géométrique dans le cas de l'équation des ondes à coefficients constants posée dans \mathbb{R}^n , avec données initiales oscillantes. Plus récemment, P. Gérard et al. [4] ont développé une approche générale permettant d'étudier le comportement de la limite de l'énergie utilisant la transformation de Wigner. Cette méthode a été appliquée à l'équation des ondes posée dans \mathbb{R}^n , avec des données et des coefficients oscillants. A notre connaissance, ces méthodes de caractérisation de la limite de l'énergie, ne permettent pas de déduire un modèle limite de l'équation des ondes.

Comme il a été souligné plus haut, une modélisation asymptotique correcte de l'équation des ondes doit tenir compte de la totalité du spectre de Bloch. G. Allaire et C. Conca [1] ont combiné la méthode de l'homogénéisation et la décomposition de la solution par ondes de Bloch. Dans leur travail, ils ont étudié la convergence à deux échelles des solutions du problème spectral sur un domaine borné. Les fonctions propres du modèle limite qu'ils ont obtenu, sont périodiques par rapport à la variable d'espace des petites échelles. Avec cette approche, la longueur de la période est un paramètre du modèle. Les auteurs ont montré que l'ensemble des valeurs propres obtenues par cette famille de problèmes spectraux recouvre les valeurs propres du spectre de Bloch.

Dans ce chapitre, nous utilisons la convergence à deux échelles définie dans [6] et la décomposition par ondes de Bloch pour définir ce que nous appelons la "convergence à deux échelles pour les ondes". Cette dernière opère sur les fonctions dépendantes des variables d'espace et de temps. Le passage à la limite dans l'équation des ondes, à l'aide de cette convergence, conduit à un modèle à deux échelles de l'équation des ondes. Le spectre associé à ce modèle comprend à la fois le spectre de Bloch et le spectre de l'équation des ondes homogénéisée. Ces propriétés font de lui un bon candidat pour servir de base à la synthèse d'une loi de contrôle.

Notons cependant que la méthode présentée ici est restreinte au cas où le domaine spatial contient 2^N cellules.

5.2 Présentation des résultats principaux

5.2.1 Position du problème

Soient $\omega =]0, 1[$, $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = 2^{-N}$. Considérons $u^N(t, x)$ la solution de l'équation des ondes à coefficient oscillant :

$$\partial_{tt}^2 u^N(t, x) - \partial_x(a^N(x)\partial_x u^N(t, x)) = f^N(t, x) \text{ pour } (t, x) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega,$$

munie des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$u^N(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \in \mathbb{R}^{*+} \times \{0, 1\},$$

et des conditions initiales :

$$u^N(0, x) = \bar{h}_0^N(x) \text{ et } \partial_t u^N(0, x) = h_1^N(x) \text{ pour } x \in \omega.$$

Le coefficient oscillant a^N est défini par $a^N(x) = a(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2})$ avec $a(y) \geq a_0 > 0$ un coefficient défini sur \mathbb{R} , appartenant à l'espace $W^{1,\infty}(Y)$, où $Y =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, et tel que $a(y)$ est Y -périodique, c'est à dire que $a(-\frac{1}{2}) = a(\frac{1}{2})$.

Posons $p^N = (a^N)^{\frac{1}{2}} \partial_x u^N$ et $q^N = \partial_t u^N$. Elles satisfont le système d'équations du premier ordre :

$$\partial_t \begin{pmatrix} p^N \\ q^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & (a^N)^{\frac{1}{2}} \partial_x \\ \partial_x((a^N)^{\frac{1}{2}}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^N \\ q^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f^N \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

munie des conditions aux limites :

$$q^N(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \in \mathbb{R}^{*+} \times \{0, 1\}, \quad (5.2)$$

et des conditions initiales :

$$\begin{pmatrix} p^N(0, x) \\ q^N(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0^N(x) \\ h_1^N(x) \end{pmatrix} \text{ pour } x \in \omega,$$

avec $h_0^N(x) = (a^N)^{\frac{1}{2}} \partial_x \bar{h}_0^N(x)$. La construction du modèle à deux échelles est réalisée à partir de ce système du premier ordre.

On suppose que les données vérifient les conditions de régularité et de compatibilité énoncées dans I. Lasiecka et al. [5] et que les suites $\|f^N\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)}$, $\|\bar{h}_0^N\|_{H^1(\omega)}$, $\|h_1^N\|_{L^2(\omega)}$ sont bornées. Ceci assure le fait que les suites $\|p^N\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)}$ et $\|q^N\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)}$ sont bornées. De plus, la solution (p^N, q^N) est supposée s'annuler au delà d'un certain temps. Le modèle présenté au paragraphe suivant est obtenu par passage à la limite dans l'équation (5.1) à l'aide de la convergence à deux échelles pour les ondes décrite au paragraphes 4.3.2 et 4.3.3.

5.2.2 Modèle à deux échelles de l'équation des ondes.

Le modèle simplifié à deux échelles de l'équation des ondes est constitué de deux familles d'équations paramétrées par l'entier $m \in \mathbb{N}$: le système du premier ordre associé à l'équation des ondes posée à l'échelle "microscopique" et celui associé à l'équation des ondes posée à l'échelle "macroscopique". Leurs solutions (p, q) dépendent des quatre variables z, y, s et τ . Les variables spatiale et temporelle "macroscopiques" z et s appartiennent aux domaines ω et \mathbb{R}^{*+} . Les variables spatiale et temporelle "microscopiques" y et τ appartiennent aux domaines $Y(m) =]-2^{m-1}, 2^{m-1}[$ de longueur 2^m et $Y_t = Y(0)$. Dans le cas particulier où $m = 0$, on notera $Y(0)$ par Y .

Modèle général

A l'échelle microscopique, les équations du modèle simplifié sont :

$$M \partial_\tau \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a^{\frac{1}{2}} \partial_y \\ \partial_y(a^{\frac{1}{2}}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$(p, q) \text{ est } Y_t \times Y(m)\text{-périodique.} \quad (5.4)$$

L'opérateur M est un opérateur de mise à l'échelle sur la variable de temps. Il est défini en détail en (5.30).

A l'échelle macroscopique, les équations sont :

$$\int_{Y_t \times Y(m)} (\partial_s p - a^{\frac{1}{2}} \partial_z q) v + (\partial_s q - \partial_z (a^{\frac{1}{2}} p) - f) w d\tau dy = 0, \quad (5.5)$$

munies des équations relatives aux conditions aux limites :

$$\int_{Y_t} a^{\frac{1}{2}} q v d\tau = 0 \text{ en } (s, (z, y)) \in \mathbb{R}^{*+} \times \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\}, \quad (5.6)$$

et aux conditions initiales :

$$\int_{Y(m)} (p - h_0) v + (q - h_1) w dy = 0 \text{ en } (s, z, \tau) \in \{0\} \times \omega \times \{-\frac{1}{2}\}, \quad (5.7)$$

pour tout couple $(v, w) \in (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$ solution de (5.3-5.4). Les données f, h_0, h_1 et les solutions (p, q) apparaissant dans les équations ci-dessus sont les limites des données f^N, h_0^N, h_1^N et des solutions (p^N, q^N) au sens de convergences à deux échelles précisées à la section 4.

Pour m fixé, les solutions (p, q) des équations (5.3-5.4) posées à l'échelle microscopique, peuvent être décomposée sous forme de combinaisons linéaires des fonctions de base $\phi_0(y), \cos(2\pi\tau)\phi_p^j(k, y), \sin(2\pi\tau)\phi_p^j(k, y), \psi_0(y), \cos(2\pi\tau)\psi_p^j(k, y)$ et $\sin(2\pi\tau)\psi_p^j(k, y)$ définies pour $(\tau, y) \in Y_t \times Y(m)$ aux sections 3.1 et 3.2 :

$$\begin{aligned} p(s, z, \tau, y) &= A_0(s, z)\psi_0(y) + \\ \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (C_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau)) \psi_p^j(k, y) dk, & \quad (5.8) \\ q(s, z, \tau, y) &= B_0(s, z)\phi_0(y) + \\ \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-C_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau)) \phi_p^j(k, y) dk, & \end{aligned}$$

où $B =]-\pi, \pi[$. Comme cela est précisé à la section 4.3.1, toutes les fonctions de k sont constantes par morceaux. Ainsi, les indices k varient dans un ensemble qui peut être considéré comme fini. Ici, κ_j^m est un coefficient dont l'expression est précisée à la section 3.1. Remarquons que ce modèle décrit d'autant mieux la solution (p^N, q^N) que m est grand.

Les coefficients $A_0(s, z), C_p^j(k, s, z), B_0(s, z)$ et $D_p^j(k, s, z)$ de ces combinaisons linéaires sont définis pour $(s, z) \in \mathbb{R}^+ \times \omega$. En introduisant la décomposition (5.8) dans la formulation variationnelle (5.5), et en interprétant cette dernière, il s'en suit que A_0 et B_0 sont solutions d'une équation des ondes formulée sous forme de système du premier ordre :

$$\begin{aligned} \partial_s A_0(s, z) - b^{1/2} \partial_z B_0(s, z) &= 0, \\ \partial_s B_0(s, z) - b^{1/2} \partial_z A_0(s, z) &= f^0(s, z), \end{aligned} \quad (5.9)$$

pour tout $(s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega$. En outre, les coefficients (A_0, B_0) vérifient les conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$B_0(s, 0) = B_0(s, 1) = 0 \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}^{*+}, \quad (5.10)$$

et les conditions initiales

$$A_0(0, z) = H_0(z), B_0(0, z) = H_1(z) \quad \forall z \in \omega. \quad (5.11)$$

D'autre part, les coefficients $C_p^j(k, \cdot)$ et $D_p^j(k, \cdot)$ sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \int_{Y(m)} J_{pp'}^{jj'}(k, k') \partial_z D_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' &= -f_p^{j,s}(k, s, z), \\ \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \int_{Y(m)} J_{pp'}^{jj'}(k, k') \partial_z C_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' &= -f_p^{j,c}(k, s, z), \end{aligned} \quad (5.12)$$

pour tout $(s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega$, munies des conditions initiales :

$$C_p^j(k, 0, z) = H_{0p}^j(k, z) \text{ et } D_p^j(k, 0, z) = H_{1p}^j(k, z) \quad \forall z \in \omega, \quad (5.13)$$

et des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} R_{pp'}^{jj'}(k, k', y) D_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' &= 0, \\ \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} R_{pp'}^{jj'}(k, k', y) C_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' &= 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

en $(s, z, y) \in \mathbb{R}^+ \times \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\}$. Les équations ci-dessus sont toutes indicées par $(j, p, k) \in \{0, \dots, m\} \times \mathbb{N}^* \times B$.

Remarque : Sur l'exemple traité dans le cas particulier, on se rend compte que les conditions aux limites (5.14) ne sont pas suffisantes pour que les équations (5.12-5.14) admettent une solution unique.

Si de plus les $\alpha_p^j(k)$ définis en section 3.2 sont tous distincts alors les $C_p^j(k, \cdot)$ et les $D_p^j(k, \cdot)$ vérifient les conditions aux limites supplémentaires :

$$C_p^j(k, t, z) \phi_p^j(k, y) = D_p^j(k, t, z) \phi_p^j(k, y) = 0 \text{ en } (z, y) \in \{(0, -\frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2})\}. \quad (5.15)$$

Les expressions des coefficients et second membres des équations ci-dessus sont détaillés à la section 4.

Cas particulier $a(y) = 1$ et $m = 0$

Dans certains cas, les équations (5.12) peuvent être découplées. Il en est ainsi lorsque le coefficient $a(y)$ est constant. Dans la suite, on pose $a(y) = 1$. Pour simplifier la présentation du modèle, nous la limitons au cas où $m = 0$. Dans ce cas, les indices j et k ne prennent que la valeur $j = k = 0$. Pour cette raison, nous les omettons. Le modèle ainsi obtenu représente l'évolution d'un système régit par l'équation des ondes mono-dimensionnelle à coefficient constant dont les données initiales sont oscillantes avec une période égale à ε . Il représente l'évolution du système à l'échelle macroscopique par celle des coefficients A_0 et B_0 ainsi que l'évolution des ondes à l'échelle microscopique par celle des coefficients C_p et D_p pour $p \in \mathbb{N}^*$. Comme seule la

valeur $m = 0$ est considérée, il en résulte que les ondes représentées à l'échelle microscopique ont une période spatiale égale à ε .

La solution (p, q) du modèle à deux échelles s'écrit plus simplement :

$$\begin{aligned} p(s, z, \tau, y) &= A_0(s, z)\psi_0(y) + \\ &\sqrt{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (C_p(s, z) \cos(2\pi\tau) + D_p(s, z) \sin(2\pi\tau)) \psi_p(y), \\ q(s, z, \tau, y) &= B_0(s, z)\phi_0(y) + \\ &\sqrt{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-C_p(s, z) \sin(2\pi\tau) + D_p(s, z) \cos(2\pi\tau)) \phi_p(y). \end{aligned}$$

A l'aide de la solution (p, q) définie sur le domaine à deux échelles $\{(s, z, \tau, y) \in \mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y\}$ on déduit une approximation (\bar{p}^N, \bar{q}^N) de la solution (p^N, q^N) qui est également formulée sur le domaine spatio-temporel naturel $\{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \omega\}$:

$$\begin{aligned} \bar{p}^N(t, x) &= A_0(t, x)\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) + \\ &\sqrt{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(C_p(t, x) \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{\alpha_p \varepsilon} - \frac{1}{2}\right)\right) + D_p(t, x) \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\alpha_p \varepsilon} - \frac{1}{2}\right)\right) \right) \psi_p\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right), \\ \bar{q}^N(t, x) &= B_0(t, x)\phi_0\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) + \\ &\sqrt{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(-C_p(t, x) \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\alpha_p \varepsilon} - \frac{1}{2}\right)\right) + D_p(t, x) \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{\alpha_p \varepsilon} - \frac{1}{2}\right)\right) \right) \phi_p\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

où $\alpha_{2l-1} = \alpha_{2l} = l$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$. L'expression des fonctions de base $\phi_p(y)$ et $\psi_p(y)$ est détaillée à la section 4.

Les équations vérifiées par A_0 et B_0 sont :

$$\begin{aligned} \partial_s A_0(s, z) - \partial_z B_0(s, z) &= 0 \\ \partial_s B_0(s, z) - \partial_z A_0(s, z) &= f^0(s, z) \quad \forall (s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega, \\ A_0(0, z) &= H_0(z), \quad B_0(0, z) = H_1(z) \quad \forall z \in \omega, \\ B_0(s, 0) &= B_0(s, 1) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^{*+}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pour $p \in 2\mathbb{Z}^*$ les C_{p-1} et D_p sont solutions du système du premier ordre :

$$\begin{aligned} \partial_s C_{p-1}(s, z) + \partial_z D_p(s, z) &= -f_{p-1}^s(s, z) \quad \forall (s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega, \\ \partial_s D_p(s, z) + \partial_z C_{p-1}(s, z) &= f_p^c(s, z) \\ C_{p-1}(0, z) &= H_{0p-1}^0(0, z) \quad \text{et} \quad D_p(0, z) = H_{1p}^0(0, z) \quad \forall z \in \omega, \\ C_{p-1}(s, 0) &= C_{p-1}(s, 1) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^{*+}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

et d'autre part les C_p et D_{p-1} sont liés par le système :

$$\begin{aligned} \partial_s D_{p-1}(s, z) - \partial_z C_p(s, z) &= f_{p-1}^c(s, z) \\ \partial_s C_p(s, z) - \partial_z D_{p-1}(s, z) &= -f_p^s(s, z) \quad \forall (s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega, \\ C_p(0, z) &= H_{0p}^0(0, z) \quad \text{et} \quad D_{p-1}(0, z) = H_{1p-1}^0(0, z) \quad \forall z \in \omega, \\ D_{p-1}(s, 0) &= D_{p-1}(s, 1) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^{*+}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Les second membres f_p^s, f_{p-1}^s, f_p^c et f_{p-1}^c utilisés dans les équation ci-dessus sont détaillés à la section 4.

Remarque : Les conditions aux limites (5.14) conduisent à seulement deux équations indépendantes sur chaque bord : $\sum_{l \in \mathbb{N}^*} (-1)^l C_{2l-1}(s, z) = 0$ et $\sum_{l \in \mathbb{N}^*} (-1)^l D_{2l-1}(s, z) = 0$ en $(s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \{0, 1\}$. Pour obtenir les autres conditions aux limites sur C_p et D_p on a utilisé (5.15).

5.2.3 Application à un problème de stabilisation

Le modèle détaillé dans le cas particulier $a(y) = 1$ et $m = 0$ peut servir de modèle réduit pour la synthèse d'une loi de contrôle d'un phénomène de propagation d'ondes à deux échelles. Dans ce paragraphe, nous choisissons les fonctions f^0, f_p^s et f_p^c de sorte que la solution du système qui en résulte soit exponentiellement stable. Le stabilisateur ainsi construit peut être utilisé dans une boucle de rétroaction à condition de disposer d'une estimation des coefficients A_0, B_0, C_p et D_p .

Comme $\partial_s A_0(s, z) = \partial_z B_0(s, z)$, il existe $u_0(s, z)$ tel que $A_0(s, z) = \partial_z u_0(s, z)$ et $B_0(s, z) = \partial_s u_0(s, z)$. Ainsi u_0 est solution de l'équation des ondes :

$$\begin{aligned} \partial_{ss}^2 u_0(s, z) - \partial_{zz}^2 u_0(s, z) &= f^0(s, z) \quad \forall (s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega \\ u_0(0, z) &= \int_0^z H_0(\zeta) d\zeta, \quad \partial_s u_0(0, z) = H_1(z) \quad \forall z \in \omega \\ u_0(s, 0) &= u_0(s, 1) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^{*+}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Choisissons $f_p^c(s, z) = f_p^s(s, z) = 0$ ainsi, $\partial_s D_p(s, z) = -\partial_z C_{p-1}(s, z)$ et $\partial_s C_p(s, z) = \partial_z D_{p-1}(s, z)$ ce qui implique qu'il existe $u_p^s(s, z)$ et $u_p^c(s, z)$ tels que $D_p = -\partial_z u_p^s, C_{p-1} = \partial_s u_p^s, C_p = \partial_z u_p^c$ et $D_{p-1} = \partial_s u_p^c$. Remplaçant ces expressions dans les deux autres équations, il s'en suit que u_p^s et u_p^c sont les solutions des deux équations des ondes suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{ss}^2 u_p^s(s, z) - \partial_{zz}^2 u_p^s(s, z) &= -f_{p-1}^s(s, z) \quad \forall (s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega, \\ u_p^s(0, z) &= -\int_0^z H_{1p}^0(0, \zeta) d\zeta \quad \text{et} \quad \partial_s u_p^s(0, z) = H_{0p-1}^0(0, z) \quad \forall z \in \omega, \\ u_p^s(s, 0) &= u_p^s(s, 1) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^{*+}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{ss}^2 u_p^c(s, z) - \partial_{zz}^2 u_p^c(s, z) &= f_{p-1}^c(s, z) \quad \forall (s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega, \\ u_p^c(0, z) &= \int_0^z H_{0p}^0(0, \zeta) d\zeta \quad \text{et} \quad \partial_s u_p^c(0, z) = H_{1p-1}^0(0, z) \quad \forall z \in \omega, \\ u_p^c(s, 0) &= u_p^c(s, 1) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^{*+}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Posons $f^0(s, z) = -\partial_s u_0(s, z), f_{p-1}^s(s, z) = \partial_s u_p^s(s, z)$ et $f_{p-1}^c(s, z) = -\partial_s u_p^c(s, z)$. Il en résulte que u_0, u_p^s et u_p^c sont solutions de trois équations des ondes amorties $\forall (s, z) \in \mathbb{R}^{*+} \times \omega$:

$$\begin{aligned} \partial_{ss}^2 u_0(s, z) - \partial_{zz}^2 u_0(s, z) + \partial_s u_0(s, z) &= 0, \\ \partial_{ss}^2 u_p^s(s, z) - \partial_{zz}^2 u_p^s(s, z) + \partial_s u_p^s(s, z) &= 0, \\ \partial_{ss}^2 u_p^c(s, z) - \partial_{zz}^2 u_p^c(s, z) + \partial_s u_p^c(s, z) &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Les solutions de ces équations sont exponentiellement décroissantes, et il en est de même des coefficients A_0, B_0, C_p et D_p .

5.2.4 Tests numériques

Le calcul de la solution de l'équation des ondes à données oscillantes par une méthode de différences finies requiert l'utilisation d'un maillage d'autant plus fin que la taille des cellules ε tend vers 0. Par contre, le coût de calcul de la solution du modèle simplifié ne dépend pas de ε . De plus, il conduit à une solution d'autant plus proche de la solution du modèle complet que ε est petit.

Pour simplifier, on a choisi de présenter l'analyse du problème de Cauchy, c'est à dire que le second membre f^N de l'équation des ondes est toujours pris égal à zero. Les tests numériques concernent l'équation des ondes à coefficients constant $a(y) = 1$. Dans ce cas, il n'y a pas de phénomène d'homogénéisation à proprement parler, c'est à dire que l'équation régissant l'évolution des coefficients A_0 et B_0 est identique à l'équation vérifiée par p^N et q^N . Seules les données initiales des deux problèmes diffèrent. Lorsque les données initiales de p^N et q^N ne sont pas oscillantes alors les solutions (p^N, q^N) et (A_0, B_0) coïncident.

