# Algèbre et Géométrie

Jean-François Couchot
Christophe Guyeux

1er septembre 2010

# Table des matières

# Chapitre 1

# Repérage dans le plan et l'espace

## I Systèmes de coordonnées dans le plan

### I.1 Coordonnées cartésiennes

#### I.1.1 Définition

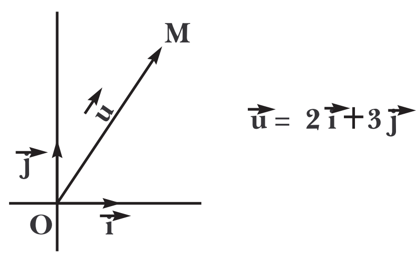
Définition 1.1 (Repère cartésien). On appelle *repère cartésien* du plan tout triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où :
- $O$ est un point fixé du plan, nommé origine,
- $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires ( : n'ayant pas même direction).

On se limitera aux repères orthonormés ($\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$, $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1$) directs : la rotation de centre $O$, d'angle $+\frac{\pi}{2}$, envoie $\overrightarrow{i}$ sur $\overrightarrow{j}$.

Notation : De tels repères seront notés ROND.

#### I.1.2 Conséquence

Propriété 1.3. Tout vecteur du plan se décompose (grâce aux projections) en la somme d'un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{i}$ et d'un autre colinéaire à $\overrightarrow{j}$.



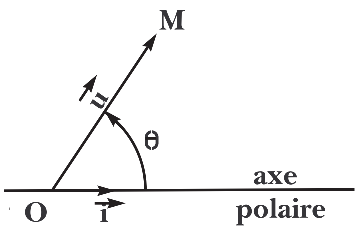

Remarque 1.4. $(2,3)$ représente les coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

### I.2 Coordonnées polaires

On se donne une origine $O$, et un vecteur $\overrightarrow{i} (\neq \overrightarrow{0})$.

### I.2.1 Définition

Définition 1.5 (Coordonnées polaires). On appelle *coordonnées polaires* du point $M$, le couple $(r, \theta)$, où :
- $r = \| \overrightarrow{OM} \|$,
- $\theta = \widehat{\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{OM}}$.

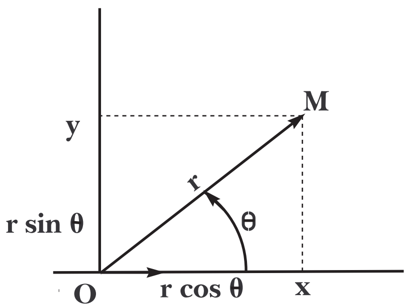



Remarque 1.6. Si le plan est déjà muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on prend (sauf mention du contraire) $O$ pour origine des coordonnées polaires, et l'axe $O\overrightarrow{i}$ pour axe polaire.

### I.2.2 Relations avec les coordonnées cartésiennes

Propriété 1.7. Soit $M$ un point du plan repéré par $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, de coordonnées cartésiennes $(x, y)$, et de coordonnées polaires $(r, \theta)$ (où $O\overrightarrow{i}$ est l'axe polaire). Alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array} \right.$$




### I.2.3 Exercices

Exercice 1.1. On se donne les points $A(1;3)$, $B(1;2)$, $C(-1;-3)$, $D(-2;-1)$. Quelles sont leurs coordonnées polaires ?

Exercice 1.2. Même question pour les points de coordonnées $A(5;2)$, $B(-3;2)$, $C(1;-3)$, $D(2;1)$.

Exercice 1.3. On prend $[O\overrightarrow{i})$ pour axe polaire, et on considère les points de coordonnées (polaires) $A(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$, $B(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $C(3, \frac{\pi}{3})$, $D(2, \frac{2\pi}{3})$ et $E(3, -\pi)$.
Quelles sont leurs coordonnées cartésiennes ?

Exercice 1.4. On considère les points $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(1;-1)$, $D(-1;-1)$, et le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
On choisit $B$ pour origine des coordonnées polaires, et $B\overrightarrow{u}$ pour axe polaire. Quelles sont les coordonnées polaires des points donnés précédemment ?

Exercice 1.5. On se donne un triangle $A, B, C$ de coordonnées respectives $(1;0)$, $(3;2)$ et $(-1,2)$.

1. Quelle est la nature du triangle ?
2. Déterminez les coordonnées polaires des points, en prenant $O\overrightarrow{i}$, puis $O\overrightarrow{j}$, pour axe polaire.
3. On effectue une symétrie d'axe $Oy$. Quelles sont les nouvelles coordonnées des points du triangle ?
4. On effectue une rotation d'origine 0, d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Quelles sont les nouvelles coordonnées du triangle ?

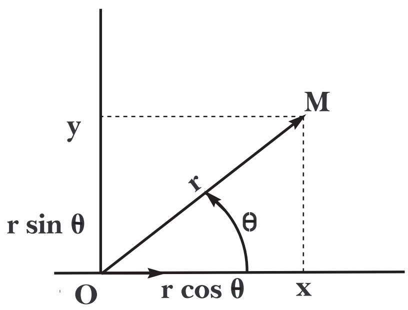
# II Systèmes de coordonnées dans l'espace

## II.1 Coordonnées cartésiennes

On se fixe une origine dans l'espace, puis on se donne trois vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, deux à deux non colinéaires. On se limitera aux repères orthonormés directs : $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$, $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$.

## II.2 Coordonnées cylindriques

Le repérage d'un point de l'espace se fait comme suit :

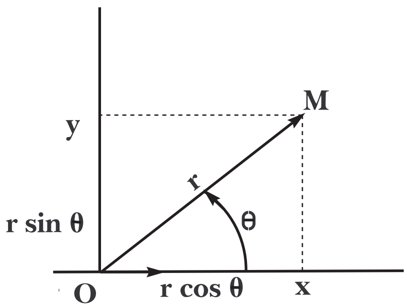



Propriété 1.8. Les coordonnées cylindriques $(r, \theta, Z)$ sont reliées aux coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ par les formules :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & Z \end{array}\right.$$

## II.3 Coordonnées sphériques

Le repérage d'un point de l'espace se fait comme suit :
Les coordonnées cylindriques $(r, \theta, \phi)$ sont reliées aux coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ par les formules :




$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta\cos\phi \\ y & = & r\sin\theta\cos\phi \\ z & = & r\sin\phi \end{array}\right.$$

## II.4 Exercices

Exercice 1.6. On se donne les points $A(0;1;3)$, $B(1;3;3)$, $C(-1;2;3)$, $D(2;-1;-1)$.

1. Quelles sont leurs coordonnées cylindriques ?
2. Quelles sont leurs coordonnées sphériques ?

Exercice 1.7. On se donne les points $A$, $B$, et $C$ de l'espace de coordonnées cylindriques respectives $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$, $(3, -\frac{\pi}{4}, -1)$, $(1, \frac{3\pi}{2}, 3)$. Trouver leurs coordonnées cartésiennes.

Exercice 1.8. On se donne les points $A$, $B$, et $C$ de l'espace de coordonnées sphériques respectives $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, et $(1, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$. Trouver leurs coordonnées cartésiennes.

# Chapitre 2

# Résolution de quelques problèmes géométriques

## I Produit scalaire, produit vectoriel

### I.1 Produit scalaire

#### I.1.1 Définition

Définition 2.1 (Produit scalaire). Étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan ou de l'espace, formant un angle non-orienté $\theta$ entre eux, leur *produit scalaire* vaut :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta$$

Remarque 2.2. C'est donc un scalaire, qui est nul si et seulement si $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$.