Pour $m = 0$, les données initiales et les solutions du modèle à deux échelles sont décomposés sur les bases $\phi_p(y)$ et $\psi_p(y)$. Si les données initiales $h_0^N(x)$ et $h_1^N(x)$ sont décomposables sous forme de combinaisons linéaires $h_0^N(x) = \sum_p c_p(x)\psi_p(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2})$ et $h_1^N(x) = \sum_p d_p(x)\phi_p(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2})$ avec des coefficients c_p et d_p indépendants de N , les limites à deux échelles h_0 et h_1 de h_0^N et de h_1^N apparaissant dans le modèle simplifié sont $h_0(z, y) = \sum_p c_p(z)\psi_p(y)$ et $h_1(z, y) = \sum_p d_p(z)\phi_p(y)$, si bien que leur formulations $\bar{h}_0^N(x)$ et $\bar{h}_1^N(x)$ en variable spatiale x (suivant la même formule que celle utilisée pour la définition de $\bar{p}^N(x)$ et $\bar{q}^N(x)$) coïncident avec $h_0^N(x)$ et $h_1^N(x)$. Dans ce cas, on s'attend à ce que la solution obtenue $(\bar{p}^N(x), \bar{q}^N(x))$ soit proche de la solution exacte $(p^N(x), q^N(x))$. Dans les simulations numériques, les décompositions des données et des solutions sur les fonctions de base ψ_{p-1}, ψ_p et ϕ_{p-1}, ϕ_p pour $p \in 2\mathbb{Z}$ sont tronquées à un nombre fini $2M$ de termes. Les équations dont sont solutions les couples (p^N, q^N) , (A_0, B_0) , (C_{p-1}, D_p) et (D_{p-1}, C_p) sont toutes résolues avec le même schéma de Lax sur le domaine spatio-temporel (t, x) ou bien $(s, z) \in]0, T_{\max}[\times \omega$ où $T_{\max} = 1$. Les nombres de subdivisions relatives aux variables t, x, s et z sont notés n_t, n_x, n_s et n_z .

Sur les figures (5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6) et (5.7, 5.8, 5.9, 5.10), nous présentons respectivement les solutions (p^N, p) , (q^N, q) non stabilisées et l'erreur dans le cas où $N = 3$ (8 cellules) et $n_t = n_x = 96$. Les tests numériques ont été réalisés pour $n_s = n_z = 8, 24, 32, 48, 96$. Nous constatons que les solutions sont superposées et l'erreur diminue lorsqu'on raffine le maillage. Dans ce qui suit, les solutions sont affichées à différents instants t seulement pour les valeurs de $n_s = n_z = 8$ et 24. La solution initiale a été choisie pour (p^N, q^N) de sorte qu'elle n'a des composantes que sur les premiers modes ψ_1, ψ_2 et ϕ_1, ϕ_2 : $h_0^N(x) = 0$ et $h_1^N(x) = x(1-x)\cos(2\pi(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}))$. Les limites à deux échelles dans $\omega \times Y$ de h_0^N et de h_1^N sont respectivement $h_0(z, y) = 0$ et $h_1(z, y) = z(1-z)\cos(2\pi y)$. Le calcul de (p, q) est effectué avec $M = 1$.

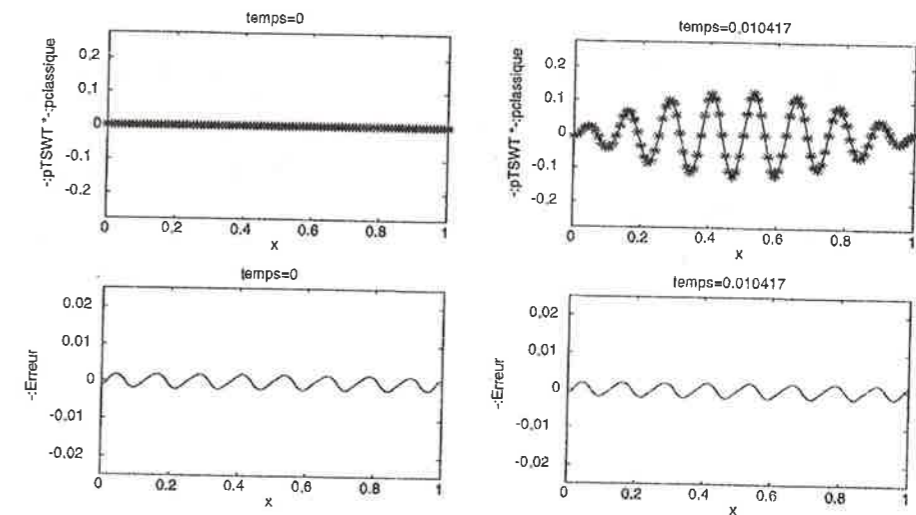


Figure 5.1 :

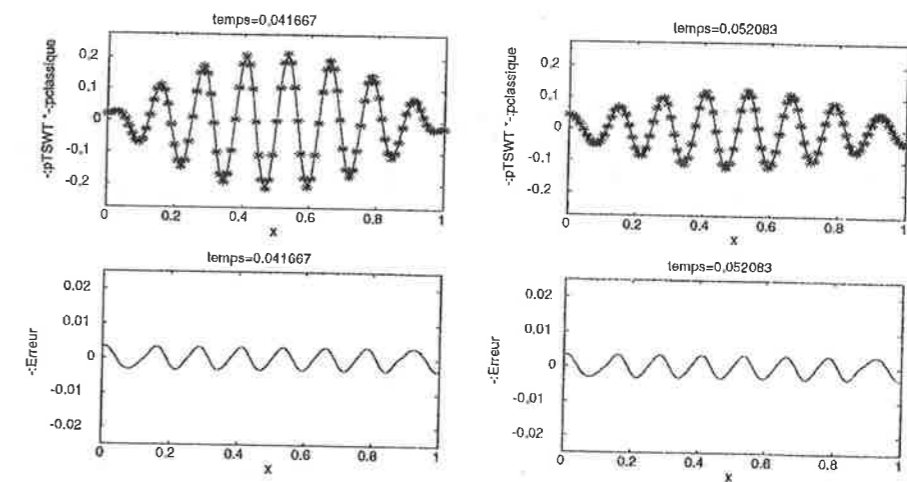


Figure 5.2 :

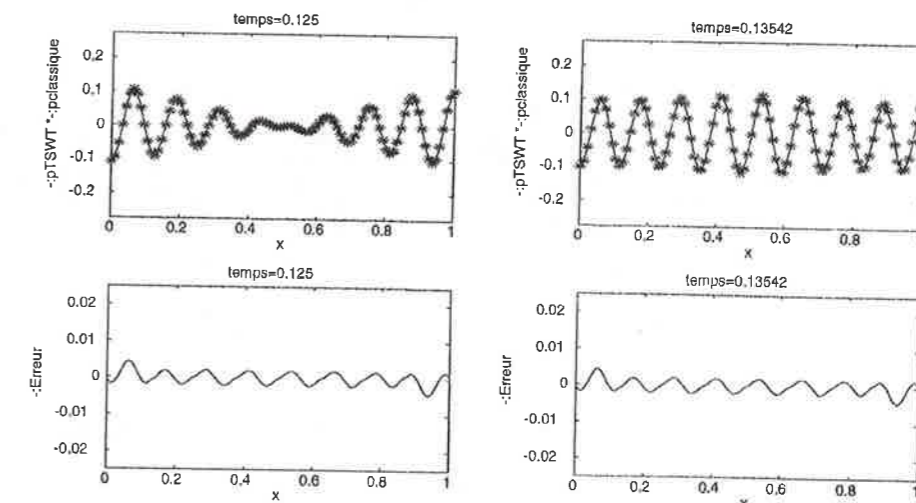


Figure 5.3 : Comparaison des solutions du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 8$

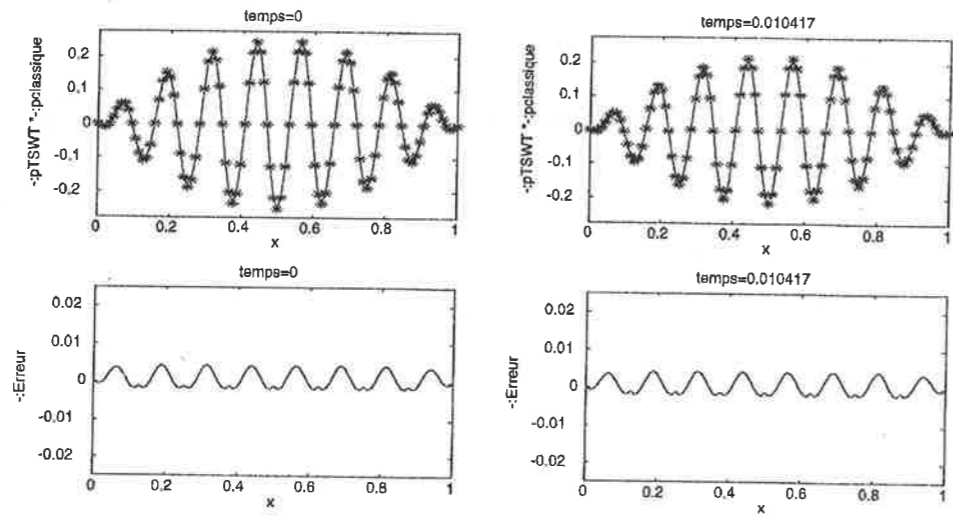


Figure 5.4 :

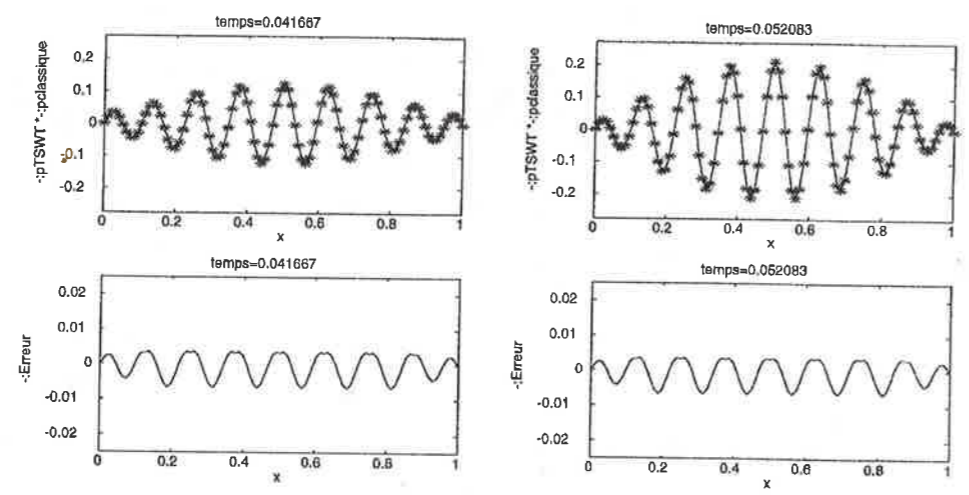


Figure 5.5 :

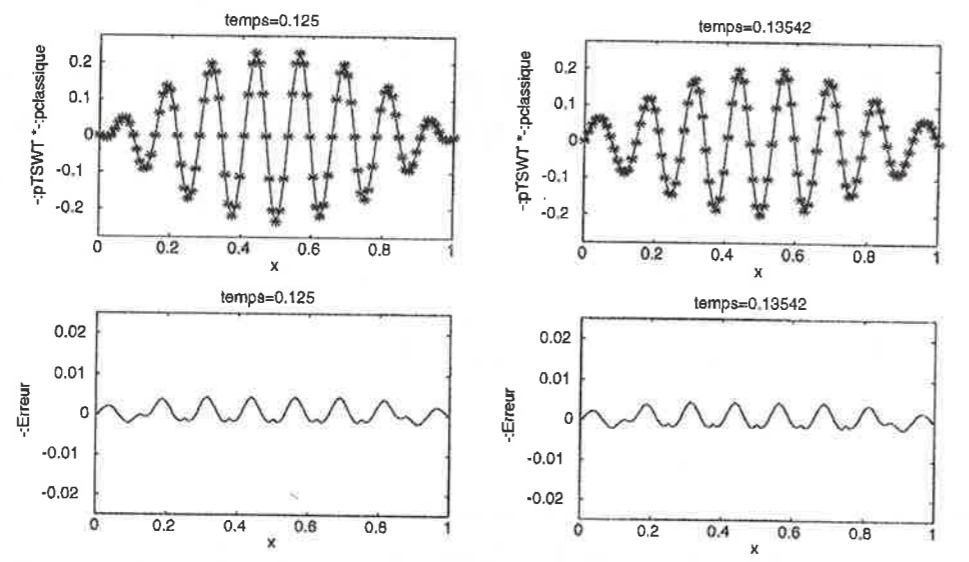


Figure 5.6 : Comparaison des solutions du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 8$

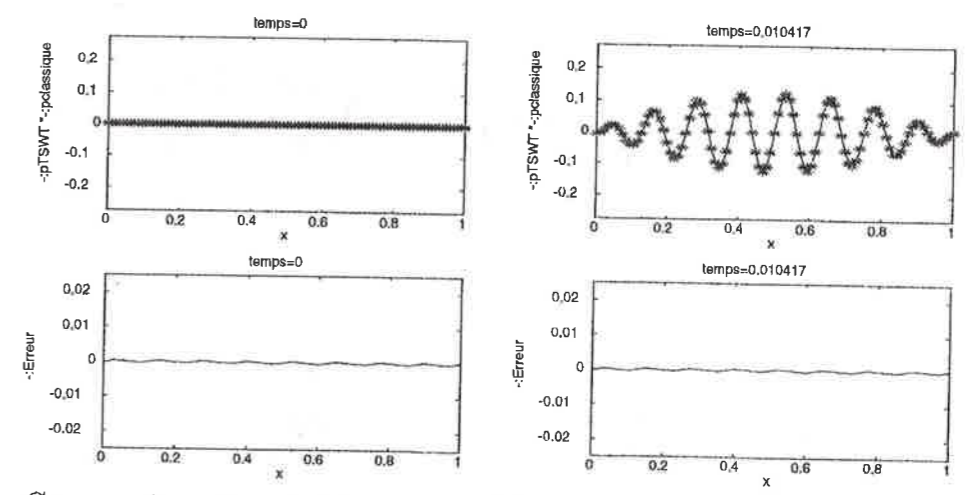


Figure 5.7 : Comparaison des solutions du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 24$

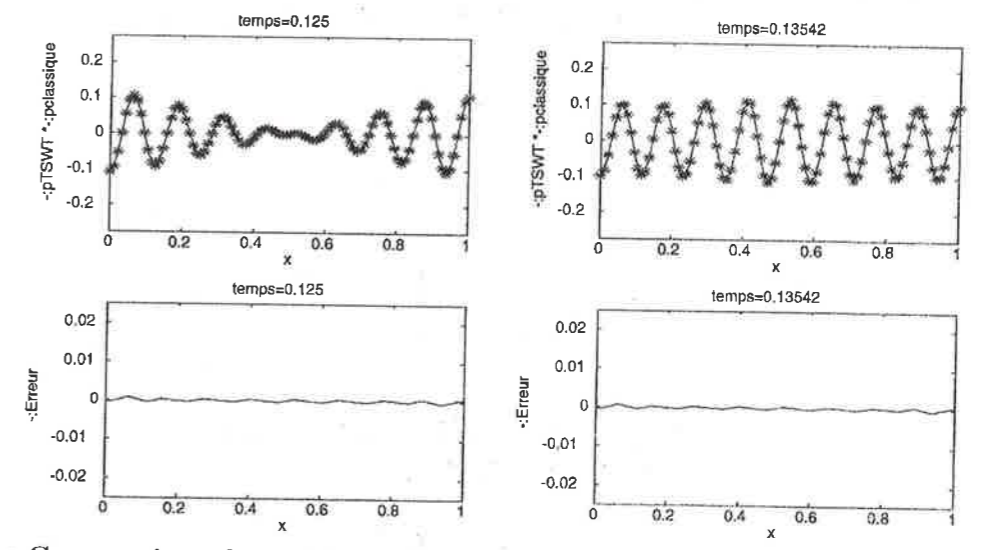


Figure 5.8 : Comparaison des solutions du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 24$

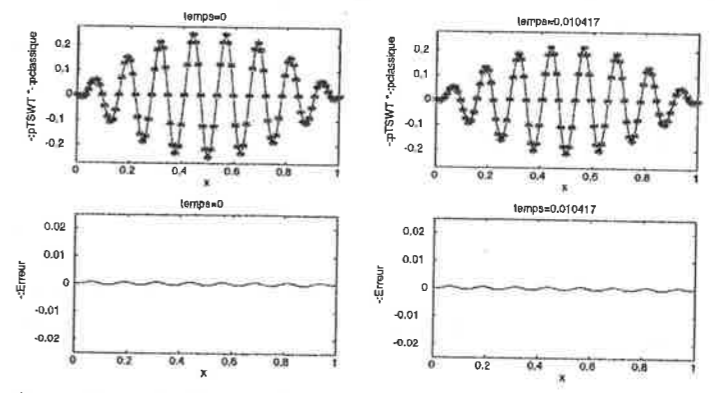


Figure 5.9 : Comparaison des solutions du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 24$

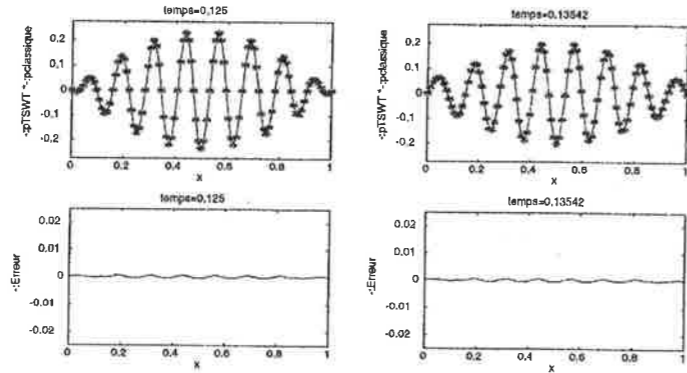


Figure 5.10 : Comparaison des solutions du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 24$

Sur les figures (5.11, 5.12, 5.13, 5.14) sont représentées les solutions non stabilisées du modèle complet et celles stabilisées du modèle simplifié dans le cas où $N = 3$, $n_t = n_x = 96$ et $n_s = n_z = 8$ avec les mêmes conditions initiales que dans la figure (5.1).

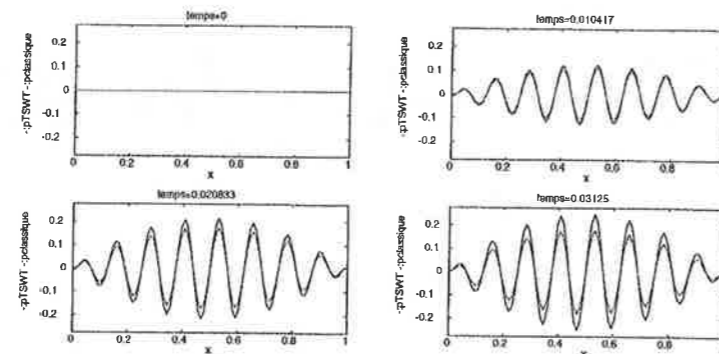


Figure 5.11 : Solution non stabilisée du modèle complet et solution stabilisée du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 8$

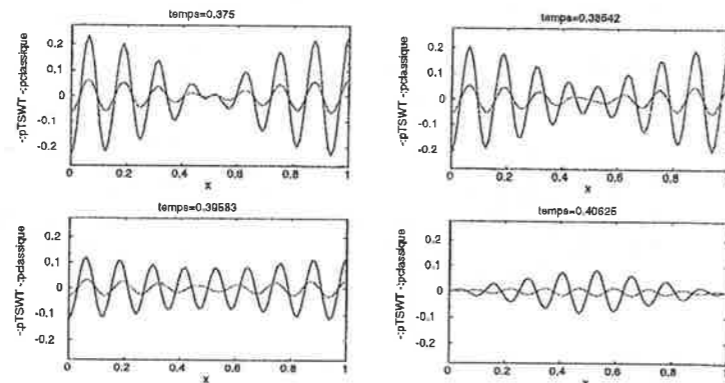


Figure 5.12 : Solution non stabilisée du modèle complet et solution stabilisée du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 8$

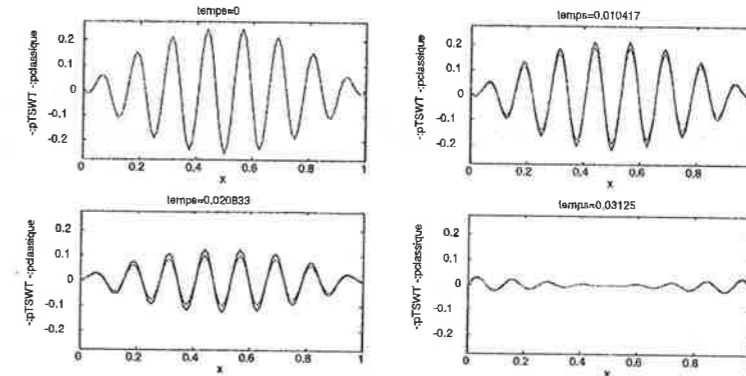


Figure 5.13 : Solution non stabilisée du modèle complet et solution stabilisée du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 8$

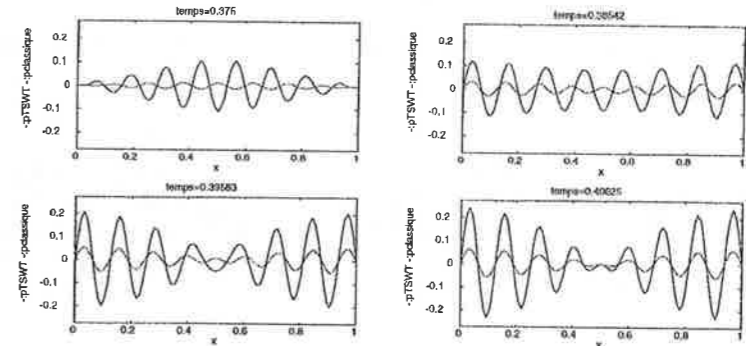


Figure 5.14 : Solution non stabilisée du modèle complet et solution stabilisée du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 3$, $n_x = n_t = 96$ et $n_s = n_z = 8$

Dans le cas $N = 4$ (16 cellules), les solutions sont représentées sur les figures (5.15, 5.16, 5.17, 5.18) et (5.19, 5.20, 5.21, 5.22). Dans ce cas $n_t = n_x = 192$ alors que $n_s = n_z$ prennent les valeurs 16, 32 et les conditions initiales sont les mêmes que précédemment. Nous présentons les solutions dans le cas où $n_s = n_z = 16$ et 32.

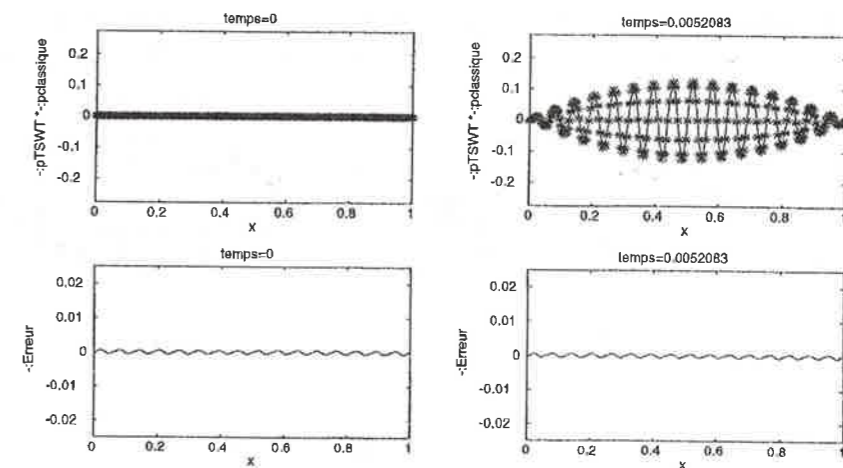


Figure 5.15 : Comparaison des solutions non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 16$

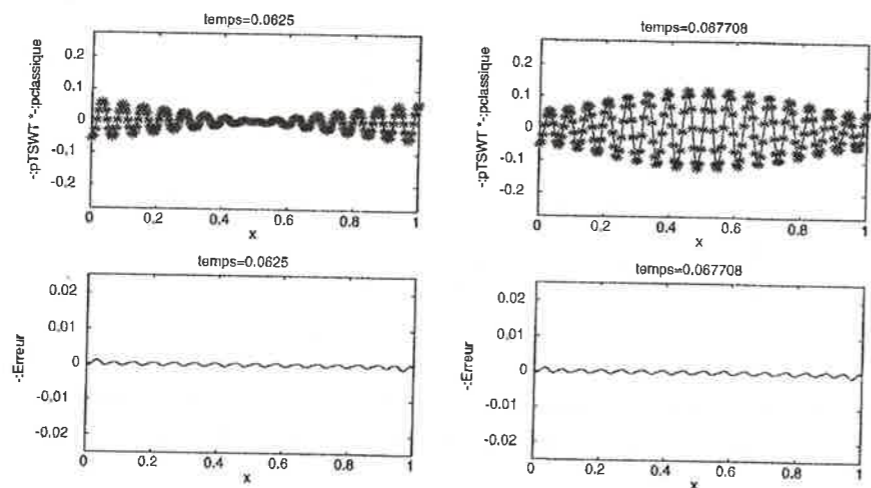


Figure 5.16 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 16$

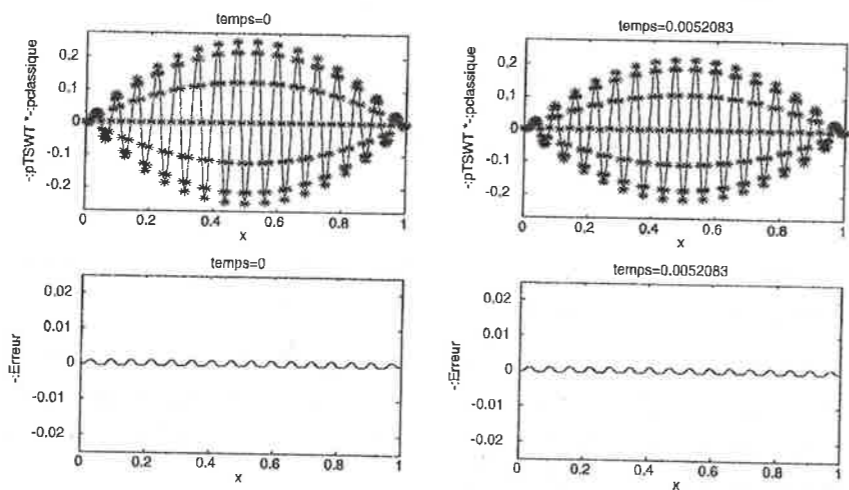


Figure 5.17 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 16$

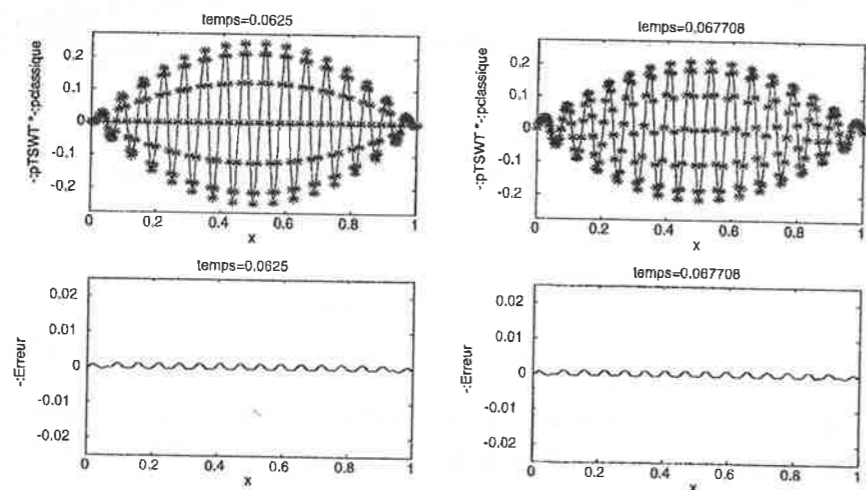


Figure 5.18 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 16$

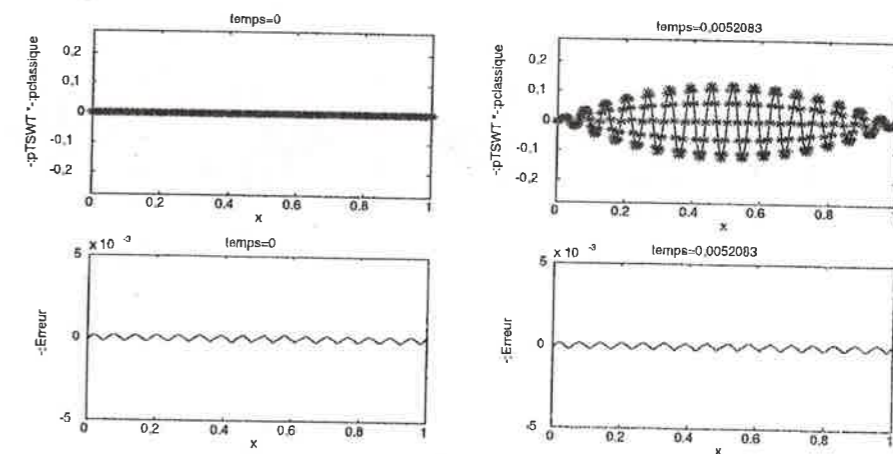


Figure 5.19 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 32$

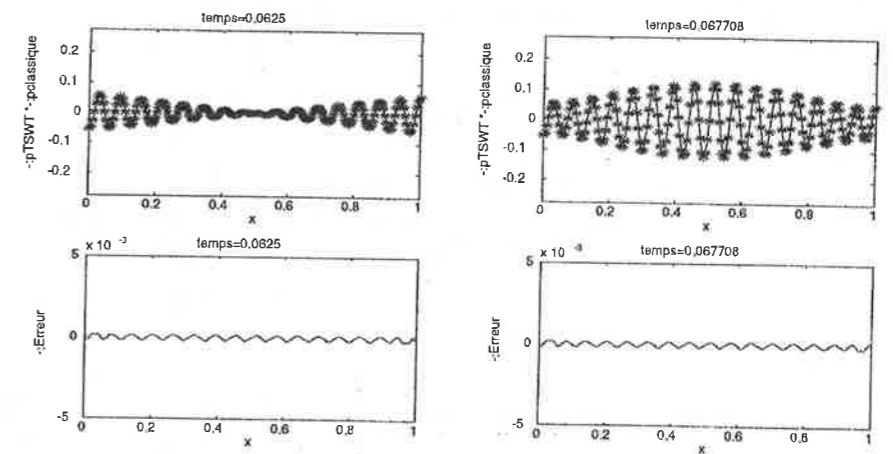


Figure 5.20 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 32$

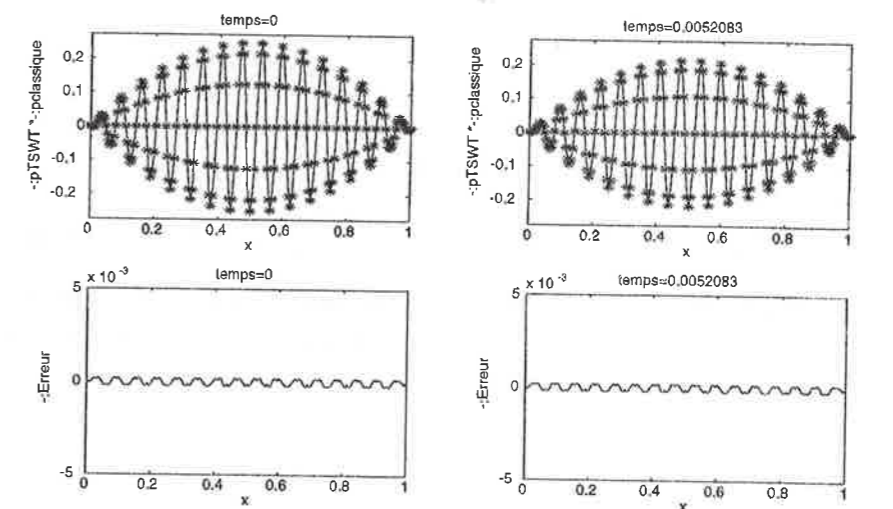


Figure 5.21 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 32$

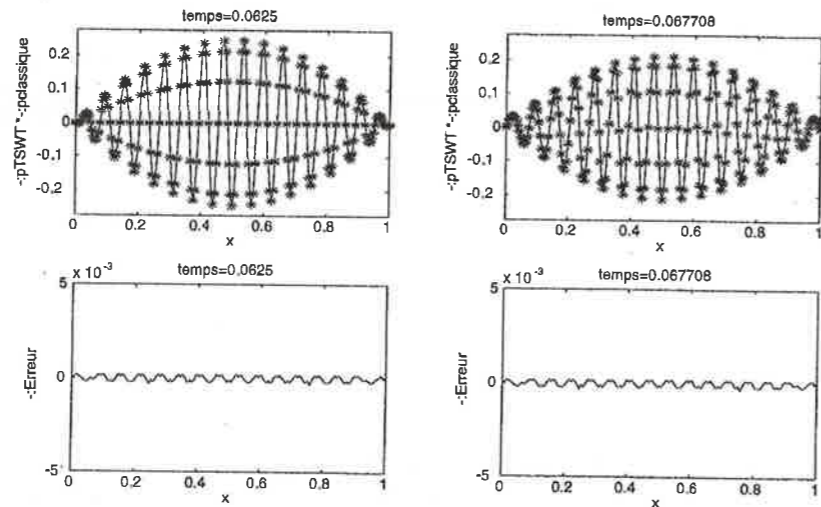


Figure 5.22 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 4$, $n_x = n_t = 192$ et $n_s = n_z = 32$

Les figures (5.23, 5.24, 5.25, 5.26) et (5.27, 5.28, 5.29, 5.30) représentent les résultats obtenus pour les conditions initiales $h_0^N(x) = 0$ et $h_1^N(x) = x(1-x)(\cos(2\pi(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2})) + 2\sin(4\pi(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2})))$ d'une part et leurs limites à deux échelles $h_0(z, y) = 0$ et $h_1(z, y) = z(1-z)(\cos(2\pi y) + 2\sin(4\pi y))$ d'autre part. Evidemment, pour représenter de telles solutions, on a choisi $M = 2$. Les solutions superposées et leur différence sont représentées à différents instants.

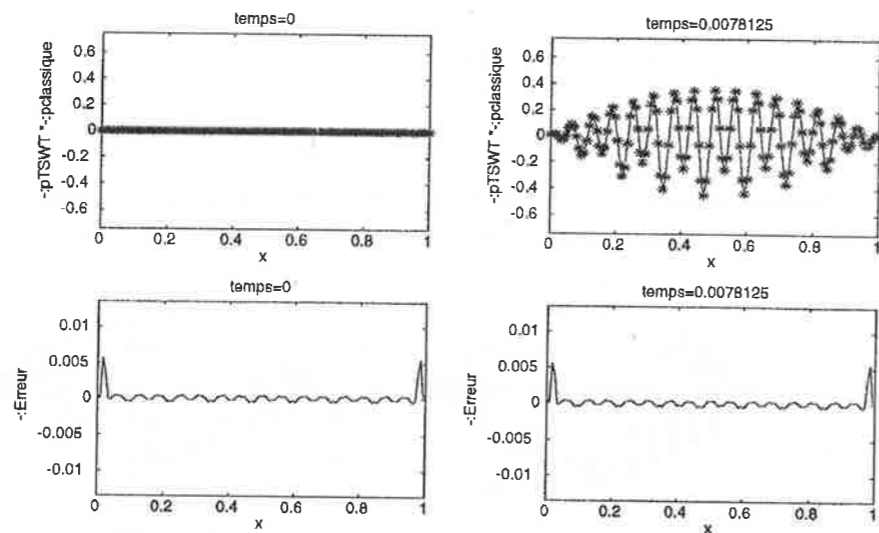


Figure 5.23 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 3$, $n_x = n_t = 128$ et $n_s = n_z = 32$

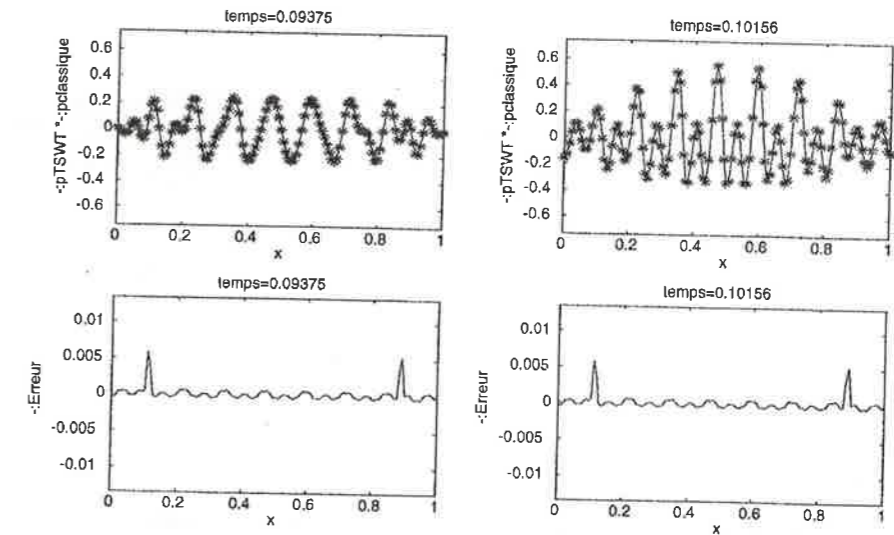


Figure 5.24 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N = 3$, $n_x = n_t = 128$ et $n_s = n_z = 32$

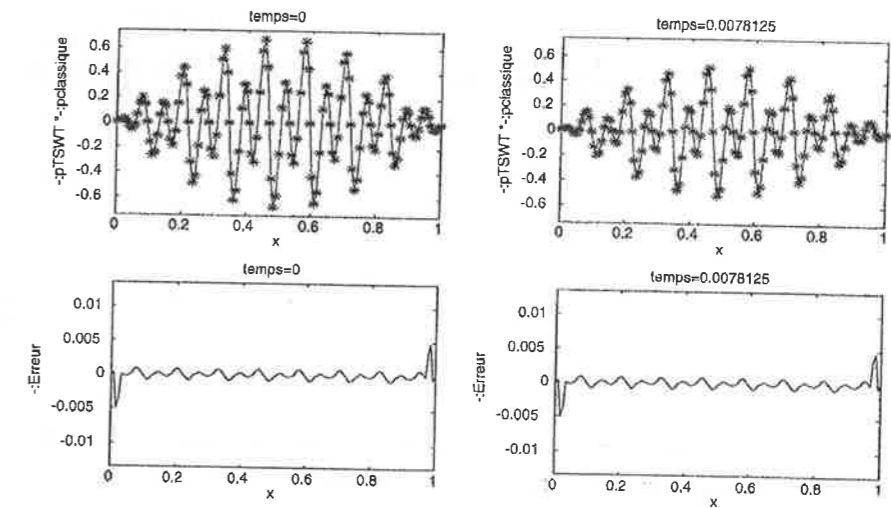


Figure 5.25 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 3$, $n_x = n_t = 128$ et $n_s = n_z = 32$

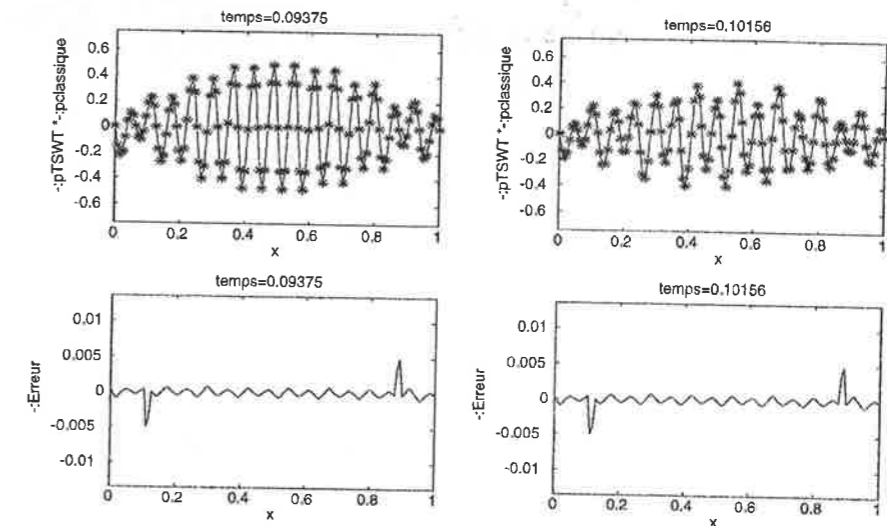


Figure 5.26 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N = 3$, $n_x = n_t = 128$ et $n_s = n_z = 32$

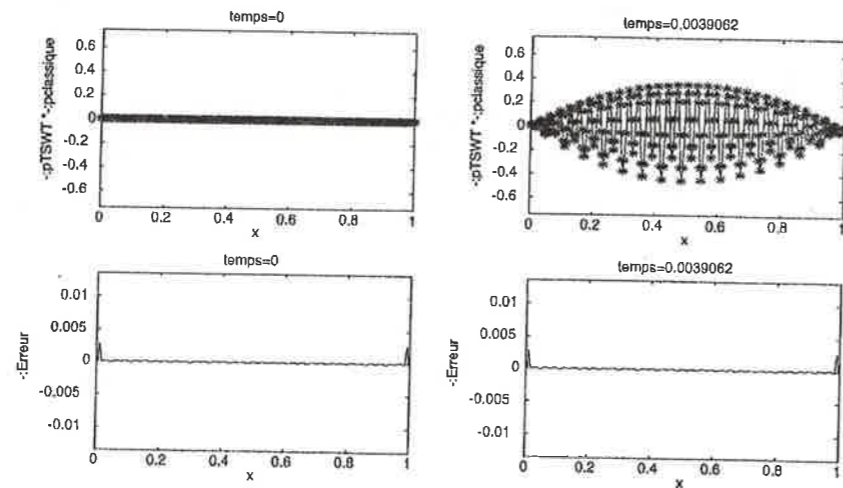


Figure 5.27 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N=4$, $n_x = n_t = 256$ et $n_s = n_z = 64$

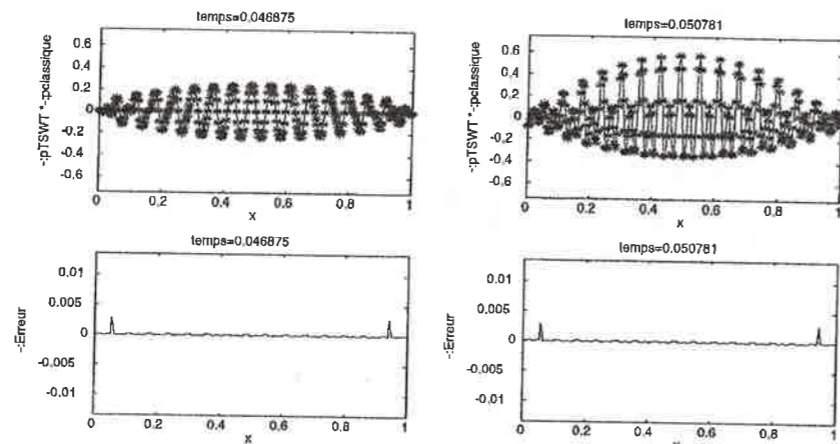


Figure 5.28 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N=4$, $n_x = n_t = 256$ et $n_s = n_z = 64$

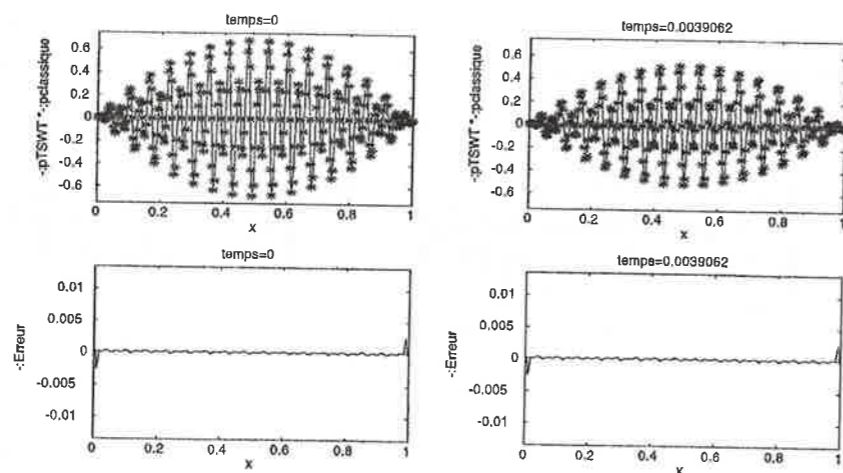


Figure 5.29 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N=4$, $n_x = n_t = 256$ et $n_s = n_z = 64$

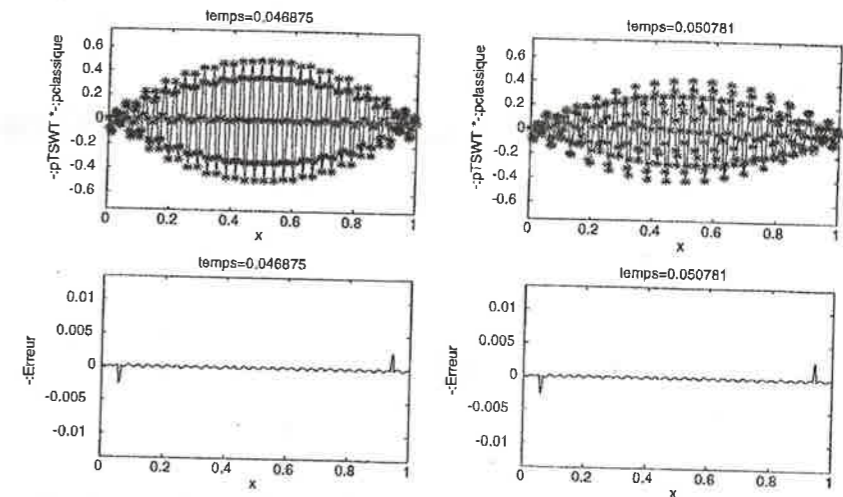


Figure 5.30 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N=4$, $n_x = n_t = 256$ et $n_s = n_z = 64$

Les figures (5.31, 5.32, 5.33, 5.34) et (5.35, 5.36, 5.37, 5.38) représentent les résultats obtenus avec $(N=4, n_x = n_t = 160, n_s = n_z = 16)$ et $(N=4, n_x = n_t = 320, n_s = n_z = 32)$. Les conditions initiales sont $h_0^N(x) = 0$ et $h_1^N(x) = \frac{x(1-x)}{2 + \sin(2\pi(\frac{x}{\epsilon} - \frac{1}{2}))}$. Leur limite à deux échelles sont $h_0(z, y) = 0$ et $h_1(z, y) = \frac{z(1-z)}{2 + \sin(2\pi y)}$. En utilisant le développement limité de $\frac{z(1-z)}{2 + \sin(2\pi y)}$ par rapport à ζ , il apparait que h_1 est une combinaison linéaire infinie des ϕ_p . Une modélisation numérique fidèle serait obtenue en prenant $M = \infty$. Ici, on compare les résultats obtenus avec $M = 1, 2, 3$ et 4 . Les couples de valeurs de $(n_s = n_z, n_t = n_x)$ sont respectivement $(16, 160), (32, 320), (48, 480)$ et $(192, 576)$. Les résultats sont représentés seulement dans les cas $M = 1$ et $M = 2$.