#### I.1.2 Propriétés

Le produit scalaire vérifie :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$$
$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

D'autres part, ayant les coordonnées des vecteurs, on peut aisément calculer leur produit scalaire :
- Dans le plan, si $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.
- Dans l'espace, si $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

<u>rem :</u> Avec les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on peut obtenir l'angle qu'ils forment entre eux, par :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

#### I.1.3 Exercices

Exercice 2.1. On se donne les vecteurs suivants : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

1. Calculer la norme de chacun de ces vecteurs.

2. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$, $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).\overrightarrow{x}$, et $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{x}$.

## I.2 Produit vectoriel

### I.2.1 Définition

Définition 2.3 (Produit vectoriel). Le *produit vectoriel* de $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, est le vecteur de coordonnées

$$(yz' - y'z, x'z - xz', xy' - x'y)$$

Remarque 2.4. C'est un vecteur, de norme :

$$\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$$

où $\theta$ désigne l'angle non orienté formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

### I.2.2 Propriétés

Le produit vectoriel est nul si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

La direction de ce vecteur est orthogonale au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et son sens est tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|})$ forme un repère orthonormé direct.

Enfin, le produit vectoriel vérifie les propriétés algébriques suivantes :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$$
$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$$

### I.2.3 Exercices

Exercice 2.2. On se donne les vecteurs suivants : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}, \overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

1. Calculer la norme de chacun de ces vecteurs.

2. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$, $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).\overrightarrow{x}$, et $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{x}$.

3. Calculer les produits vectoriels $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

# II Équations de droites et de plans

## II.1 La droite dans le plan

### II.1.1 Équation cartésienne

Propriété 2.5. L'équation cartésienne d'une droite dans un plan est de la forme

$$(D) : ux + vy + h = 0$$

Remarque 2.6.
- Si $u$ est nul (et pas $v$), on obtient la droite $y = -\frac{h}{v}$, parallèle à $Ox$.
- Si $v$ est nul (et pas $u$), on obtient la droite $x = -\frac{h}{u}$, parallèle à $Oy$.
- Si ni $u$ ni $v$ ne sont nuls, on obtient la droite de pente $-\frac{u}{v}$, qui passe par le point $(0, -\frac{h}{v})$.

### II.1.2 Vecteur normal à la droite

Soit $M = (x, y)$ un point courant de $(D) : u * x + v * y + h = 0$, et $\overrightarrow{V} = (u, v)$.
Alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{V} + h = u * x + v * y + h = 0$.
Si, de plus, on se fixe un point $M_0$ de $(D)$, alors on a $\overrightarrow{OM_0}.\overrightarrow{V} + h = 0$.
Donc $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{V} + h = \overrightarrow{OM_0}.\overrightarrow{V} + h$, soit $(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}).\overrightarrow{V} = \overrightarrow{MM_0}.\overrightarrow{V} = 0$.
Conclusion : $\overrightarrow{V}$ est un vecteur orthogonal à la droite $(D)$.

### II.1.3 Méthodes pour déterminer l'équation d'une droite du plan

**Équation d'une droite orthogonale à un vecteur** On se donne un vecteur $\overrightarrow{V_0} = (u_0, v_0)$.

Propriété 2.7. La droite perpendiculaire à ce vecteur, et passant par $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation

$$(D) : (x - x_0) * u_0 + (y - y_0) * v_0 = 0$$

Preuve En effet, par (a), on sait que (D) a pour équation

$$D : u_0 * x + v_0 * y + h = 0$$

Comme $M_0 \in D$, on a :

$$D : u_0 * x_0 + v_0 * y_0 + h = 0$$

donc $h = -u_0 * x_0 - v_0 * y_0$... ■

**Équation d'une droite dirigée par un vecteur** La droite $(D)$ passant par $M_0(x_0, y_0$ et dirigée par $\overrightarrow{U} = (u, v)$ est la droite passant par $M_0(x_0, y_0$ et orthogonale à $\overrightarrow{V} = (-v, u)$.