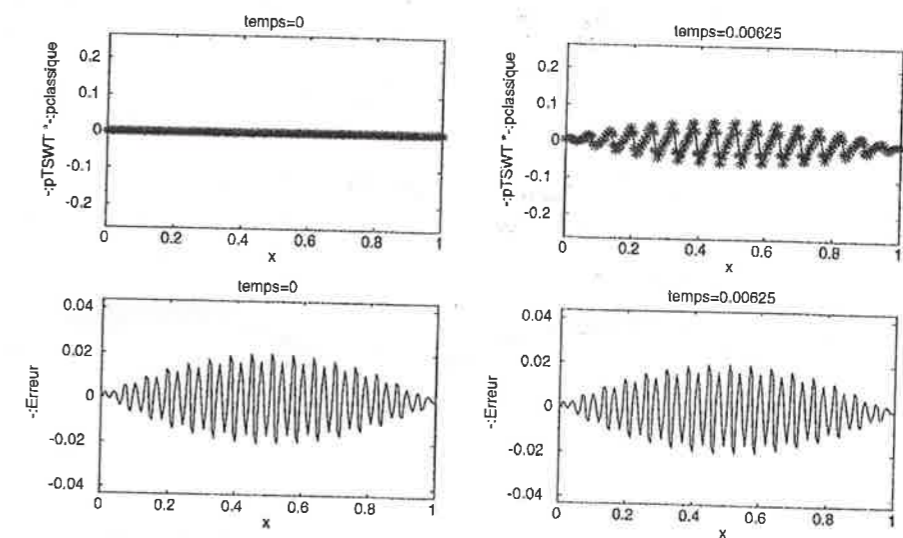


Figure 5.31 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N=4$, $n_x = n_t = 160$ et $n_s = n_z = 16$

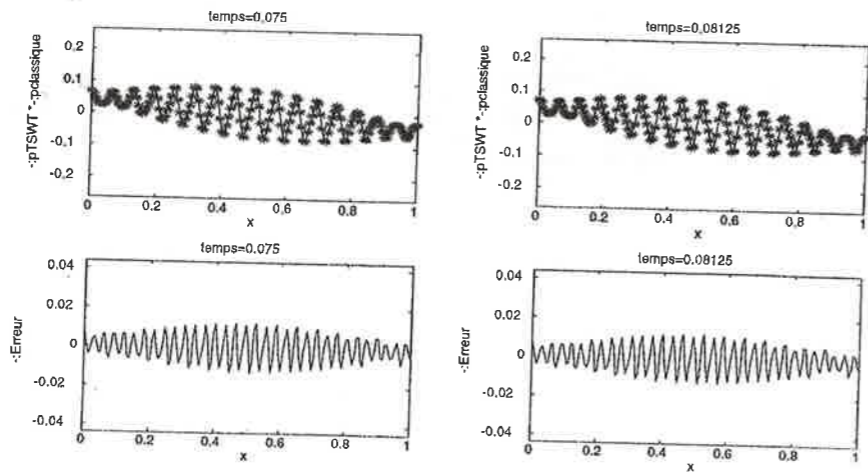


Figure 5.32 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N=4$, $n_x = n_t = 160$ et $n_s = n_z = 16$

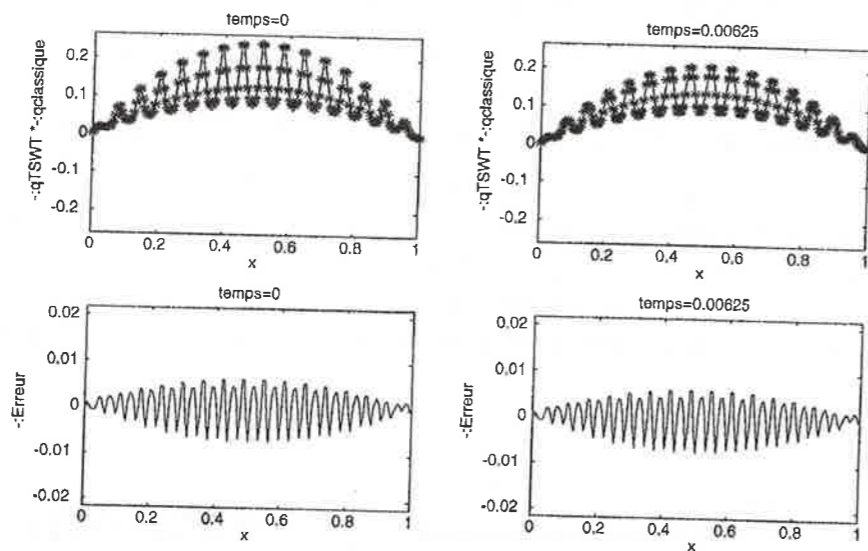


Figure 5.33 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N=4$, $n_x = n_t = 160$ et $n_s = n_z = 16$

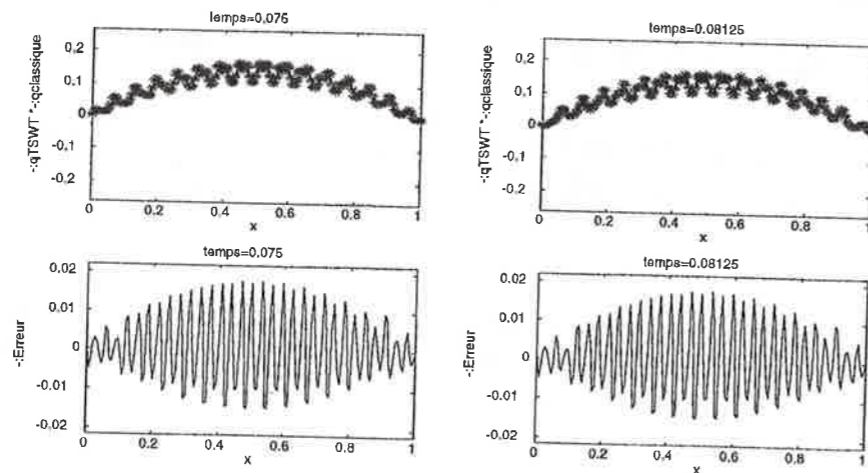


Figure 5.34 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N=4$, $n_x = n_t = 160$ et $n_s = n_z = 16$

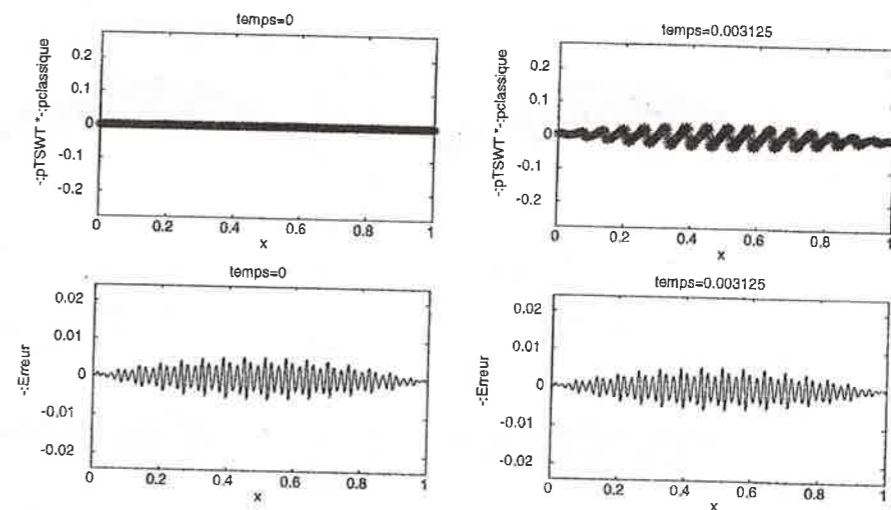


Figure 5.35 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N=4$, $n_x = n_t = 320$ et $n_s = n_z = 32$

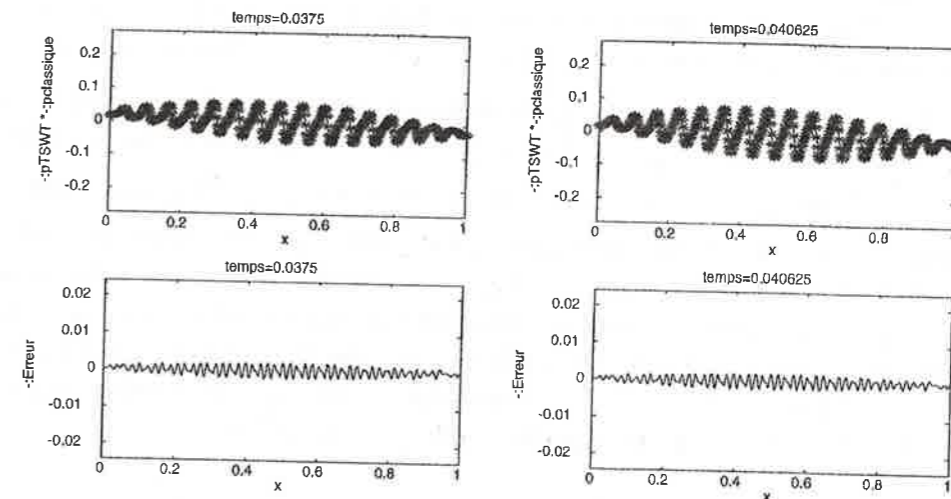


Figure 5.36 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante p avec $N=4$, $n_x = n_t = 320$ et $n_s = n_z = 32$

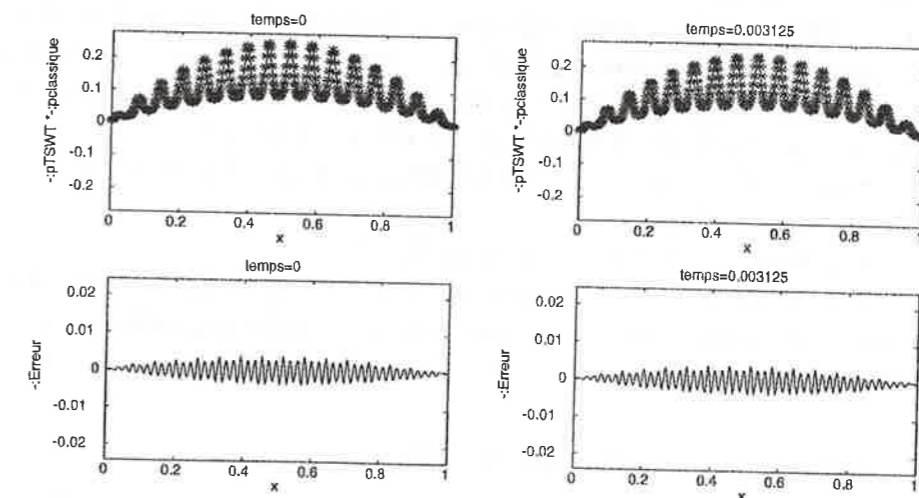


Figure 5.37 : Comparaison des solution non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N=4$, $n_x = n_t = 320$ et $n_s = n_z = 32$

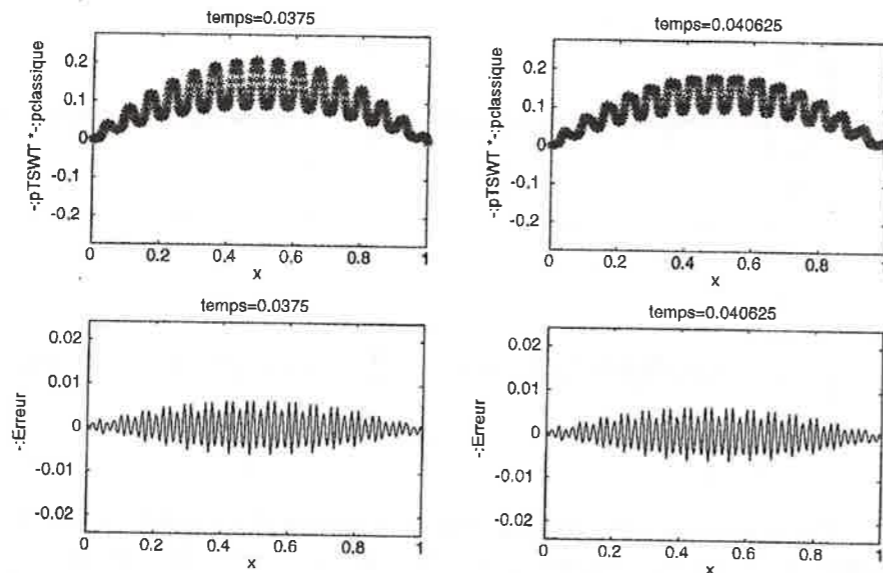


Figure 5.38 : Comparaison des solutions non stabilisées du modèle complet et du modèle simplifié pour la composante q avec $N=4$, $n_x = n_t = 320$ et $n_s = n_z = 32$

Remarque : Les conditions initiales utilisées dans les exemples ci-dessus sont des combinaisons linéaires des fonctions de base $(\psi_p(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}), \phi_p(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2}))$ avec des coefficients ne dépendant que de x et non de $\frac{x}{\varepsilon}$. C'est pour cette raison que les solutions (p^N, q^N) qui en résultent sont bien approchées par les solutions du modèle simplifié. Considérons maintenant les conditions initiales $h_0^N(x) = 0$ et $h_1^N(x) = x(1-x) \cos(\pi(\frac{x}{\varepsilon} - 1))$. Leurs limites à deux échelles dans $\omega \times Y$ sont $h_0(z, y) = h_1(z, y) = 0$. Ainsi, le modèle simplifié correspondant au cas $m = 0$ ne peut pas décrire la solution associée à ce type de condition initiale. Par contre, la limite à deux échelles de h_1^N dans $\omega \times Y(1)$ est $h_1(z, y) = z(z-1) \cos(\pi y)$, si bien que la solution du modèle à deux échelles pour $m = 1$ devrait être très proche de la solution (p^N, q^N) .

5.3 La convergence à deux échelles pour les ondes

L'obtention du modèle simplifié à deux échelles est basée sur la notion de convergence à deux échelles pour les ondes. Elle est définie à partir de la définition de transformation à deux échelles pour les ondes d'une fonction (ou TSWT pour Two-Scale Wave Transform). La construction de la TSWT $\tilde{u}(s, z, \tau, y)$ d'une fonction $u(t, x)$ est effectuée en 3 étapes :

(i) la construction de $\hat{u}(t, z, y)$: la transformation à deux échelles sur $\omega \times Y(m)$ de $u(t, x)$ par rapport à la variable x d'espace,

(ii) la projection de $\hat{u}(t, z, y)$ sur les ondes de Bloch,

(iii) la transformation à deux échelles de chaque coefficient de la décomposition en ondes de Bloch, par rapport à la variable de temps, avec mise à l'échelle dépendante de la valeur propre de Bloch associée.

5.3.1 Décomposition en ondes de Bloch

Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, une partition de l'ensemble $B = [-\pi, \pi[$ par des cellules $(B^\eta)_{\eta \in K_j}$ est construite comme suit :

$$\begin{aligned} B^\eta &= [\eta - \frac{\pi}{2^{j-1}}, \eta + \frac{\pi}{2^{j-1}}[\text{ pour } j \neq 0 \text{ et } 1, \\ &= [-\pi, \pi[\text{ pour } j = 0 \text{ et } 1. \end{aligned}$$

Les index η varient dans

$$\begin{aligned} K_j &= \left\{ \eta = \frac{(2l+1)\pi}{2^{j-1}}, \text{ avec } l \in \{-2^{j-2}, \dots, 2^{j-2} - 1\} \text{ pour } j \neq 0 \text{ et } 1, \right. \\ &= \{0\} \text{ pour } j = 0, \\ &= \{-\pi\} \text{ pour } j = 1. \end{aligned}$$

Les remarques suivantes sont importantes pour la suite.

Remarques : (i) Pour tout $j \neq j'$, les ensembles K_j et $K_{j'}$ sont disjoints, c'est à dire que $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$.

(ii) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, les ensembles $(B^\eta)_{\eta \in K_j}$ forment une partition de B : $\cup_{\eta \in K_j} B^\eta = B$.

Pour un $j \in \mathbb{N}$ donné, nous définissons la fonction $E_j : B \rightarrow K_j$, constante sur chaque cellule B^η avec $\eta \in K_j$, par :

$$E_j(k) = \eta \text{ pour tout } k \in B^\eta.$$

Dans la suite, on supposera toujours que j est un entier et que $0 \leq j \leq m$. Les coefficients κ_j^m sont définis par :

$$\kappa_j^m = (2^{m-j+2}\pi)^{-\frac{1}{2}} \text{ pour } j \neq 0 \text{ et } \kappa_0^m = (2^{m+1}\pi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit $H_{\#}^1(Y(m))$ le sous-espace des fonctions définies sur \mathbb{R} , dont la restriction à $Y(m)$ appartient à l'espace $H^1(Y(m))$, et qui sont $Y(m)$ -périodiques, c'est à dire qu'elles ont des traces égales sur les côtés opposés de $Y(m)$. La proposition suivante fournit une décomposition des fonctions de $L^2(\omega; H_{\#}^1(Y(m)))$ utilisée pour la définition de la transformation à deux échelles pour les ondes.

Proposition 1 : (i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour chaque $v \in L^2(\omega; H_{\#}^1(Y(m)))$, il existe une unique famille de fonctions $v_{\#}^j(k, z, y) \in L^2(B \times \omega; H_{\#}^1(Y))$, indexée par $j \in \{0, \dots, m\}$, telle que :

$$v(z, y) = \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B v_{\#}^j(k, z, y - \frac{1}{2}) e^{iE_j(k)y} dk, \quad (5.23)$$

les fonctions $v_{\#}^j(k, z, y)$ étant définies comme suit :

$$v_{\#}^j(k, z, y) = \kappa_j^m \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(z, y + r + \frac{1}{2}) e^{-iE_j(k)(y+r+\frac{1}{2})}, \quad (5.24)$$

pour tout $\eta \in K_j$ et tout $k \in B^\eta$.

(ii) Le choix de la constante κ_j^m est tel que l'opérateur $v \mapsto (v_{\#}^j(k, z, y))_{j=0, \dots, m}$ est une isométrie de $L^2(\omega \times Y(m))$ dans $(L^2(B \times \omega \times Y))^{m+1}$, c'est-à-dire que :

$$\|v\|_{L^2(\omega \times Y(m))}^2 = \sum_{0 \leq j \leq m} \|v_{\#}^j\|_{L^2(B \times \omega \times Y)}^2.$$

Les fonctions v_j^j vérifient les propriétés d'orthogonalité énoncées dans la proposition suivante.
Proposition 2 : Soient v_1 et v_2 deux fonctions de $L^2(\omega; H_{\#}^1(Y))$, deux entiers $0 \leq j_1, j_2 \leq m$ et deux réels $(\eta_1, \eta_2) \in K_{j_1} \times K_{j_2}$. Si l'une des deux conditions

$$j_1 \neq j_2 \text{ ou } \eta_1 \neq \eta_2,$$

est satisfaite, alors pour tout $(k_1, k_2) \in B^{\eta_1} \times B^{\eta_2}$, les fonctions $v_1(z, y)e^{iE_{j_1}(k_1)y}$ et $v_2(z, y)e^{iE_{j_2}(k_2)y}$ sont orthogonales au sens du produit scalaire de $L^2(\omega \times Y(m))$.

Par la suite, toutes les fonctions de k , indicées par j , sont définies comme suit : soit $f^j(k)$ une telle fonction définie sur B . Cette fonction sera constante sur chaque cellule B^η quand on partitionne B suivant $B = \cup_{\eta \in K_j} B^\eta$; donc la donnée des seules valeurs $(f^j(k))_{k \in K_j}$ suffit à connaître f^j sur B entier.

Le spectre de Bloch (voir [7]) est constitué des valeurs propres positives $(\mu_p^j(k))_{j \in \mathbb{N}, k \in K_j, p \in \mathbb{N}^*}$ solutions du problème spectral :

$$-\partial_y(a(y)\partial_y\phi_p^j(k, y)) = \mu_p^j(k)\phi_p^j(k, y) \text{ dans } Y, \quad (5.25)$$

avec les conditions aux limites :

$$\phi_p^j(k, y)e^{-iE_j(k)y} \text{ et } e^{-iE_j(k)y}a(y)\partial_y\phi_p^j(k, y) \text{ sont } Y\text{-périodiques.} \quad (5.26)$$

On complète la famille de ces fonctions propres avec $\phi_0^j(k, y)$ (notée également $\phi_0(y)$), fonction constante sur $Y(m)$. Chacune des fonctions $\phi_p^j(k)$ est choisie de norme égale à 1 pour la norme de l'espace $L^2(Y(m))$. Pour chaque k et j , l'ensemble des fonctions $(\phi_p^j(k, \cdot))_{p \in \mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale complète pour l'espace $L^2(Y)$, ainsi que pour l'espace $H_{\#, E_j(k)}^1(Y)$ (mais, dans ce cas, vis-à-vis de la semi-norme issue du produit scalaire $(u/v) = \int_Y a(y)u(y)v(y)dy$) où $H_{\#, \eta}^1(Y)$ est l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$H_{\#, \eta}^1(Y) = \{v(y) = v_{\#}(y - \frac{1}{2})e^{i\eta y} \text{ avec } v_{\#} \in H_{\#}^1(Y)\}.$$

D'après la proposition 1, l'ensemble des fonctions propres $(\phi_p^j(k, \cdot))_{j \in \{0, \dots, m\}, k \in K_j, p \in \mathbb{N}^*}$ forme une famille orthonormale complète pour $L^2(Y(m))/\mathbb{R}$ et une famille orthogonale complète pour l'espace $H_{\#}^1(Y(m))/\mathbb{R}$. Grâce à la proposition 2, on peut décomposer $H_{\#}^1(Y(m))/\mathbb{R}$ d'une façon qui est essentielle pour la suite :

$$H_{\#}^1(Y(m))/\mathbb{R} = H_{\#}^1(Y(m-1))/\mathbb{R} \oplus \text{vect}((\phi_p^m(k, \cdot))_{p \in \mathbb{N}^*, k \in K_m}).$$

Autrement dit, la contribution au spectre de Bloch des solutions du problème spectral lorsque j passe de $m-1$ à m est exactement $\cup_{p \in \mathbb{N}^*, k \in K_m} \{\mu_p^m(k)\}$.

5.3.2 La transformation à deux échelles pour les ondes.

Dans cette partie, on combine la transformation à deux échelles par rapport aux variables d'espace et de temps avec la décomposition en ondes orthogonales introduite au paragraphe précédent.

Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé indépendamment de N , et $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq N$. La transformée à deux échelles de paramètre m d'une fonction $v(x) \in L^2(\omega)$ est la fonction $\hat{v}(z, y) \in L^2(\omega \times Y(m))$ définie par :

$$\hat{v}(z, y) = v(x_l^N(m) + \varepsilon y),$$

pour tous $z \in]2^m l \varepsilon, 2^m(l+1)\varepsilon[$, $y \in Y(m)$ et tout $l \in \{0, \dots, 2^{N-m} - 1\}$ avec $x_l^N(m) = 2^m \varepsilon(l + \frac{1}{2})$. On définit également une transformation à deux échelles de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ par rapport à la variable de temps. Soit $Y_t = Y$. La transformée à deux échelles $\hat{u}^\alpha(s, \tau) \in L^2(\mathbb{R}^+ \times Y_t)$ d'une fonction $u(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ est définie par

$$\hat{u}^\alpha(s, \tau) = u(t_i^N + \alpha \varepsilon \tau),$$

pour tous $s \in]t_i^N - \frac{\alpha \varepsilon}{2}, t_i^N + \frac{\alpha \varepsilon}{2}[$, $\tau \in Y_t$ et tout $i \in \mathbb{N}$, avec $t_i^N = (i + \frac{1}{2})\alpha \varepsilon$.

A chaque fonction propre $\phi_p^j(k, y)$ on associe la fonction

$$\psi_p^j(k, y) = \sqrt{\frac{a(y)}{\mu_p^j(k)}} \partial_y \phi_p^j(k, y).$$

Cette famille est complétée par $\psi_0^j = \psi_0(y) = \frac{C}{\sqrt{a(y)}}$ avec $C = (\int_{Y(m)} \frac{1}{a(y)} dy)^{-\frac{1}{2}}$. Ainsi définie,

pour chaque j et chaque k , la famille $(\psi_p^j(k, \cdot))_{p \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale complète pour l'espace $L^2(Y)$, et une famille orthogonale complète pour l'espace $H_{\#, E_j(k)}^1(Y)$ (toujours pour la semi-norme issue du produit scalaire $(u/v) = \int_Y a(y)u(y)v(y)dy$).

Enfin, la famille $(\psi_p^j(k, \cdot))_{j \in \{0, \dots, m\}, k \in K_j, p \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale complète pour $\frac{L^2(Y(m))}{\text{vect}(\psi_0)}$,

et une famille orthogonale complète pour $\frac{H_{\#}^1(Y(m))}{\text{vect}(\psi_0)}$.

Posons $\alpha_p^j(k) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_p^j(k)}}$. Considérons un couple $(p, q)(t, x) \in (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega))^2$. On lui associe sa transformée à deux échelles $(\hat{p}, \hat{q})(t, z, y)$ par rapport à la variable d'espace. On peut alors décomposer (\hat{p}, \hat{q}) sous la forme :

$$\hat{p}(t, z, y) = c_0(t, z)\psi_0(y) + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} c_p^j(k, t, z)\psi_p^j(k, y)dk \quad (5.27)$$

$$\hat{q}(t, z, y) = d_0(t, z)\phi_0(y) + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} d_p^j(k, t, z)\phi_p^j(k, y)dk \quad (5.28)$$

Les transformées à deux échelles des coefficients $c_0(t, z)$, $c_p^j(k, t, z)$, $d_0(t, z)$, $d_p^j(k, t, z)$ par rapport à la variable temps t et de coefficient respectivement 1, $\alpha_p^j(k)$, 1, $\alpha_p^j(k)$ sont notées $\tilde{c}_0(s, z, \tau)$, $\tilde{c}_p^j(k, s, z, \tau)$, $\tilde{d}_0(s, z, \tau)$, $\tilde{d}_p^j(k, s, z, \tau)$.

Définition : La transformation à deux échelles \mathcal{T} pour les ondes :

$$\mathcal{T} : (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega))^2 \longrightarrow (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$$

$$(p, q) \longmapsto (\tilde{p}, \tilde{q}),$$

est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(s, z, \tau, y) &= \tilde{c}_0(s, z, \tau)\psi_0(y) + \\ &\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{c}_p^j(k, s, z, \tau)\psi_p^j(k, y)dk \\ \tilde{q}(s, z, \tau, y) &= \tilde{d}_0(s, z, \tau)\phi_0(y) + \\ &\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \tilde{d}_p^j(k, s, z, \tau)\phi_p^j(k, y)dk. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Proposition 3 : La transformation $\frac{1}{\sqrt{2m}}\mathcal{T}$ est une isométrie de $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega))^2$ dans $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$.

La transformation à deux échelles pour les ondes de la dérivée $\partial_t(p, q)$ du couple (p, q) est égale à $\frac{1}{\varepsilon}M\partial_\tau \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}$ avec M opérateur défini de $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$ dans lui-même par :

$$M \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0(s, z, \tau)\psi_0(y) + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{\tilde{c}_p^j(k, s, z, \tau)}{\alpha_p^j(k)} \psi_p^j(k, y) dk \\ \tilde{d}_0(s, z, \tau)\phi_0(y) + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{\tilde{d}_p^j(k, s, z, \tau)}{\alpha_p^j(k)} \phi_p^j(k, y) dk \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

5.3.3 Convergence à deux échelles pour les ondes

Utilisant la définition de transformation à deux échelles pour les ondes, on dit qu'une suite $(p^N, q^N) \in (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega))^2$ est convergente à deux échelles pour les ondes dans $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$ vers une limite $(p, q) \in (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$ si sa transformée à deux échelles pour les ondes $(\tilde{p}^N, \tilde{q}^N)$ converge vers (p, q) dans $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$. Cette convergence peut être forte ou bien faible.

De façon similaire, on définit la convergence à deux échelles d'une suite de fonction $v^N(x) \in L^2(\omega)$ vers une limite $v(z, y) \in L^2(\omega \times Y(m))$ à l'aide de la transformation à deux échelles $\tilde{v}(z, y)$ de $v^N(x)$.

5.4 Le modèle limite

Des hypothèses faites dans partie 4.2.1, on déduit que (p^N, q^N) est borné dans $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega))^2$ et qu'il existe une sous-suite extraite de (p^N, q^N) qui converge faiblement à deux échelles pour les ondes vers une limite $(p, q) \in (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$. On suppose que la suite $(0, f^N)$ converge faiblement à deux échelles pour les ondes dans $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$ vers une limite $(0, f)$ et les suites h_0^N et h_1^N convergent à deux échelles dans $L^2(\omega \times Y(m))$ vers des limites h_0 et h_1 .

Proposition 4 : La limite $(p, q) \in (L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$ est solution du système d'équations (5.3-5.7).

Remarques : (i) En utilisant la décomposition (5.23), les inconnues p et q peuvent être remplacées par des combinaisons de fonctions $Y_t \times Y$ -périodiques. On en déduit alors un modèle posé sur le domaine indépendant de m , $B \times \mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y$, au lieu de $\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)$. (ii) La partie du spectre de Bloch associée aux fonctions $\phi_p^j(k, \cdot)$ et $\psi_p^j(k, \cdot)$ présentes dans ce modèle est $\cup_{j \in \{0, \dots, m\}, k \in K_j, p \in \mathbb{N}^*} \{\mu_p^j(k)\}$. Lorsque m tend vers l'infini, cette partie tend vers le spectre de Bloch complet.

Pour la formulation des modèles, on a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \int_Y h_0(z, y)\psi_0(y)dy, \\ H_1(z) &= \int_Y h_1(z, y)dy \quad \forall z \in \omega, \\ H_{0p}^j(k, z) &= - \int_Y h_0(z, y)\psi_p^j(k, y)dy, \\ H_{1p}^j(k, z) &= - \int_Y h_1(z, y)\phi_p^j(k, y)dy \quad \forall z \in \omega, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} b &= \left(\int_{Y_t \times Y(m)} a^{1/2}(y)\psi_0(y)\phi_0(y) d\tau dy \right)^{1/2}, \\ J_{pp'}^{jj'}(k, k') &= \int_{Y(m)} \frac{a^{1/2}(y)}{2} \left(\psi_{p'}^{j'}(k', y)\phi_p^j(k, y) - \phi_{p'}^{j'}(k', y)\psi_p^j(k, y) \right) dy, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} f^0(s, z) &= \int_{Y_t \times Y(m)} f(s, z, \tau, y)\phi_0(y)d\tau dy, \\ f_p^{j,s}(k, s, z) &= \int_{Y_t \times Y(m)} f(s, z, \tau, y)\sin(2\pi\tau)\phi_p^j(k, y)d\tau dy, \\ f_p^{j,c}(k, s, z) &= \int_{Y_t \times Y(m)} f(s, z, \tau, y)\cos(2\pi\tau)\phi_p^j(k, y)d\tau dy, \end{aligned} \quad (5.33)$$

et

$$R_{pp'}^{jj'}(k, k', y) = \psi_p^j(k, y)\phi_{p'}^{j'}(k', y). \quad (5.34)$$

Proposition 5 : Le couple (p, q) est solution des équations (5.3-5.4) si et seulement si il admet une décomposition de la forme (5.8). Si de plus, il est solution du système (5.5-5.6) alors les coefficients $A_0, B_0, C_p^j(k, \cdot)$ et $D_p^j(k, \cdot)$ sont solutions des équations (5.9-5.14). Enfin, si de plus tous les $\alpha_p^j(k)$ sont distinct alors ces coefficients vérifient les conditions aux limites (5.15).

Dans le cas particulier où $m = 0$ et $a(y) = 1$, les fonctions de base $\phi_p(y)$ et $\psi_p(y)$ sont définies comme suit. Pour $p = 0$: $\phi_0(y) = \psi_0(y) = 1$. Pour $p \in 2\mathbb{Z}^*$, $\phi_{p-1}(y) = \sqrt{2}\cos(p\pi y)$, $\phi_p(y) = \sqrt{2}\sin(p\pi y)$, $\psi_{p-1}(y) = -\sqrt{2}\sin(p\pi y)$ et $\psi_p(y) = \sqrt{2}\cos(p\pi y)$. On en déduit que $b = 1$ et que $J_{pp'} = 0$ pour tous $p, p' \in \mathbb{N}^*$ sauf pour $(p, p') \in \{(2l, 2l-1), (2l-1, 2l)\}$ où $J_{2l-1, 2l} = -J_{2l, 2l-1} = 1$. Enfin, les second membres des équations (5.16-5.18) sont :

$$\begin{aligned} f_p^s(s, z) &= \sqrt{2} \int_{Y_t \times Y} f(s, z, \tau, y)\sin(2\pi\tau)\sin(p\pi y) d\tau dy, \\ f_{p-1}^s(s, z) &= \sqrt{2} \int_{Y_t \times Y} f(s, z, \tau, y)\sin(2\pi\tau)\cos(p\pi y) d\tau dy, \\ f_p^c(s, z) &= \sqrt{2} \int_{Y_t \times Y} f(s, z, \tau, y)\cos(2\pi\tau)\sin(p\pi y) d\tau dy, \\ f_{p-1}^c(s, z) &= \sqrt{2} \int_{Y_t \times Y} f(s, z, \tau, y)\cos(2\pi\tau)\cos(p\pi y) d\tau dy. \end{aligned}$$

Proposition 6 : Si $m = 0$ et $a(y) = 1$, alors les coefficients A_0, B_0, C_p et D_p sont solutions des équations (5.16-5.18).

Pour le problème de stabilisation associé au modèle à deux échelles, nous choisissons un second membre f^N dont la limite à deux échelles pour les ondes dans $(L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)))^2$ est :

$$f(s, z, \tau, y) = -\partial_s u_0(s, z) + 2\sqrt{2} \sum_{p \in 2\mathbb{N}^*} \cos(p\pi y) (\sin(2\pi\tau) \partial_s u_p^s(s, z) - \cos(2\pi\tau) \partial_s u_p^c(s, z)).$$

Proposition 7 : Avec ce choix de second membre, u_0, u_p^c et u_p^s sont solutions des équations des ondes amorties (5.22).

5.5 Démonstration de la proposition 2

La démonstration est faite pour v_1 et $v_2 \in H_{\sharp}^1(Y)$. Son extension à des fonctions de $L^2(\omega \times H_{\sharp}^1(Y))$ est immédiate. En décomposant $Y(m)$:

$$\begin{aligned} \int_{Y(m)} v_1(y) e^{i\eta_1 y} \overline{v_2(y) e^{i\eta_2 y}} dy &= \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{]-2^{m-1}+k, -2^{m-1}+k+1[} v_1(y) e^{i\eta_1 y} \overline{v_2(y) e^{i\eta_2 y}} dy \\ &= \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_Y v_1(-2^{m-1} + k + \frac{1}{2} + y) \overline{v_2(-2^{m-1} + k + \frac{1}{2} + y) e^{i(\eta_1 - \eta_2)(-2^{m-1} + k + \frac{1}{2} + y)}} dy. \end{aligned}$$

Comme v_1 et v_2 sont Y -périodiques :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2^m-1} \int_Y v_1(y + \frac{1}{2}) \overline{v_2(y + \frac{1}{2}) e^{i(\eta_1 - \eta_2)(-2^{m-1} + k + \frac{1}{2} + y)}} dy \\ &= \int_Y v_1(y + \frac{1}{2}) \overline{v_2(y + \frac{1}{2}) e^{i(\eta_1 - \eta_2)(-2^{m-1} + \frac{1}{2} + y)}} \sum_{k=0}^{2^m-1} e^{i(\eta_1 - \eta_2)k} dy. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} e^{i(\eta_1 - \eta_2)k} = 0 \text{ for } \eta_1 \neq \eta_2,$$

et

$$K_{j_1} \cap K_{j_2} = \emptyset \text{ si } j_1 \neq j_2,$$

on a finalement :

$$\int_{Y(m)} v_1(y) e^{i\eta_1 y} \overline{v_2(y) e^{i\eta_2 y}} dy = 0 \text{ si } \eta_1 \neq \eta_2 \text{ ou si } j_1 \neq j_2.$$

5.6 Démonstration de la proposition 1

Vu l'énoncé de cette proposition, on sous-entend la dépendance des fonctions en la variable z . En utilisant la définition de $v_{\sharp}^j(k, y)$,

$$v_{\sharp}^j(k, y) = \kappa_j^m \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y + r + \frac{1}{2}) e^{-i\eta(y+r+\frac{1}{2})} \text{ pour tout } k \in B^{\eta}.$$

Il reste à prouver que :

$$v(y) = \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B v_{\sharp}^j(k, y - \frac{1}{2}) e^{iE_j(k)y} dk.$$

On y introduit l'expression de $v_{\sharp}^j(k, y)$, et on utilise le fait que $\cup_{\eta \in K_j} B^{\eta} = B$:

$$\begin{aligned} v(y) &= \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \sum_{\eta \in K_j} \int_{B^{\eta}} \kappa_j^m \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) e^{-i\eta(y+r)} e^{iE_j(k)y} dk \\ &= (\kappa_0^m)^2 2\pi \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) + \sum_{1 \leq j \leq m} (\kappa_j^m)^2 \sum_{\eta \in K_j} \int_{B^{\eta}} \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) e^{-i\eta r} dk \\ &= 2^{-m} \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) + \sum_{1 \leq j \leq m} (\kappa_j^m)^2 2^{2-j} \pi \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) \sum_{\eta \in K_j} e^{-i\eta r} \\ &= 2^{-m} \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) + \sum_{1 \leq j \leq m} 2^{-m} \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) \sum_{\eta \in K_j} e^{-i\eta r} \\ &= 2^{-m} \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r) \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{\eta \in K_j} e^{-i\eta r}. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{\eta \in K_j} e^{-i\eta r} = 0 \text{ si } r \neq 0,$$

il reste

$$= 2^{-m} v(y) \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{\eta \in K_j} 1 = v(y) \cdot 2^{-m} \text{card}(\cup_{j=0}^m K^j) = v(y).$$

Ceci prouve la formule (5.23).

Par soucis de vérification, démontrons la réciproque. Soit $v(y)$ donnée par la formule

$$v(y) = \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B v_{\sharp}^j(k, y - \frac{1}{2}) e^{iE_j(k)y} dk$$

avec $v_{\sharp}^j(k, y)$ Y -périodique et constante sur chaque cellule B^{η} pour tout $\eta \in K_j$. Prouvons maintenant que

$$v_{\sharp}^j(k, y) = \kappa_j^m \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} v(y+r + \frac{1}{2}) e^{-i\eta(y+r+\frac{1}{2})} \text{ pour tout } k \in B^{\eta}.$$

Remplaçons l'expression de $v(y)$ dans celle de $v_{\sharp}^j(k, y)$:

$$\begin{aligned} v_{\sharp}^j(k, y) &= \kappa_j^m \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B v_{\sharp}^{j'}(k, y+r) e^{iE_{j'}(k)(y+r+\frac{1}{2})} dk e^{-i\eta(y+r+\frac{1}{2})} \\ &= \kappa_j^m \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \sum_{\mu \in K^{j'}} |B^{\mu}| v_{\sharp}^{j'}(\mu, y) e^{i\mu(y+r+\frac{1}{2})} e^{-i\eta(y+r+\frac{1}{2})} \\ &= \kappa_j^m \sum_{0 \leq j' \leq m} \frac{2\pi}{2^{j'-1}} \kappa_{j'}^m \sum_{\mu \in K^{j'}} v_{\sharp}^{j'}(\mu, y) e^{i(\mu-\eta)(y+\frac{1}{2})} \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} e^{i(\mu-\eta)r}. \end{aligned}$$

Mais $\sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} e^{i(\mu-\eta)r} = 0$ si $\mu \neq \eta$. Donc, il reste les termes tels que $\mu = \eta$, et comme $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$ quand $j \neq j'$, il reste :

$$\begin{aligned} &= (\kappa_j^m)^2 \frac{2\pi}{2^{j-1}} v_{\#}^j(\eta, y) \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} 1 \\ &= (\kappa_j^m)^2 2^{m-j+2} \pi v_{\#}^j(\eta, y) = v_{\#}^j(\eta, y). \end{aligned}$$

C'est bien l'égalité cherchée.

Démontrons l'unicité de la décomposition. Supposons qu'il y aient deux telles décompositions :

$$v(y) = \begin{cases} = \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B v_{\#1}^j(k, y - \frac{1}{2}) e^{iE_j(k)y} dk \\ = \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B v_{\#2}^j(k, y - \frac{1}{2}) e^{iE_j(k)y} dk \end{cases}$$

Pour tout j on pose $w_{\#}^j(k, y) = v_{\#1}^j(k, y) - v_{\#2}^j(k, y)$. Alors,

$$w(y) = \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B w_{\#}^j(k, y - \frac{1}{2}) e^{iE_j(k)y} dk = v(y) - v(y) = 0.$$

Donc, pour tout j ,

$$w_{\#}^j(k, y) = \kappa_j^m \sum_{r=-2^{m-1}}^{2^{m-1}-1} w(y + r + \frac{1}{2}) e^{-in(y+r+\frac{1}{2})} = 0 \text{ pour tout } k \in B^\eta \text{ et pour tout } y \in Y.$$

L'unicité de la décomposition est ainsi démontrée.