D'après ce qui précède,

$$(D) : v * (x - x_0) - u * (y - y_0) * v_0 = 0$$

**Équation d'une droite passant par deux points** C'est la droite passant par $A = (x_A, y_A)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Avec le point précédent :

$$(D) : (y_B - y_A) * (x - x_A) + (x_B - x_A) * (y - y_A) = 0$$

**Équation paramétrique** Soit $(D)$ la droite passant par les points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$. Alors :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \in D &\iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{BA} \\
&\iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} x_A - x &=& \lambda(x_A - x_B) \\ y_A - y &=& \lambda(y_A - y_B) \end{array} \right. \\
&\iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y &=& y_A + \lambda(y_B - y_A) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Soit $(D)$ la droite passant par $A = (x_A, y_A)$, de vecteur directeur $\overrightarrow{V} = (u, v)$. Alors :

$$
\begin{aligned}
M(x,y) \in D \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{V} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{rcl} x_A - x &=& \lambda u \\ y_A - y &=& \lambda v \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x_A - \lambda u \\ y &=& y_A - \lambda v \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

## II.2 Le plan dans l'espace

### II.2.1 Equation cartésienne

Une équation cartésienne d'un plan dans l'espace a la forme

$$(P) : u * x + v * y + w * z + h = 0$$

où u,v,w ne sont pas nuls simultanément.

Le vecteur $(u, v, w)$ est orthogonal à $(P)$, et tous les plan orthogonaux au vecteur $(u, v, w)$ ont une équation de la forme $u * x + v * y + w * z + h = 0$.

### II.2.2 Plan orthogonal à un vecteur

Si on veut le plan $(P)$ orthogonal à $\overrightarrow{U} = (u_0, v_0, w_0)$ et passant par $(x_0, y_0, z_0)$, alors :

– $\overrightarrow{U} \perp (P)$, donc l'équation de $(P)$ a la forme $u_0 * x + v_0 * y + w_0 * z + h = 0$

– $(x_0, y_0, z_0) \in (P)$, donc $u_0 * x_0 + v_0 * y_0 + w_0 * z_0 + h = 0$, d'où $h = -u_0 * x_0 - v_0 * y_0 - w_0 * z_0$.

Conclusion : $(P) : u_0 * (x - x_0) + v_0 * (y - y_0) + w_0 * (z - z_0) + h = 0$.

## II.3 La droite dans l'espace

### II.3.1 Équation cartésienne

Une droite de l'espace étant l'intersection de deux plans, elle admet pour équation cartésienne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 * x + v_1 * y + w_1 * z + h_1 &=& 0 \\ u_2 * x + v_2 * y + w_2 * z + h_2 &=& 0 \end{array} \right.$$

Exercice 2.3. Trouver une équation de la droite $(D)$ passant par les points $A \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z &=& 2 \\ y - z &=& 1 \\ 2 * x - y - z &=& 1 \end{array} \right.$ et $B \left\{ \begin{array}{l} x + z \\ 2z - 2y \\ 2x - y + \end{array} \right.$

Exercice 2.4. Déterminer combien de points constituent l'intersection entre les droites $(D1)$ et $(D2)$, puis $(D1)$ et $(D3)$, où

$$(D1) \left\{ \begin{array}{rcl} x + z &=& 2 \\ y - z &=& 1 \end{array} \right. \quad (D2) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z &=& 3 \\ 2z - 2y &=& -2 \end{array} \right. \quad (D3) \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2 * y &=& 3 \\ x + 5 * y &=& 1 \end{array} \right.$$

### II.3.2 Équation paramétrique

Soit $(D)$ la droite de l'espace passant par les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ distincts.Alors :

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z) \in D & \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{BA} \\
& \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} x_A - x & = & \lambda(x_A - x_B) \\ y_A - y & = & \lambda(y_A - y_B) \\ z_A - z & = & \lambda(z_A - z_B) \end{array} \right. \\
& \iff \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y & = & y_A + \lambda(y_B - y_A) \\ z & = & z_A + \lambda(z_B - z_A) \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Enfin, $M(x,y,z)$ appartient à la droite passant par $(x_0, y_0, z_0$ et portée par le vecteur $(u,v,w)$ si, et seulement si :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + \lambda u \\ y & = & y_A + \lambda v \\ z & = & z_A + \lambda w \end{array} \right.
$$