Ici, nous montrons que l'opérateur $v(y) \mapsto (v_{\#}^j(k, y))_{0 \leq j \leq m}$ est une isométrie de $L^2(Y(m))$ dans $(L^2_{\#}(B \times Y))^{m+1}$ ie que

$$\|v\|_{L^2(Y(m))}^2 = \sum_{j=0}^m \|v_{\#}^j\|_{L^2(B \times Y)}^2.$$

On suppose d'abord que $m \geq 1$. Comme

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(Y(m))}^2 &= \left\| \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B v_{\#}^j(k, y) e^{iE_j(k)y} dk \right\|_{L^2(Y(m))}^2, \\ &= \|\kappa_0^m 2\pi v_{\#}^0(0, y)\|_{L^2(Y(m))}^2 + \sum_{1 \leq j \leq m} \kappa_j^m \frac{2\pi}{2^{j-1}} \sum_{\eta \in K_j} \|v_{\#}^j(\eta, y) e^{i\eta y}\|_{L^2(Y(m))}^2, \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés d'orthogonalité,

$$\begin{aligned} &= (\kappa_0^m 2\pi)^2 \|v_{\#}^0\|_{L^2(Y(m))}^2 + \sum_{1 \leq j \leq m} \left(\kappa_j^m \frac{2\pi}{2^{j-1}} \right)^2 \sum_{\eta \in K_j} \|v_{\#}^j(\eta, y)\|_{L^2(Y(m))}^2, \\ &= (\kappa_0^m)^2 2^{m+1} \pi \|v_{\#}^0\|_{L^2(B \times Y)}^2 + \sum_{1 \leq j \leq m} (\kappa_j^m)^2 2^{m-j+2} \pi \int_B \|v_{\#}^j(k, y)\|_{L^2(Y)}^2 dk, \\ &= \|v_{\#}^0\|_{L^2(B \times Y)}^2 + \sum_{1 \leq j \leq m} \|v_{\#}^j\|_{L^2(B \times Y)}^2, \\ &= \sum_{0 \leq j \leq m} \|v_{\#}^j\|_{L^2(B \times Y)}^2. \end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat dans le cas $m \geq 1$. Pour $m = 0$:

$$\|v\|_{L^2(Y)}^2 = \|\kappa_0^0 v_{\#}^0\|_{L^2(Y)}^2,$$

donc

$$\|v\|_{L^2(Y)}^2 = (\kappa_0^0)^2 \|v_{\#}^0\|_{L^2(Y)}^2 = \int_B \|v_{\#}^0\|_{L^2(Y)}^2 dk = \|v_{\#}^0\|_{L^2(B \times Y)}^2.$$

Ceci prouve le résultat.

5.7 Démonstration de la proposition 3

On démontre tout d'abord l'existence des décompositions (5.27) et (5.28). Comme les familles $\psi_p^j(k, \cdot)$ et $\phi_p^j(k, \cdot)$ forment des bases complètes de $L^2(Y(m))$

$$\hat{p}(t, z, y) = c_0^*(t, z) \psi_0(y) + \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{k \in K_j} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} c_p^{*j}(k, t, z) \psi_p^j(k, y)$$

$$\hat{q}(t, z, y) = d_0^*(t, z) \phi_0(y) + \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{k \in K_j} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} d_p^{*j}(k, t, z) \phi_p^j(k, y).$$

En posant $c_0(t, z) = c_0^*(t, z)$, $c_p^j(k, t, z) = \frac{2^{j-1} c_p^{*j}(k, t, z)}{\kappa_j^m \pi}$, $d_0(t, z) = d_0^*(t, z)$ et $d_p^j(k, t, z) = \frac{2^{j-1} d_p^{*j}(k, t, z)}{\kappa_j^m \pi}$, on se ramène facilement aux deux formules (5.27) et (5.28). \square

Montrons maintenant que $\|\tilde{p}(s, z, \tau, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m))}^2 = 2^m \|p(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)}^2$. Comme

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}(t, z, y)\|_{L^2(Y(m))}^2 &= \int_{Y(m)} \tilde{p}(t, z, y) \tilde{p}(t, z, y) dy = c_0(t, z) c_0(t, z) \|\psi_0\|_{L^2(Y(m))}^2 \\ &+ 2 \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \int_{Y(m)} c_0(t, z) \psi_0(y) \left[\int_B c_p^j(k, t, z) \psi_p^j(k, y) dk \right] dy \\ &+ \sum_{0 \leq j_1, j_2 \leq m} \sum_{p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*} r_{j_1, j_2, p_1, p_2} \end{aligned}$$

avec

$$r_{j_1, j_2, p_1, p_2} = \int_{Y(m)} \left[\int_B \kappa_{j_1}^m c_{p_1}^{j_1}(k_1, t, z) \psi_{p_1}^{j_1}(k_1, y) dk_1 \right] \left[\int_B \kappa_{j_2}^m c_{p_2}^{j_2}(k_2, t, z) \psi_{p_2}^{j_2}(k_2, y) dk_2 \right] dy.$$

Or

$$\begin{aligned} &\int_{Y(m)} c_0(t, z) \psi_0(y) \left[\int_B c_p^j(k, t, z) \psi_p^j(k, y) dk \right] dy \\ &= \int_B c_0(t, z) c_p^j(k, t, z) \left[\int_{Y(m)} \psi_0(y) \psi_p^j(k, y) dy \right] dk \\ &= 0 \text{ car } \left[\int_{Y(m)} \psi_0(y) \psi_p^j(k, y) dy \right] = 0. \end{aligned}$$

De même $\int_{Y(m)} c_0(t, z) \psi_0(y) \left[\int_B c_p^j(k, t, z) \psi_p^j(k, y) dk \right] dy = 0$. Enfin,

$$\int_{Y(m)} \left[\int_B \kappa_{j_1}^m c_{p_1}^{j_1}(k_1, t, z) \psi_{p_1}^{j_1}(k_1, y) dk_1 \right] \left[\int_B \kappa_{j_2}^m c_{p_2}^{j_2}(k_2, t, z) \psi_{p_2}^{j_2}(k_2, y) dk_2 \right] dy \\ = \int_B \int_B \kappa_{j_1}^m c_{p_1}^{j_1}(k_1, t, z) \kappa_{j_2}^m c_{p_2}^{j_2}(k_2, t, z) \left[\int_{Y(m)} \psi_{p_1}^{j_1}(k_1, y) \psi_{p_2}^{j_2}(k_2, y) dy \right] dk_1 dk_2.$$

Or,

$$\int_{Y(m)} \psi_{p_1}^{j_1}(k_1, y) \psi_{p_2}^{j_2}(k_2, y) dy = 1 \text{ si } p_1 = p_2 \text{ et } j_1 = j_2 \text{ et } k_1, k_2 \in B^n \\ = 0 \text{ sinon.}$$

Ainsi,

$$\sum_{0 \leq j_1, j_2 \leq m} \sum_{p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*} r_{j_1, j_2, p_1, p_2} \\ = \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \sum_{\eta \in K_j} \int_{B^n} \int_{B^n} \kappa_j^m c_p^j(k_1, t, z) \kappa_j^m c_p^j(k_2, t, z) dk_1 dk_2 \\ = \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \sum_{\eta \in K_j} (\kappa_j^m)^2 \int_{B^n} |c_p^j(k_1, t, z)|^2 dk_1 \int_{B^n} dk_2 \\ = \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (\kappa_j^m)^2 \frac{\pi}{2^{j-2}} \sum_{\eta \in K_j} \int_{B^n} |c_p^j(k_1, t, z)|^2 dk_1 \\ = \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (\kappa_j^m)^2 \frac{\pi}{2^{j-2}} \|c_p^j(k, t, z)\|_{L^2(B)}^2.$$

Ainsi,

$$\|\widehat{p}(t, z, y)\|_{L^2(Y(m))}^2 = |c_0(t, z)|^2 + \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (\kappa_j^m)^2 \frac{\pi}{2^{j-2}} \|c_p^j(k, t, z)\|_{L^2(B)}^2.$$

De même, on montre que

$$\|\widetilde{p}(s, z, \tau, y)\|_{L^2(Y(m))}^2 = |\widetilde{c}_0(s, z, \tau)|^2 + \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (\kappa_j^m)^2 \frac{\pi}{2^{j-2}} \|\widetilde{c}_p^j(k, s, z, \tau)\|_{L^2(B)}^2.$$

Donc,

$$\|\widehat{p}(s, z, \tau, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times Y_i \times Y(m))}^2 = \|\widetilde{c}_0(s, z, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times Y_i)}^2 + \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (\kappa_j^m)^2 \frac{\pi}{2^{j-2}} \|\widetilde{c}_p^j(k, s, z, \tau)\|_{L^2(B \times \mathbb{R}^+ \times Y_i)}^2.$$

Or, pour chaque transformée à deux échelles par rapport à la variable de temps t et de coefficient α_j , on a

$$\|\widetilde{c}^j\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times Y_i)}^2 = \text{mes}(Y) \|c_j\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2.$$

Donc $\|c_j\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 = \|\widetilde{c}^j\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times Y_i)}^2$ et

$$\|\widehat{p}(s, z, \tau, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times Y_i \times Y(m))}^2 = \|c_0(s, z)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 + \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (\kappa_j^m)^2 \frac{\pi}{2^{j-2}} \|c_p^j(k, s, z)\|_{L^2(B \times \mathbb{R}^+)}^2.$$

Finalement,

$$\|\widehat{p}(s, z, \tau, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_i \times Y(m))}^2 = \|c_0(s, z)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)}^2 + \sum_{0 \leq j \leq m} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (\kappa_j^m)^2 \frac{\pi}{2^{j-2}} \|c_p^j(k, s, z)\|_{L^2(B \times \mathbb{R}^+ \times \omega)}^2 \\ \|\widehat{p}(t, z, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y(m))}^2 = \text{mes}(Y(m)) \|p(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)}^2 \\ = 2^m \|p(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)}^2.$$

Les mêmes développements valent pour q et ceci démontre bien la proposition 3.

5.8 Démonstration de la proposition 4

5.8.1 Equations à l'échelle microscopique (5.5-5.7)

Afin de démontrer que la limite (p, q) vérifie les équations (5.5-5.7), on a besoin des deux lemmes 8 et 9 suivants relatifs aux transformations à deux échelles spatiale et temporelle.

Lemmes 8 et 9

Lemme 8 : Soit $u(x) \in H^1(\omega)$, telles que $\int_{Y_i^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, -2^{m-1}) dz = o(\varepsilon)$ et $\int_{Y_n^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, -2^{m-1}) dz = o(\varepsilon)$ pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\omega \times Y(m))$ étant $Y(m)$ -périodique, la transformée à deux échelle $\widehat{u}(z, y)$ de la fonction $u(x)$ vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega \times \partial Y(m)} \widehat{u}(z, y) v(z, y) n_{Y(m)}(y) d\sigma(y) dz \\ = - \int_{\omega \times \partial Y(m)} \widehat{u}(z, y) y \partial_z v(z, y) d\sigma(y) dz + 2^m [\widehat{u}(z, y) v(z, y)]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}}$$

Démonstration du lemme 8 : En notant $Y_i^\varepsilon(m) =]2^m i \varepsilon, 2^m(i+1)\varepsilon[$ et $I^\varepsilon(m) = \{0, 1, \dots, 2^{N-m} - 1\}$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega \times \partial Y(m)} \widehat{u}(z, y) v(z, y) n_{Y(m)}(y) d\sigma(y) dz \\ = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega \times \partial Y(m)} \widehat{u}(z, y) v(z, y) d\sigma(y) dz \\ = \sum_{i \in I^\varepsilon(m)} \frac{1}{\varepsilon} \int_{Y_i^\varepsilon(m) \times \partial Y(m)} [\widehat{u}(z, y) v(z, y)]_{y=-2^{m-1}}^{y=2^{m-1}} dz \\ = \sum_{i \in I^\varepsilon(m)} \frac{1}{\varepsilon} \left[\widehat{u}(z, y) \int_{Y_i^\varepsilon(m)} v(z, y) dz \right]_{y=-2^{m-1}}^{y=2^{m-1}}.$$

On définit la moyenne $\bar{v}^\varepsilon(z, y) = \frac{1}{|Y_i^\varepsilon(m)|} \int_{Y_i^\varepsilon(m)} v(z', y) dz'$ pour tous $(i, y, z) \in I^\varepsilon(m) \times Y(m) \times Y_i^\varepsilon(m)$. On a alors

$$\sum_{i \in I^\varepsilon(m)} \frac{1}{\varepsilon} \left[\widehat{u}(z, y) \int_{Y_i^\varepsilon(m)} v(z, y) dz \right]_{y=-2^{m-1}}^{y=2^{m-1}} \\ = 2^m \sum_{i \in I^\varepsilon(m)} [\widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), y) \bar{v}^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), y)]_{y=-2^{m-1}}^{y=2^{m-1}}. \quad (5.35)$$

Pour simplifier, on note $n = 2^{N-m} - 1$, si bien que $I^\varepsilon(m) = \{0, 1, \dots, n\}$. En remarquant que

$$\widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) = \widehat{u}(x_{i+1}^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\},$$

et

$$\widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) = \widehat{u}(x_{i-1}^\varepsilon(m), 2^{m-1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

et en utilisant la $Y(m)$ -périodicité de v on développe (5.35) en

$$\begin{aligned} & 2^{m-1} \left[2 \sum_{i=0}^n \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) - \right. \\ & 2 \sum_{i=0}^n \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) = \\ & 2^{m-1} \left[\sum_{i=0}^n \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) + \right. \\ & \sum_{i=1}^n \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_{i-1}^\varepsilon(m), -2^{m-1}) - \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) - \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_{i+1}^\varepsilon(m), 2^{m-1}) + \\ & \widehat{u}(x_n^\varepsilon(m), 2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_n^\varepsilon(m), 2^{m-1}) - \\ & \left. \widehat{u}(x_0^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_0^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \right] = \\ & 2^{m-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) [\bar{v}^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) - \right. \\ & \left. \bar{v}^\varepsilon(x_{i+1}^\varepsilon(m), 2^{m-1})] - \sum_{i=1}^n \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) [\bar{v}^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) - \right. \\ & \left. \bar{v}^\varepsilon(x_{i-1}^\varepsilon(m), -2^{m-1})] + 2 \widehat{u}(x_n^\varepsilon(m), 2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_n^\varepsilon(m), 2^{m-1}) \right. \\ & \left. - 2 \widehat{u}(x_0^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \bar{v}^\varepsilon(x_0^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \right]. \end{aligned}$$

Si on définit $w^\varepsilon(z, y) = \frac{\bar{v}^\varepsilon(z + 2\varepsilon y, y) - \bar{v}^\varepsilon(z, y)}{2\varepsilon}$, cette dernière somme s'écrit également

$$\begin{aligned} & -2^m \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) w^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), 2^{m-1}) + \\ & 2^m \varepsilon \sum_{i=1}^n \widehat{u}(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) w^\varepsilon(x_i^\varepsilon(m), -2^{m-1}) \\ & + 2^m [\widehat{u}(z, y) \bar{v}^\varepsilon(z, y)]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}}. \end{aligned}$$

On sait que $\widehat{u}(z, y)$ est constante par rapport à z sur chaque cellule $Y_i^\varepsilon(m)$. Il en est de même pour $\bar{v}^\varepsilon(z, y)$ et donc pour $w^\varepsilon(z, \pm 2^{m-1})$. La somme précédente s'identifie alors avec

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{Y_i^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, 2^{m-1}) w^\varepsilon(z, 2^{m-1}) dz + \\ & \sum_{i=1}^n \int_{Y_i^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, -2^{m-1}) w^\varepsilon(z, -2^{m-1}) dz \\ & + 2^m [\widehat{u}(z, y) \bar{v}^\varepsilon(z, y)]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Or $w^\varepsilon(z, y) = \frac{\bar{v}^\varepsilon(z + 2\varepsilon y, y) - \bar{v}^\varepsilon(z, y)}{2\varepsilon} = y \partial_z \bar{v}^\varepsilon(z, y) + y h_1(\varepsilon) = y \partial_z v(z, y) + y h_2(\varepsilon)$ avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_1(\varepsilon)\|_{L^2(\omega \times Y(m))} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_2(\varepsilon)\|_{L^2(\omega \times Y(m))} = 0.$$

De même $\bar{v}^\varepsilon(z, y) = v(z, y) + h_3(\varepsilon)$ avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_3(\varepsilon)\|_{L^2(\omega \times Y(m))} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_{\omega \times \partial Y(m)} \widehat{u}(z, y) v(z, y) n_{Y(m)}(y) d\sigma(y) dz \\ & = - \int_{\omega \times \partial Y(m)} \widehat{u}(z, y) y \partial_z v(z, y) d\sigma(y) dz + \\ & 2^m [\widehat{u}(z, y) v(z, y)]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} + T, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} T = & \int_{Y_0^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, 2^{m-1}) 2^{m-1} \partial_z v(z, 2^{m-1}) dz - \\ & \int_{Y_0^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, -2^{m-1}) (-2^{m-1}) \partial_z v(z, -2^{m-1}) dz - \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \int_{Y_i^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, 2^{m-1}) 2^{m-1} h_2(\varepsilon) dz + \\ & \sum_{i=1}^n \int_{Y_i^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, -2^{m-1}) (-2^{m-1}) h_2(\varepsilon) dz \\ & + 2^m [\widehat{u}(z, y) h_3(\varepsilon)]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Comme $\int_{Y_0^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, -2^{m-1}) dz = o(\varepsilon)$ et $\int_{Y_n^\varepsilon(m)} \widehat{u}(z, -2^{m-1}) dz = o(\varepsilon)$ on en déduit que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T = 0$. Ceci termine la démonstration du lemme 8.

Lemme 9 : Soit $u(t) \in H^1(\mathbb{R})$, pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times Y_t)$ étant Y_t -périodique, $\widehat{u}^\alpha(s, \tau)$ la transformée à deux échelles de paramètre α de $u(t)$ vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y} \widehat{u}^\alpha(s, \tau) v(s, \tau) n_Y(\tau) d\sigma(\tau) ds \\ & = - \int_{\mathbb{R}^+} [\widehat{u}^\alpha(s, \tau) \tau \partial_s v(s, \tau)]_{\tau=-\frac{1}{2}}^{\tau=\frac{1}{2}} ds - \\ & [\widehat{u}^\alpha(s, \tau) v(s, \tau)] (s=0, \tau=-\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du précédent.

Obtention de (5.3-5.4)

On rappelle que la transformation à deux échelles pour les ondes $(\widetilde{p}^N, \widetilde{q}^N)$ vérifie l'équation du premier ordre :

$$\frac{1}{\varepsilon} M \partial_\tau \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\varepsilon} \partial_y \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_y (a^{\frac{1}{2}}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{f}^N \end{pmatrix}.$$

On multiplie cette égalité par $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ avec $v, w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \omega; H_{\#}^1(Y_t \times Y(m)))$ deux fonctions $Y_t \times Y(m)$ -périodiques puis on la multiplie par ε et enfin on l'intègre sur $Q = \mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m)$. Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(M \partial_\tau \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a^{\frac{1}{2}} \partial_y \\ \partial_y (a^{\frac{1}{2}}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ = \\ & \varepsilon \int_Q \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{f}^N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ. \end{aligned}$$

Comme f est bornée dans $L^2(\omega)$, le terme de droite tend vers 0 quand ε tend vers 0. En ce qui concerne le membre de gauche, il vaut, en appliquant la formule de Green,

$$\begin{aligned} & \int_Q - \left(M \left(\begin{array}{c} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{array} \right) \right) \cdot \partial_\tau \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) dQ + \\ & \int_Q \left(a^{\frac{1}{2}} \widetilde{p}^N \partial_y w + \widetilde{q}^N \partial_y (a^{\frac{1}{2}} v) \right) dQ \\ & + \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y(m) \times \partial Y_t} \left(M \left(\begin{array}{c} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{array} \right) \right) \cdot \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) n_\tau ds dz dy d\sigma(\tau) \\ & - \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times \partial Y(m)} a^{\frac{1}{2}} (\widetilde{p}^N w + \widetilde{q}^N v) n_y ds dz d\tau d\sigma(y). \end{aligned}$$

En utilisant la convergence faible dans L^2 de la sous-suite $(\widetilde{p}^N, \widetilde{q}^N)$ vers (p, q) , on peut faire tendre ε vers 0. La somme des deux premières intégrales précédentes tend alors vers

$$\int_Q \left[- \left(M \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) \right) \cdot \partial_\tau \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) + \left(a^{\frac{1}{2}} p \partial_y w + q \partial_y (a^{\frac{1}{2}} v) \right) \right] dQ.$$

Soient

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y(m) \times \partial Y_t} \left(M \left(\begin{array}{c} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{array} \right) \right) \cdot \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) n_\tau ds dz dy d\sigma(\tau) \\ X_2 &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times \partial Y(m)} a^{\frac{1}{2}} (\widetilde{p}^N w + \widetilde{q}^N v) n_y ds dz d\tau d\sigma(y). \end{aligned}$$

Calcul de X_1 : Pour simplifier, on note (p, q) le couple $(\widetilde{p}^N, \widetilde{q}^N)$. Il n'y aura pas de confusion possible avec le couple (p, q) qui représente la limite de $(\widetilde{p}^N, \widetilde{q}^N)$.

$$X_1 = \int_{\omega \times Y(m)} \left[\int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \left(M \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) \right) \cdot \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) n_\tau ds d\sigma(\tau) \right] dz dy.$$

En utilisant la décomposition (5.29) pour le couple (p, q) on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \left(M \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) \right) \cdot \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) n_\tau ds d\sigma(\tau) = \\ & \psi_0 \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_0 v n_\tau ds d\sigma(\tau) + \\ & \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{\alpha_p^j(k)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_p^j v n_\tau ds d\sigma(\tau) \right] \psi_p^j dk + \\ & \phi_0 \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_0 w n_\tau ds d\sigma(\tau) + \\ & \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{\alpha_p^j(k)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_p^j w n_\tau ds d\sigma(\tau) \right] \phi_p^j dk. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 9, chaque

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_p^j(k)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_p^j v n_\tau ds d\sigma(\tau) = \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_p^j \tau \partial_s v ds d\sigma(\tau) - \varepsilon [\widetilde{c}_p^j v] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

et chaque

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_p^j(k)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_p^j w n_\tau ds d\sigma(\tau) = \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_p^j \tau \partial_s w ds d\sigma(\tau) - \varepsilon [\widetilde{d}_p^j w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_0 v n_\tau ds d\sigma(\tau) = \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_0 \tau \partial_s v ds d\sigma(\tau) - \varepsilon [\widetilde{c}_0 v] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_0 w n_\tau ds d\sigma(\tau) = \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_0 \tau \partial_s w ds d\sigma(\tau) - \varepsilon [\widetilde{d}_0 w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \left(M \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) \right) \cdot \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) n_\tau ds d\sigma(\tau) = \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_0 \psi_0 \tau \partial_s v ds d\sigma(\tau) - \varepsilon [\widetilde{c}_0 \psi_0 v] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) \\ & -\varepsilon \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left[\int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{c}_p^j \tau \partial_s v ds d\sigma(\tau) + [\widetilde{c}_p^j v] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) \right] \psi_p^j dk \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_0 \phi_0 \tau \partial_s w ds d\sigma(\tau) - \varepsilon [\widetilde{d}_0 \phi_0 w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) \\ & -\varepsilon \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left[\int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \widetilde{d}_p^j \tau \partial_s w ds d\sigma(\tau) + [\widetilde{d}_p^j w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) \right] \phi_p^j dk. \end{aligned}$$

En rassemblant les différents facteurs de v et de w , cela vaut

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \left[\widetilde{c}_0 \psi_0 + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \widetilde{c}_p^j \psi_p^j dk \right] \tau \partial_s v ds d\sigma(\tau) \\ & -\varepsilon \left[\left(\widetilde{c}_0 \psi_0 + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \widetilde{c}_p^j \psi_p^j dk \right) v \right] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \left[\widetilde{d}_0 \phi_0 + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \widetilde{d}_p^j \phi_p^j dk \right] \tau \partial_s w ds d\sigma(\tau) \\ & -\varepsilon \left[\left(\widetilde{d}_0 \phi_0 + \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \widetilde{d}_p^j \phi_p^j dk \right) w \right] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

On identifie les décompositions de p et q .

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \left(M \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) \right) \cdot \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) n_\tau ds d\sigma(\tau) = \\ & -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) \cdot \tau \partial_s \left(\begin{array}{c} v \\ w \end{array} \right) n_\tau ds d\sigma(\tau) - \\ & \varepsilon [pv + qw] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Finalement

$$X_1 = -\varepsilon \int_{\omega \times Y(m)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \tau \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} n_\tau ds d\sigma(\tau) dz dy \\ - \varepsilon \int_{\omega \times Y(m)} [pv + qw] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy.$$

Calcul de X_2 : Par un calcul similaire, et en utilisant le lemme 8 à la place du lemme 9, on obtient :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times \partial Y(m)} a^{\frac{1}{2}} (\widetilde{p}^N w + \widetilde{q}^N v) n_y ds dz d\tau d\sigma(y) = \\ - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \int_{\omega \times \partial Y(m)} a^{\frac{1}{2}} (py \partial_z w + qy \partial_z v) n_y dz d\sigma(y) ds d\tau \\ + \varepsilon 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}} (pw + qv) \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau.$$

Les expressions de X_1 et de X_2 impliquent que ces intégrales tendent vers 0 quand ε tend vers 0. On a finalement

$$\int_Q \left[- \begin{pmatrix} M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \partial_\tau \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \left(a^{\frac{1}{2}} p \partial_y w + q \partial_y (a^{\frac{1}{2}} v) \right) \right] dQ = 0,$$

pour tous $v, w \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^+ \times \omega}; H^1(Y_t \times Y(m)))$ fonctions $Y_t \times Y(m)$ -périodiques. L'interprétation de cette formulation variationnelle implique que d'une part (p, q) est solution de (5.3) et d'autre part qu'il est $Y_t \times Y(m)$ -périodique (ici, il s'agit bien du couple limite (p, q) et non du couple qui représente $(\widetilde{p}^N, \widetilde{q}^N)$). Ceci achève la démonstration de la proposition 4.

5.8.2 Obtention de (5.5), (5.6) et (5.7).

Passage à la limite dans la formulation variationnelle Soit $(v, w) \in (\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^+ \times \omega}; L^2(Y_t \times Y(m)))$ solution quelconque de (5.3) et (5.4). En reprenant le calcul mené pour la construction des équations (5.3) et (5.4) vérifiées par (p, q) , on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(M \partial_\tau \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a^{\frac{1}{2}} \partial_y \\ \partial_y (a^{\frac{1}{2}} \cdot) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ = \\ \frac{1}{\varepsilon} X_1 - \frac{1}{\varepsilon} X_2 = - \int_{\omega \times Y(m)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} \cdot \tau \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} n_\tau ds d\sigma(\tau) dz dy \\ + \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \int_{\omega \times \partial Y(m)} a^{\frac{1}{2}} (\widetilde{p}^N y \partial_z w + \widetilde{q}^N y \partial_z v) n_y dz d\sigma(y) ds d\tau \\ - \int_{\omega \times Y(m)} [\widetilde{p}^N v + \widetilde{q}^N w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy \\ - 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}} (\widetilde{p}^N w + \widetilde{q}^N v) \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau.$$

Or, modulo l'extraction d'une sous suite, $(\widetilde{p}^N, \widetilde{q}^N)$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m))$ vers (p, q) et $(\widetilde{p}^N, \widetilde{q}^N)(s=0, \tau = -\frac{1}{2})$ converge faiblement vers (h_0, h_1) dans $L^2(\omega \times Y(m))$. De plus, les conditions aux limites (5.2) impliquent que $\widetilde{q}^N(s, z, \tau, y) = 0$ pour $(z, y) \in \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\}$.

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(M \partial_\tau \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a^{\frac{1}{2}} \partial_y \\ \partial_y (a^{\frac{1}{2}} \cdot) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^N \\ \widetilde{q}^N \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ \\ = \int_Q \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{f}^N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ,$$

et la convergence faible dans $L^2(\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y_t \times Y(m))$ de $\begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{f}^N \end{pmatrix}$ vers $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ nous permet de conclure que (p, q) est solution de :

$$- \int_{\omega \times Y(m)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \tau \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} n_\tau ds d\sigma(\tau) dz dy \\ + \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \int_{\omega \times \partial Y(m)} a^{\frac{1}{2}} (py \partial_z w + qy \partial_z v) n_y dz d\sigma(y) ds d\tau \\ - \int_{\omega \times Y(m)} [h_0 v + h_1 w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy \\ - 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}} p w \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau = \int_Q f w dQ. \quad (5.36)$$

Interprétation de (5.36) Après être passé à la limite dans la formulation variationnelle, il reste à interpréter la formulation variationnelle limite. En appliquant la formule de Green :

$$- \int_{\omega \times Y(m)} \int_{\mathbb{R}^+ \times \partial Y_t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \tau \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} n_\tau ds d\sigma(\tau) dz dy \\ + \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \int_{\omega \times \partial Y(m)} a^{\frac{1}{2}} (py \partial_z w + qy \partial_z v) n_y dz d\sigma(y) ds d\tau \\ = - \int_Q \partial_\tau \left(\tau \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) - \partial_y \left(a^{\frac{1}{2}} y (p \partial_z w + q \partial_z v) \right) dQ.$$

Or

$$\int_Q \partial_\tau \left(\tau \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) dQ = \int_Q \partial_\tau \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot (\tau \partial_s + M y \partial_z) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right) dQ.$$

En effet, le terme supplémentaire est

$$\int_Q \partial_\tau \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot M y \partial_z \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right) dQ = \\ \int_{\mathbb{R}^+ \times \omega \times Y(m)} \int_{\partial Y_t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot M y \partial_z \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} n_{Y_t}(\tau) d\sigma(\tau) ds dz dy$$

et

$$\int_{\partial Y_t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot M y \partial_z \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} n_{Y_t}(\tau) d\sigma(\tau) = 0,$$

car les couples (p, q) , (v, w) , et la variable y sont Y_t -périodiques. De même,

$$\int_Q \partial_y (a^{\frac{1}{2}} y (p \partial_z w + q \partial_z v)) dQ = \int_Q \partial_y \left(a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot (y \partial_z + M^{-1} \tau \partial_s) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \right) dQ.$$

Donc

$$\begin{aligned} & - \int_Q \partial_\tau \left(\tau \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) - \partial_y (a^{\frac{1}{2}} y (p \partial_z w + q \partial_z v)) dQ = \\ & - \int_Q \partial_\tau \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot (\tau \partial_s + M y \partial_z) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right) \\ & - \partial_y \left(a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot (y \partial_z + M^{-1} \tau \partial_s) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \right) dQ, \end{aligned}$$

que nous développons en

$$\begin{aligned} & - \int_Q M \partial_\tau \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot (M^{-1} \tau \partial_s + y \partial_z) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right) dQ \\ & + \int_Q \partial_y \left(a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot y \partial_z \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \right) dQ \\ & + \int_Q \partial_y \left(a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot M^{-1} \tau \partial_s \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \right) dQ. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Etudions

$$\begin{aligned} & \partial_y (a^{\frac{1}{2}} y (p \partial_z w + q \partial_z v)) = a^{\frac{1}{2}} (p \partial_z w + q \partial_z v) \\ & + y \left((\partial_z w) \partial_y (a^{\frac{1}{2}} p) + a^{\frac{1}{2}} (\partial_y q) \partial_z v + p \partial_z (a^{\frac{1}{2}} \partial_y w) + q \partial_z (\partial_y (a^{\frac{1}{2}} v)) \right) = \\ & a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} + \\ & y \left(\begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

où D_y représente l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & a^{\frac{1}{2}} \partial_y \\ \partial_y (a^{\frac{1}{2}}) & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\partial_y (a^{\frac{1}{2}} (p \partial_z w + q \partial_z v)) = \begin{pmatrix} \partial_s v \\ \partial_s w \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} \partial_s v \\ \partial_s w \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (5.37) & = - \int_Q M \partial_\tau \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot (M^{-1} \tau \partial_s + y \partial_z) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right) dQ \\ & + \int_Q y \left(\begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} \right) dQ \\ & \quad + \int_Q a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} dQ \\ & + \int_Q M^{-1} \tau \left(\begin{pmatrix} \partial_s v \\ \partial_s w \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot D_y \begin{pmatrix} \partial_s v \\ \partial_s w \end{pmatrix} \right) dQ. \end{aligned}$$

Ceci s'identifie avec

$$\begin{aligned} & - \int_Q \left(M \partial_\tau \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - D_y \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) \cdot (y \partial_z + M^{-1} \tau \partial_s) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ \\ & - \int_Q (y \partial_z + M^{-1} \tau \partial_s) \left(M \partial_\tau \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} - D_y \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} dQ \\ & + \int_Q a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} dQ - \int_Q \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ. \end{aligned}$$

Or $M \partial_\tau \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - D_y \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = M \partial_\tau \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} - D_y \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$ car (p, q) et (v, w) sont solutions de (5.3). Il reste donc

$$\int_Q a^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_z v \\ \partial_z w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \partial_s \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ.$$

C'est à dire, après application de la formule de Green

$$\int_Q (v, w) \begin{pmatrix} \partial_s & -a^{\frac{1}{2}} \partial_z \\ -a^{\frac{1}{2}} \partial_z & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} dQ - \int_{\partial Q} (v, w) \begin{pmatrix} n_s & -a^{\frac{1}{2}} n_z \\ -a^{\frac{1}{2}} n_z & n_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} d\sigma(Q).$$

Dans la formule ci-dessus on a "contracté" l'écriture c'est-à-dire que

$$n_s d\sigma(Q) = n_s dz dy d\tau d\sigma(s), \quad n_z d\sigma(Q) = n_z ds dy d\tau d\sigma(z),$$

et dans chaque cas, ∂Q s'en déduit. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_Q (v, w) \begin{pmatrix} \partial_s & -a^{\frac{1}{2}} \partial_z \\ -a^{\frac{1}{2}} \partial_z & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} dQ \\ & - \int_{\partial Q} (v, w) \begin{pmatrix} n_s & -a^{\frac{1}{2}} n_z \\ -a^{\frac{1}{2}} n_z & n_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} d\sigma(Q) \\ & - \int_{\omega \times Y(m)} [h_0 v + h_1 w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy \\ & - 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} [a^{\frac{1}{2}} p w]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau = \int_Q f w dQ, \end{aligned} \quad (5.38)$$

pour tout (v, w) solution de (5.5) et (5.4).

Nous allons détailler $\int_{\partial Q}$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial Q} (v, w) \begin{pmatrix} n_s & -a^{\frac{1}{2}} n_z \\ -a^{\frac{1}{2}} n_z & n_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} d\sigma(Q) \\ & = \int_{\omega \times Y_t \times Y(m)} (v, w) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (s=0) dz d\tau dy \\ & + \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t \times Y(m)} [a^{\frac{1}{2}} (p w + q v)]_{z=0}^{z=1} ds d\tau dy \end{aligned}$$

Pour la suite, nous avons besoin du

Lemme 10 : Pour tous $y_1, y_2 \in Y(m)$ tels que $y_1 \leq y_2$: $\int_{Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{y=y_1}^{y=y_2} d\tau = 0$.

Démonstration du lemme 10 : Comme (p, q) est solution de (5.3) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Y_t \times]y_1, y_2[} (v, w)(M\partial_\tau - D_y) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} d\tau dy \\ &= \int_{Y_t \times]y_1, y_2[} \partial_\tau \left((v, w) M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) d\tau dy - \int_{Y_t \times]y_1, y_2[} (p, q) M \partial_\tau \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \\ &\quad - \int_{Y_t \times]y_1, y_2[} \partial_y (a^{\frac{1}{2}}(pw + qv)) d\tau dy + \int_{Y_t \times]y_1, y_2[} q \partial_y (va^{\frac{1}{2}}) + pa^{\frac{1}{2}} \partial_y (w) d\tau dy \\ &= - \int_{Y_t \times]y_1, y_2[} (p, q)(M\partial_\tau - D_y) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} d\tau dy \\ &\quad + \int_{]y_1, y_2[} \left[(v, w) M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right]_{\tau=-\frac{1}{2}}^{\tau=\frac{1}{2}} dy - \int_{Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{y=y_1}^{y=y_2} d\tau = \\ &\quad - \int_{Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{y=y_1}^{y=y_2} d\tau, \end{aligned}$$

car $-\int_{Y_t \times]y_1, y_2[} (p, q)(M\partial_\tau - D_y) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} d\tau dy = 0$ puisque (v, w) étant solution de (5.3), et $[(v, w) \cdot M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}]_{\tau=-\frac{1}{2}}^{\tau=\frac{1}{2}} = 0$, puisque v, w, p, q sont Y_t -périodiques. Ce qui démontre le lemme 10.

Ceci nous permet d'affirmer

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t \times Y(m)} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{z=0}^{z=1} ds d\tau dy = 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau.$$

En effet, la différence de ces deux termes vaut

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t \times Y(m)} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{z=0}^{z=1} - \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau dy = \\ &- \int_{\mathbb{R}^+ \times Y(m)} \left[\int_{Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv)(z=0) \right]_{y=-2^{m-1}}^y + \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv)(z=1) \right]_y^{y=2^{m-1}} d\tau \right] ds dy = 0, \end{aligned}$$

d'après le lemme 10.

La même méthode, basée sur un équivalent du lemme 10 en version "temporelle", conduit à :

$$\int_{\omega \times Y_t \times Y(m)} (v, w) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (s=0) dz d\tau dy = \int_{\omega \times Y(m)} (v, w) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy.$$

La formulation variationnelle (5.38) se simplifie donc en :

$$\begin{aligned} &\int_Q (v, w) \begin{pmatrix} \partial_s & -a^{\frac{1}{2}}\partial_z \\ -a^{\frac{1}{2}}\partial_z & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} dQ \\ &+ 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}(pw + qv) \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau \\ &+ \int_{\omega \times Y(m)} (v, w) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy \\ &- \int_{\omega \times Y(m)} [h_0 v + h_1 w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy \\ &- 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}pw \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau = \int_Q f w dQ, \end{aligned}$$

pour tout (v, w) solution de (5.3) et (5.4). C'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\int_Q (v, w) \begin{pmatrix} \partial_s & -a^{\frac{1}{2}}\partial_z \\ -a^{\frac{1}{2}}\partial_z & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} dQ + 2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}qv \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau \\ &+ \int_{\omega \times Y(m)} [(p - h_0)v + (q - h_1)w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy = \int_Q f w dQ, \end{aligned} \quad (5.39)$$

pour tout (v, w) solution de (5.3) et (5.4). Considérons un couple (v, w) ne dépendant que des variables τ et y solution de (5.3) et (5.4) et définissons $(v^*, w^*)(s, z, \tau, y) = \Phi(s, z)(v, w)(\tau, y)$, avec $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ quelconque. Il s'en suit que (v^*, w^*) est solution de (5.5) et (5.4), et dans ce cas, (5.39) se réduit à

$$\int_Q (v^*, w^*) \begin{pmatrix} \partial_s & -a^{\frac{1}{2}}\partial_z \\ -a^{\frac{1}{2}}\partial_z & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} dQ = \int_Q f w^* dQ.$$

Plus précisément

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \omega} \Phi(s, z) \left[\int_{Y_t \times Y(m)} (v, w) \begin{pmatrix} \partial_s & -a^{\frac{1}{2}}\partial_z \\ -a^{\frac{1}{2}}\partial_z & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - f w d\tau dy \right] ds dz = 0.$$

Cette égalité est valable pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ donc

$$\int_{Y_t \times Y(m)} (v, w) \begin{pmatrix} \partial_s & -a^{\frac{1}{2}}\partial_z \\ -a^{\frac{1}{2}}\partial_z & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} d\tau dy = \int_{Y_t \times Y(m)} f w d\tau dy,$$

pour tout (v, w) solution de (5.3) et (5.4). Nous venons de démontrer (5.5). Sachant cela, la formulation variationnelle limite devient

$$2^m \int_{\mathbb{R}^+ \times Y_t} \left[a^{\frac{1}{2}}qv \right]_{z=0, y=-2^{m-1}}^{z=1, y=2^{m-1}} ds d\tau + \int_{\omega \times Y(m)} [(p - h_0)v + (q - h_1)w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy = 0,$$

pour tout (v, w) solution de (5.5) et (5.4). Cette fois-ci, on choisit $\Phi \in \mathcal{D}(\omega; L^2(\mathbb{R}^+))$ quelconque, donc tel que $\Phi(z=0, s) = \Phi(z=1, s) = 0$. Alors

$$\int_{\omega \times Y(m)} [(p - h_0)v^* + (q - h_1)w^*] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dz dy = 0,$$

c'est à dire que pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\omega; L^2(\mathbb{R}^+))$:

$$\int_{\omega} \Phi(z, s=0) \left[\int_{Y(m)} [(p-h_0)v + (q-h_1)w] (s=0, \tau = -\frac{1}{2}) dy \right] dz = 0.$$

Donc $\int_{Y(m)} (p-h_0)v + (q-h_1)w dy = 0$ en $(s, z, \tau) \in \{0\} \times \omega \times \{-\frac{1}{2}\}$, pour tout (v, w) solution de (5.3) et (5.4). Nous venons de démontrer (5.7). La démonstration de (5.6) est similaire. Ceci clôt la démonstration de la proposition 4.

5.9 Démonstration de la proposition 5

5.9.1 Caractérisation des solutions de (5.3-5.4)

On commence par montrer que la solution (p, q) peut être décomposée sur les ondes de Bloch sous la forme (5.8). Soit (p, q) la solution du système d'équations :

$$M \partial_{\tau} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a^{1/2} \partial_y \\ \partial_y(a^{1/2} \cdot) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On décompose (p, q) sur la base des $(\psi_0(\cdot), 0)$, $(\psi_p^j(k, \cdot), 0)_{j=0, \dots, m, k \in K_j, p \in \mathbb{N}^*}$, $(0, \phi_0(\cdot))$, et $(0, \phi_p^j(k, \cdot))_{j=0, \dots, m, k \in K_j, p \in \mathbb{N}^*}$:

$$p(s, z, \tau, y) = A_0(s, z, \tau) \psi_0(y) + \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} A_{p'}^{j'}(k', s, z, \tau) \psi_{p'}^{j'}(k', y) dk'$$

$$q(s, z, \tau, y) = B_0(s, z, \tau) \phi_0(y) + \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} B_{p'}^{j'}(k', s, z, \tau) \phi_{p'}^{j'}(k', y) dk'.$$

Comme $\alpha_p^j(k) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_p^j(k)}}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$, en multipliant la première équation par $\psi_p^j(k, \cdot)$ et la seconde par $\phi_p^j(k, \cdot)$ et en les intégrant sur $Y(m)$:

$$\partial_{\tau} A_0(s, z, \tau) \int_{Y(m)} \psi_0(y) \psi_p^j(k, y) dy +$$

$$\sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{\mu_{p'}^{j'}}}{2\pi} \partial_{\tau} A_{p'}^{j'}(k', s, z, \tau) \int_{Y(m)} \psi_{p'}^{j'}(k', y) \psi_p^j(k, y) dy dk'$$

$$- \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \sqrt{\mu_{p'}^{j'}} B_{p'}^{j'}(k', s, z, \tau) \int_{Y(m)} a^{1/2} \psi_{p'}^{j'}(k', y) \psi_p^j(k, y) dy dk' = 0,$$

et

$$\partial_{\tau} B_0(s, z, \tau) \int_{Y(m)} \phi_0(y) \phi_p^j(k, y) dy +$$

$$\sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{\mu_{p'}^{j'}}}{2\pi} \partial_{\tau} B_{p'}^{j'}(k', s, z, \tau) \int_{Y(m)} \phi_{p'}^{j'}(k', y) \phi_p^j(k, y) dy dk' -$$

$$A_0(s, z, \tau) \int_{Y(m)} \partial_y(a^{1/2} \psi_0(y)) \phi_p^j(k, y) dy -$$

$$\sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \sqrt{\mu_{p'}^{j'}} A_{p'}^{j'}(k', s, z, \tau) \int_{Y(m)} \phi_{p'}^{j'}(k', y) \phi_p^j(k, y) dy dk' = 0.$$

Dans la suite, on utilise les relations entre $\phi_p^j(k, \cdot)$ et $\psi_p^j(k, \cdot)$, les relations d'orthogonalité et le fait que $\|\phi_p^j(k, \cdot)\|_{L^2(Y(m))}^2 = 1$ et $\|\psi_p^j(k, \cdot)\|_{L^2(Y(m))}^2 = 1$ pour $j \in \{0, \dots, m\}$, $k \in K_j$ et $p \in \mathbb{N}$. Pour $p = 0$, dans ce cas $\phi_0^j(k, \cdot) = \phi_0(\cdot)$ et $\psi_0^j(k, \cdot) = \psi_0(\cdot)$ quelque soit j et k , il vient :

$$\partial_{\tau} A_0 = 0 \text{ et } \partial_{\tau} B_0 = 0.$$

Pour $p \neq 0$, $j \in \{0, \dots, m\}$ et $k \in K_j$:

$$\frac{\sqrt{\mu_p^j(k, \cdot)}}{2\pi} \partial_{\tau} A_p^j(k, \cdot) - \sqrt{\mu_p^j(k, \cdot)} B_p^j(k, \cdot) = 0$$

$$\text{et } \frac{\sqrt{\mu_p^j(k, \cdot)}}{2\pi} \partial_{\tau} B_p^j(k, \cdot) + \sqrt{\mu_p^j(k, \cdot)} A_p^j(k, \cdot) = 0,$$

donc $\partial_{\tau} A_p^j(k, \cdot) - 2\pi B_p^j(k, \cdot) = 0$ et $\partial_{\tau} B_p^j(k, \cdot) + 2\pi A_p^j(k, \cdot) = 0$. De façon équivalente :

$$\partial_{\tau\tau}^2 A_p^j(k, \cdot) + (2\pi)^2 A_p^j(k, \cdot) = 0 \text{ et } B_p^j(k, \cdot) = \frac{1}{2\pi} \partial_{\tau} A_p^j(k, \cdot),$$

c'est à dire que :

$$A_p^j(k, s, z, \tau) = C_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau),$$

et

$$B_p^j(k, s, z, \tau) = -C_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau).$$

En conséquence :

$$p(s, z, \tau, y) = A_0(s, z) \psi_0(y) +$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (C_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau)) \psi_p^j(k, y) dk$$

$$q(s, z, \tau, y) = B_0(s, z) \phi_0(y) +$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-C_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau)) \phi_p^j(k, y) dk.$$

Ce qui démontre (5.8).