Exercice 2.5. Trouvez une équation cartésienne de la droite :

1. $(D_a)$ du plan passant par les points $A(-1;0)$ et $B(2;3)$.
2. $(D_b)$ du plan passant par les points $A(-1;2)$ et $B(-1;-1,5)$.
3. $(D_c)$ de l'espace passant par les points $A(-1;0;1)$ et $B(2;2;2)$. Donner la version paramétrique des équations rencontrées.

# III Équations de cercles, de sphères

## III.1 Le cercle dans le plan

Le cercle $(C)$ de centre $O(x_O, y_O$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ situés à une distance $R$ de $(x_O, y_O)$, c'est-à-dire tels que $\| \overrightarrow{OM} \|^2 = R^2$, soit

$$(C) : (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2$$

Remarque 2.8. Les coordonnées d'un point courant $M(x,y)$ sur ce cercle sont obtenues par :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_O + R * cos\theta \\ y & = & y_O + R * sin\theta \end{array} \right.
$$

où $\theta \in [0, 2*\pi]$.

## III.2 La sphère dans l'espace

La sphère $(S)$ de centre $O(x_O, y_O, z_O$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ situés à une distance $R$ de $(x_O, y_O, z_O)$, c'est-à-dire tels que $\| \overrightarrow{OM} \|^2 = R^2$, soit

$$(C) : (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 + (z - z_O)^2 = R^2$$

Remarque 2.9. Les coordonnées d'un point courant $M(x,y,z)$ d'une telle sphère sont :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_O + R * cos\theta cos\phi \\ y & = & y_O + R * sin\theta cos\phi \\ z & = & z_O + R * sin\phi \end{array} \right.
$$

où $\theta \in [0, 2*\pi], \phi \in [0, \pi]$.

Exercice 2.6. On se donne les surfaces de l'espace d'équation $(S1) : x + y + z + 1 = 0$ et $(S2) : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Que sont exactement ces surfaces ?
2. Quels sont les trois cas rencontrés lors de l'intersection de deux telles surfaces ?
3. Préciser $S1 \cap S2$ dans notre cas.

Exercice 2.7. Que peut-être l'intersection entre une sphère et un plan de $\mathbb{R}^3$ ?

# IV Calcul de distances

## IV.1 Distance entre deux points

Étant donné deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ du plan, la distance qui les sépare vaut

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Étant donné deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ de l'espace, la distance qui les sépare vaut

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

## IV.2 Distance d'un point à une droite dans le plan

On se donne un point $A(x_A, y_A)$ et une droite $(D:)ux + vy + h = 0$.

On a vu que tout point $M(x, y)$ appartenant à la droite $(D')$ orthogonale à $(D)$ et passant par $A$, a la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + \lambda u \\ y & = & y_A + \lambda v \end{array}\right.$$

Donc le point $M_0(x_0, y_0)$ d'intersection de $(D)$ et $(D')$ a des coordonnées de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & x_A + \lambda_0 u \\ y_0 & = & y_A + \lambda_0 v \end{array}\right.$$

où $\lambda_0$ est tel que $x_0 u + y_0 v + h = 0$, soit $u(x_A + \lambda_0 u) + v(y_A + \lambda_0 v) + h = 0$, ce qui permet de trouver :

$$\lambda_0 = -\frac{h + ux_A + vy_A}{u^2 + v^2}$$

D'où les coordonnées de $M_0$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & x_A - \frac{h+ux_A+vy_A}{u^2+v^2} u \\ \\ y_0 & = & y_A - \frac{h+ux_A+vy_A}{u^2+v^2} v \end{array}\right.$$