Remarque : L'ensemble des solutions (p, q) est engendré par les vecteurs (non normés) orthogonaux pour le produit scalaire de $L^2(Y_t \times Y(m))$:

$$\begin{pmatrix} \psi_0(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) \\ -\sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sin(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) \\ \cos(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) \end{pmatrix}.$$

5.9.2 Interprétation de la formulation variationnelle (5.5-5.6)

On établit successivement les équations à l'intérieur, les conditions initiales et les conditions aux limites vérifiées par les coefficients A_0 , B_0 , $C_p^j(k, \cdot)$ et $D_p^j(k, \cdot)$.

Les équations à l'intérieur

On utilise maintenant le fait que (p, q) est solution de

$$\int_{Y_i \times Y} (\partial_s p - a^{1/2} \partial_z q) v + (\partial_s q - \partial_z(a^{1/2} p)) w d\tau dy = \int_{Y_i \times Y} f w d\tau dy$$

pour tout (v, w) solution de

$$M \partial_\tau \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a^{1/2} \partial_y \\ \partial_y(a^{1/2} \cdot) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remplace successivement le couple (v, w) par l'un des vecteurs cités à la remarque ci-dessus.

$$\text{Posons } (v, w) = \begin{pmatrix} \psi_0(y) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\int_{Y_i \times Y(m)} (\partial_s p(s, z, \tau, y) - a^{1/2}(y) \partial_z q(s, z, \tau, y)) \psi_0(y) d\tau dy = 0,$$

i.e

$$\partial_s \int_{Y_i \times Y(m)} p(s, z, \tau, y) \psi_0(y) d\tau dy - \int_{Y_i \times Y(m)} \psi_0(y) a^{1/2}(y) \partial_z q(s, z, \tau, y) d\tau dy = 0.$$

En utilisant l'expression de p

$$\begin{aligned} \partial_s \int_{Y_i \times Y(m)} p(s, z, \tau, y) \psi_0(y) d\tau dy &= \partial_s A_0(s, z) \int_{Y_i \times Y(m)} \psi_0^2(y) d\tau dy \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \partial_s C_p^j(k, s, z) \int_{Y_i \times Y(m)} \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) \psi_0(y) d\tau dy dk \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \partial_s D_p^j(k, s, z) \int_{Y_i \times Y(m)} \sin(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) \psi_0(y) d\tau dy dk \end{aligned}$$

en utilisant les relations d'orthonormalité des $\psi_p^j(k, \cdot)$, il reste $\partial_s A_0(s, z)$.

D'autre part, en utilisant l'expression de q

$$- \int_{Y_i \times Y(m)} \psi_0(y) a^{1/2}(y) \partial_z q(s, z, \tau, y) d\tau dy = -\partial_z B_0(s, z) \int_{Y_i \times Y(m)} a^{1/2}(y) \psi_0(y) \phi_0(y) d\tau dy$$

$$- \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} -\partial_z C_p^j(k, s, z) \int_{Y_i \times Y(m)} \psi_0(y) a^{1/2}(y) \sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy dk$$

$$- \sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \partial_z D_p^j(k, s, z) \int_{Y_i \times Y(m)} \psi_0(y) a^{1/2}(y) \cos(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy dk$$

utilisant le fait que $\int_{Y_i} \cos(2\pi\tau) d\tau = \int_{Y_i} \sin(2\pi\tau) d\tau = 0$, il reste $-b^{1/2} \partial_z B_0(s, z)$.
En sommant les deux termes

$$\partial_s A_0(s, z) - b^{1/2} \partial_z B_0(s, z) = 0.$$

Posons $(v, w) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0(y) \end{pmatrix}$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{Y_i \times Y(m)} (\partial_s q(s, z, \tau, y) - \partial_z(a^{1/2}(y) p(s, z, \tau, y))) \phi_0(y) d\tau dy = \\ \int_{Y_i \times Y(m)} f(s, z, \tau, y) \phi_0(y) d\tau dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_s \int_{Y_i \times Y(m)} q(s, z, \tau, y) \phi_0(y) d\tau dy - \partial_z \int_{Y_i \times Y(m)} a^{1/2}(y) p(s, z, \tau, y) \phi_0(y) d\tau dy = \\ \int_{Y_i \times Y(m)} f(s, z, \tau, y) \phi_0(y) d\tau dy \end{aligned}$$

en utilisant la décomposition de (p, q) on en déduit que :

$$\partial_s B_0(s, z) - b^{1/2} \partial_z A_0(s, z) = f^0(s, z).$$

Posons $(v, w) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) \\ -\sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \int_{Y_i \times Y(m)} (\partial_s p - a^{1/2} \partial_z q) \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) - (\partial_s q - \partial_z(a^{1/2} p)) \sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy \\ = - \int_{Y_i \times Y(m)} f(s, z, \tau, y) \sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy, \end{aligned}$$

en remplaçant p et q par leur expression :

$$\sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \int_{Y_i \times Y(m)} \left(\begin{aligned} &(\partial_s C_{p'}^{j'}(k', \cdot) \cos(2\pi\tau) \psi_{p'}^{j'}(k', y) - \\ &a^{1/2} \partial_z D_{p'}^{j'}(k', \cdot) \cos(2\pi\tau) \phi_{p'}^{j'}(k', y)) \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) \end{aligned} \right) d\tau dy dk$$

$$- \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \int_{Y_i \times Y(m)} \left(\begin{aligned} &(-\partial_s C_{p'}^{j'}(k', \cdot) \sin(2\pi\tau) \phi_{p'}^{j'}(k', y) - \\ &\partial_z D_{p'}^{j'}(k', \cdot) \sin(2\pi\tau) a^{1/2} \psi_{p'}^{j'}(k', y)) \sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) \end{aligned} \right) d\tau dy dk$$

$$= - \int_{Y_i \times Y} f(s, z, \tau, y) \sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy,$$

utilisant les relations d'orthogonalité entre les $\cos(2\pi\tau)$ et $\sin(2\pi\tau)$:

$$\partial_s C_p^j(k, s, z) +$$

$$\sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \int_{Y(m)} \frac{a^{1/2}(y)}{2} (\psi_{p'}^{j'}(k', y) \phi_p^j(k, y) - \phi_{p'}^{j'}(k', y) \psi_p^j(k, y)) dy \partial_z D_{p'}^{j'}(k', s, z) dk'$$

$$= - \int_{Y_i \times Y(m)} f(s, z, \tau, y) \sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy.$$

C'est à dire :

$$\partial_s C_p^j(k, s, z) + \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \int_{Y(m)} J_{pp'}^{jj'}(k, k') \partial_z D_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' =$$

$$- \int_{Y_i \times Y(m)} f(s, z, \tau, y) \sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy.$$

Enfin, posons $(v, w) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi\tau) \psi_p(y) \\ \cos(2\pi\tau) \phi_p(y) \end{pmatrix}$, par un calcul similaire, il vient

$$\partial_s D_p^j(k, s, z) - \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \int_{Y(m)} J_{pp'}^{jj'}(k, k') \partial_z C_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' =$$

$$- \int_{Y_i \times Y(m)} f(s, z, \tau, y) \cos(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y) d\tau dy.$$

Ce qui prouve (5.9) et (5.12).

Les conditions initiales

Les conditions initiales vérifiées par les fonctions A_0 , B_0 , C_p^j et D_p^j sont interprétées à l'aide de l'équation

$$\int_{Y(m)} (p - h_0)v + (q - h_1)w dy = 0 \text{ en } (s, z, \tau) \in \{0\} \times \omega \times \{-\frac{1}{2}\},$$

et des décompositions (5.8) de (p, q) et de (v, w) .

Posons $(v, w) = (\psi_0(y), 0)$

$$\int_{Y(m)} p \psi_0 dy = \int_{Y(m)} h_0 \psi_0 dy \text{ en } (s, \tau) = (0, -1/2),$$

et en utilisant la décomposition (5.8) et les relations d'orthogonalité il reste

$$A_0(0, z) = \int_{Y(m)} h_0(z, y) \psi_0(y) dy \forall z \in \omega.$$

Posons $(v, w) = (0, \phi_0(y))$, on en déduit

$$B_0(0, z) = \int_{Y(m)} h_1(z, y) dy.$$

Posons $(v, w) = (\cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y), -\sin(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y))$, on obtient :

$$C_p^j(k, 0, z) = - \int_{Y(m)} h_0(z, y) \psi_p^j(k, y) dy \forall z \in \omega.$$

Posons $(v, w) = (\sin(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y), \cos(2\pi\tau) \phi_p^j(k, y))$:

$$D_p^j(k, 0, z) = - \int_{Y(m)} h_1(s, y) \phi_p^j(k, y) dy \forall z \in \omega.$$

Ce sont les conditions (5.11) et (5.13).

Les conditions aux limites (5.10) et (5.14)

Dans ce paragraphe, on déduit des conditions aux limites vérifiées par les fonctions A_0 , B_0 , C_p^j et D_p^j qui se déduisent de (5.6). Pour cela, on utilise le fait que

$$\int_{Y_i} a^{\frac{1}{2}} q v d\tau = 0 \text{ en } (s, z, y) \in \mathbb{R}^+ \times \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\},$$

pour tout (v, w) solution de (5.3) et (5.4).

En choisissant $(v, w) = (\psi_0(y), 0)$, il vient

$$\int_{Y_i} a^{\frac{1}{2}}(y) B_0(s, z) \phi_0(y) +$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-C_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau)) \phi_p^j(k, y) dk \psi_0(y) d\tau = 0.$$

Du fait que $\int_{Y_i} \sin(2\pi\tau) d\tau = \int_{Y_i} \cos(2\pi\tau) d\tau = 0$, il reste $a^{\frac{1}{2}}(y) \phi_0(y) B_0(s, z) = 0$ en $(s, z, y) \in \mathbb{R}^+ \times \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\}$ donc $B_0(s, 0) = B_0(s, 1) = 0$.

En choisissant $(v, w) = (\cos(2\pi\tau)\psi_p^j(k, y), -\sin(2\pi\tau)\phi_p^j(k, y))$, on trouve

$$\int_{Y_t} a^{\frac{1}{2}}(y) B_0(s, z) \phi_0(y) \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) d\tau -$$

$$\int_{Y_t} a^{\frac{1}{2}}(y) \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} C_{p'}^{j'}(k', s, z) \sin(2\pi\tau) \phi_{p'}^{j'}(k', y) dk' \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) d\tau +$$

$$\int_{Y_t} a^{\frac{1}{2}}(y) \sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} D_{p'}^{j'}(k', s, z) \cos(2\pi\tau) \phi_{p'}^{j'}(k', y) dk' \cos(2\pi\tau) \psi_p^j(k, y) d\tau = 0,$$

donc

$$\sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \psi_p^j(k, y) \phi_{p'}^{j'}(k', y) D_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' = 0,$$

en $(s, z, y) \in \mathbb{R}^+ \times \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\}$.

Enfin, en choisissant $(v, w) = (\sin(2\pi\tau)\psi_p^j(k, y), \cos(2\pi\tau)\phi_p^j(k, y))$, on trouve

$$\sum_{0 \leq j' \leq m} \kappa_{j'}^m \int_B \sum_{p' \in \mathbb{N}^*} \psi_p^j(k, y) \phi_{p'}^{j'}(k', y) C_{p'}^{j'}(k', s, z) dk' = 0,$$

en $(s, z, y) \in \mathbb{R}^+ \times \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\}$. Ce qui montre les conditions aux limites (5.11) et (5.14).

5.9.3 Obtention des conditions aux limites (5.15)

L'ensemble des équations qui dérivent des formulations (5.5-5.6) ont été construites à la section précédente. Pour établir les conditions aux limites (5.15) il faut effectuer le passage à la limite directement sur les conditions aux limites.

Soit $(p^N, q^N)(t, x)$ la solution de l'équation des ondes formulée sous forme de système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. On a déjà vu que (p, q) , la limite à deux échelles pour les ondes de (p^N, q^N) , s'écrit sous la forme :

$$p(s, z, \tau, y) = A_0(s, z) \psi_0(y) +$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (C_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau)) \psi_p^j(k, y) dk$$

$$q(s, z, \tau, y) = B_0(s, z) \phi_0(y) +$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-C_p^j(k, s, z) \sin(2\pi\tau) + D_p^j(k, s, z) \cos(2\pi\tau)) \phi_p^j(k, y) dk.$$

Ainsi, on en déduit une approximation de (p^N, q^N) par une décomposition analogue dans laquelle les fonctions $A_0^N(t, x)$, $B_0^N(t, x)$, $C_p^{j,N}(k, t, x)$ et $D_p^{j,N}(k, t, x)$ sont continues en (t, x) :

$$p^N(t, x) = A_0^N(t, x) \psi_0(y^\varepsilon) + P(\varepsilon) +$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (C_p^{j,N}(k, t, x) \cos(2\pi\tau_p^{j,\varepsilon}(k)) + D_p^{j,N}(k, t, x) \sin(2\pi\tau_p^{j,\varepsilon}(k))) \psi_p^j(k, y^\varepsilon) dk$$

$$q^N(t, x) = B_0^N(t, x) + Q(\varepsilon)$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-C_p^{j,N}(k, t, x) \sin(2\pi\tau_p^{j,\varepsilon}(k)) + D_p^{j,N}(k, t, x) \cos(2\pi\tau_p^{j,\varepsilon}(k))) \phi_p^j(k, y^\varepsilon) dk$$

où $y^\varepsilon = \frac{x}{\varepsilon} - 2^{m-1}$ et $\tau_p^{j,\varepsilon}(k) = \frac{t}{\alpha_p^j(k)\varepsilon} - \frac{1}{2}$ et où $(P(\varepsilon), Q(\varepsilon))$ sont tels que leur transformée à deux échelles pour les ondes $(\tilde{P}(\varepsilon), \tilde{Q}(\varepsilon))$ converge vers 0 dans L^2 et satisfait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \frac{1}{\varepsilon} \left(\partial_\tau - \begin{pmatrix} 0 & (a^N)^{\frac{1}{2}} \partial_y \\ \partial_y((a^N)^{\frac{1}{2}}) & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{P}(\varepsilon) \\ \tilde{Q}(\varepsilon) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} dQ = 0$$

pour tous (v, w) solution de (5.3-5.4). La trace de $q^N(t, x)$ en $x = 0$ est égale à

$$q^N(t, 0) = B_0^N(t, 0) + Q(\varepsilon)|_{x=0} +$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \kappa_j^m \int_B \sum_{p \in \mathbb{N}^*} (-C_p^{j,N}(k, t, 0) \sin(2\pi\tau_p^{j,\varepsilon}(k)) + D_p^{j,N}(k, t, 0) \cos(2\pi\tau_p^{j,\varepsilon}(k))) \phi_p^j(k, -2^{m-1}) dk$$

Dans le cas où tous les $\alpha_p^j(k)$ sont différents, l'analyse de Fourier par rapport à t montre que chacun des termes $B_0^N(t, 0)$, $C_p^{j,N}(k, t, 0) \phi_p^j(k, -2^{m-1})$ et $D_p^{j,N}(k, t, 0) \phi_p^j(k, -2^{m-1})$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Il en va de même sur l'autre bord du domaine. Ainsi, à la limite, on a :

$$B_0(t, z) = C_p^j(k, t, z) \phi_p^j(k, y) = D_p^j(k, t, z) \phi_p^j(k, y) = 0 \text{ en } (z, y) \in \{(0, -2^{m-1}), (1, 2^{m-1})\}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.

Bibliographie

- [1] Allaire G. et Conca C., Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Complétude du spectre de Bloch, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math.* tome 321, pp. 557-562 (1995).
Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Homogénéisation par ondes de Bloch, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math.* tome 321, pp. 293-298 (1995).
- [2] Brahim-Otsmane S., Francfort G. et Murat F., Correctors for the homogenization of the wave and heat equations. *J. Math. Pures Appl.*, 71, 1992, p. 197 à 231.
- [3] Francfort, G.A., et Murat, F., Oscillation and energy densities in the wave equation. *Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique R 91021* (1991).
- [4] Gérard P., Markowich P., Mauser N. et Poupaud F., Homogenization limits and Wigner Transforms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50, n° 4, pp. 323-378, (1997).
- [5] Lasićka I., Lions J.L. and Triggiani R., Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators, *J. Math. pures et appl.* 65, pp 149-192, (1986).
- [6] Lenczner M., Homogénéisation d'un circuit électrique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II b*, tome 324, pp. 537-542 (1997). Lenczner M., et Senouci G., Homogenization of electrical networks including voltage to voltage amplifiers, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9, n° 6, pp. 899-932, (1999).
- [7] Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E., Vibration and coupling of continuous systems. *Asymptotic Methods*. Springer Verlag (1989).

Épilogue

Un homme voyait la mer pour la première fois de sa vie. Il s'extasiait sur sa beauté, sur son immensité. « Et encore, dit son ami, tu ne vois que la surface ! » Pour ceux qui ont pu explorer les profondeurs, c'est un devoir de rappeler toujours aux autres, qu'il est dommage de se contenter seulement des apparences, de l'écorce, de l'enveloppe, de l'extérieur. Mais si cela nuit à la tranquillité.

« Pour trouver la perle, disait Djalâl-od Dîn Rûmi, il faut plonger ». Bien sûr !

On pourrait théoriquement imaginer qu'avec un récipient, de la patience et du temps, en vidant la mer, on finirait par atteindre la perle.

C'est une question de technique. C'est la technique.

Ou bien, avec un masque, en regardant de la surface, on pourrait apercevoir la perle. C'est déjà satisfaisant. C'est déjà de l'art, ou tout au moins un artifice. Mais ce n'est pas suffisant pour nous donner une connaissance véritable de la perle. Il faut plonger : c'est cela le grand art et la grande technique. Attacher solidement la corde autour de soi, en confier l'extrémité en même temps que sa vie à un ami très sûr et plonger, plonger, plonger,...

*Claude DURIX
Le Sabre et la vie*

Résumé

Nous présentons une approche nouvelle pour la conception des systèmes intelligents distribués dans le cadre du contrôle des vibrations d'une poutre. Nous construisons un circuit analogique distribué qui réalise une approximation d'une loi de contrôle optimal, avec un système d'observation et de contrôle utilisant des transducteurs piézoélectriques distribués. Ce résultat théorique obtenu a été validé par des calculs numériques. Nous proposons une paramétrisation des contrôleurs dynamiques H-infini pour des équations d'état linéaires de dimension infinie. Cela a permis de construire deux contrôleurs dynamiques particuliers pour l'équation des ondes et une large

classe de contrôleurs. Un modèle simplifié de l'équation des ondes à deux échelles, qui modélise l'évolution d'un système régi par l'équation des ondes en une dimension à coefficients et données oscillants, est présenté. La solution du modèle à deux échelles est décomposée sur les ondes de Bloch. Les coefficients de la solution du modèle à coefficients constants sont solutions d'une infinité d'équations des ondes découplées, posées sur le domaine macroscopique, avec des conditions de Dirichlet homogènes. Une étude de stabilisation a été réalisée sur le modèle à coefficients constants. Les résultats théoriques obtenus ont été validés par des calculs numériques.

Mots clés

Systèmes intelligent distribué, contrôle H-infini, ondes de Bloch, homogénéisation, vibrations, circuit électronique, contrôle optimal, contrôle distribué, transformation à deux échelles pour les ondes.

Abstract

We present a new approach for the design of distributed intelligent systems within the framework of the beam vibrations control. We build a distributed analog circuit which realizes an approximation of an optimal control law. The sensors and actuators are piezoelectric transducers and are distributed in the host structure. This theoretical result has been validated by numerical simulations. We propose a parameterization of H-infinite dynamic controllers for infinite dimension linear systems. Then two particular dynamic controllers for the waves equation and a large class of controllers are derived. A

two-scale model for the wave equation with oscillating coefficients and data is formulated. It has been derived using an asymptotic method based on the two-scale convergence and on the Bloch waves decomposition. A numerical validation in the case of constant coefficients and oscillating data is also presented. The coefficients of the solution of this model are solutions of an infinity of uncoupled waves equations, posed on the macroscopic field, with Dirichlet homogeneous conditions. A stabilization problem is solved in that. This result has also been validated by numerical simulation.

Key words

Distributed intelligent systems, H-infinity control, Bloch waves, homogenization, vibrations, optimal control, electronic circuit, distributed control, two_scale transformation for the waves.