Comme la distance de $A$ à $(D)$ s'identifie à $AM_0$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{lcc} d(A,D) = AM_0 & = & \sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} \\ \\ & = & \sqrt{\frac{u^2(h+ux_A+vy_A)^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2(h+ux_A+vy_A)^2}{(u^2+v^2)^2}} \\ \\ & = & \frac{|h+ux_A+vy_A|}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{array}}$$

## IV.3 Distance d'un point à un plan dans l'espace

La distance d'un point $A(x_A, y_A, z_a)$ à un plan $(P:)ux + vy + cz + h = 0$ se calcule pareillement. On trouve

$$\boxed{d(A,P) = \frac{|ux_0 + vy_0 + wz_0 + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}}$$

### IV.4 Exercices

Exercice 2.8. Calculer la distance séparant :

1. Les points $(1,1)$, $(3,1)$ et $(3,3)$ dans le plan. Conclusion ?
2. Les points $(-1,0,-1)$, $(1,0,-1)$ et $(0,\sqrt{3},-1)$ de l'espace. Conclusion ?

Exercice 2.9. Calculer la distance séparant l'origine :

1. De la droite du plan d'équation $x+y+1=0$.
2. De la droite de l'espace d'équation
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+1 & = & 0 \\ x+y-z+1 & = & 0 \end{array}\right.$$
3. Du plan de l'espace d'équation $x+y+z+1=0$.

## V Exercices

Exercice 2.10. On se place dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct. Trouver les points d'intersection des figures d'équation : $x^2+2*x+y^2-4*y+1=0$ et $2*x+y=0$. On précisera au préalable de quelle figure il s'agit.

Exercice 2.11. On se place dans l'espace, muni d'un repère orthonormé direct adéquat, et on considère :

$$(F_1)\left\{\begin{array}{rcl} z-y-1 & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right., \ (F_2)\ x^2+y^2+z^2=1, \text{ et } (F_3)\ z=0$$

1. Précisez de quelles figures il s'agit.
2. Calculez $F_1\cap F_2$, $F_1\cap F_3$, et $F_2\cap F_3$.
3. Quelle est la distance entre $(F_1)$ et l'origine ?

Exercice 2.12. 1. Que représente l'équation $x+y=1$ dans le plan ? dans l'espace ?

2. Que donne l'intersection entre une droite et un plan dans l'espace ?
3. Que représente le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ -2x & + & 4y & & & = & -2 \end{array}\right.$$
dans l'espace ?

Exercice 2.13. $x+y+2=0$ désigne (répondre par vrai ou faux)

1. un point dans le plan $\mathbb{R}^2$
2. une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$
3. une droite dans l'espace $\mathbb{R}^3$
4. un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$
5. un point dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Exercice 2.14. Que représente $x^2+2y^2=3$ dans le plan ?

Exercice 2.15. Répondre par vrai ou faux. On se place dans le plan, et on considère

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ x-2y & = & 1 \end{array}\right.$$

1. $(S)$ a une infinité de solutions, car c'est l'intersection de deux plans,

2.
$$(S')\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ -4y & = & -2 \end{array}\right.$$
est un système triangulaire que a les mêmes solutions que $(S)$.
3. Les deux droites $x+2y=3$ et $x-2y=1$ sont parallèles, donc il y n'y a pas de solution, car elles ne sont pas confondues.
4. $(\frac{1}{2},2)$ est solution de $(S)$.
5. $(S)$ admet une unique solution.

Exercice 2.16. Nature des éléments suivants de l'espace :

$$a.x+y+z=0 \quad b.\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x+z & = & 2 \end{array}\right.$$
$$c.2x=1 \qquad d.\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2.17. Parmi les équations suivantes du plan, lesquelles sont des droites ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ 2x+4y & = & 6 \end{array}\right.$$

# VI Présentation

## VI.1 Exemples d'utilisation

### VI.1.1 Changement de base (dans le plan)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Soient $\overrightarrow{I}=(a,b)$ et $\overrightarrow{J}=(c,d)$ deux vecteurs non colinéaires.

Etant donné un point M de coordonnées connues $(x,y)$ dans $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on cherche ses coordonnées $(X,Y)$ dans le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ :
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OM} & = & x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j} \\ & = & X\overrightarrow{I}+Y\overrightarrow{J} \\ & = & X(a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j})+Y(c\overrightarrow{i}+d\overrightarrow{j}) \\ & = & (aX+cY)\overrightarrow{i}+(bX+dY)\overrightarrow{j} \end{array}$$
On veut donc $x=aX+cY$ et $y=bX+dY$

Ceci nous mène à résoudre le *système d'équations linéaires* (SEL)

$$\left\{\begin{array}{rcl} aX+cY & = & x \\ bX+dY & = & y \end{array}\right.$$

### VI.1.2 Système d'équations linéaires

Dans le même esprit, différents problèmes géométriques (changement de base, interpolation...) se résument à la résolution de SEL, de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\dot{a}_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\dot{a}_{2,n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\dot{a}_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $x_i$ représentent les inconnues du système.

### VI.2 Nombre de solutions

#### VI.2.1 Résultat

Propriété 2.10. Un système linéaire :
- n'admet aucune solution,
- ou bien admet une (unique) solution,
- ou alors une infinité de solutions.

Il n'y a pas d'autre cas.

#### VI.2.2 Illustration

| $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$ | $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$ | $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$ |
|---|---|---|
| une solution<br>$x=1, y=2$ | aucune solution | une infinité de solutions<br>le plan x+y=2 |

## VII Algorithme du pivot

Le but est de se ramener, par substitution, à un système triangulaire.
On illustrera l'algorithme du pivot par la résolution du SEL :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

### VII.1 Première étape : descente

On cherche le coefficient $a_{i,1}, i \in [1, n]$ de la première colonne (correspondante à $x_1$) de plus grand module : c'est notre premier *pivot*. On intervertit alors la première ligne avec celle du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Puis on fait :

$$\text{pour i allant de 2 à } n \text{ faire } L_i := L_i - a_{i,1}/a_{1,1} * L_1$$

Ceci a pour conséquence de supprimer la première variable dans les lignes 2 à n. On est donc ramené à un système à $n-1$ équations à $n-1$ inconnues.

Ce qui donne sur notre exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & -\frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 2 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

On réitère le procédé pour les lignes 2 à $n$ : choix du pivot

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & = & 1 \\ & & -\frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Élimination de la deuxième inconnue dans le reste :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & = & 1 \\ & & & + & 8x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

etc.

## VII.2 Deuxième étape : remontée

Ayant aboutit à un système triangulaire, on résout par remontée : de la troisième ligne, on tire

$$x_3 = \frac{5}{8}$$

remplaçons $x_3$ par sa valeur dans la deuxième équation, ce qui donne :

$$x_2 = \frac{2}{3} * (1 - \frac{5}{2} * \frac{5}{8}) = -\frac{3}{8}$$

enfin, remplaçons les valeurs de $x_2$ et $x_3$ dans la première équation, ce qui permet de trouver $x_1$ :

$$x_1 = \frac{1}{2}(\frac{3}{8} - \frac{5}{8})$$

## VII.3 Cas où l'un des pivots est nul

Si, à un moment donné, on tombe sur un pivot nul, alors à la fin de la descente, on aura un certain nombre d'équations de la forme :

$$0 = \lambda$$

Dans ce cas : si tous les $\lambda$ sont nuls, il y a une infinité de solutions, sinon il n'y en a pas.

Exemple 2.18.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

On met le pivot à sa place :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 2y & = & 4 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$$

On remplace la deuxième ligne par $ligne_2 - \frac{1}{2} * ligne_1$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 2y & = & 4 \\ 0 & = & 0 & & \end{array}\right.$$

Conclusion : une infinité de solutions (tous les points (x,y) tels que $y = 2 - x$ conviennent).

Exemple 2.19.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le pivot est déjà en place. On remplace la deuxième ligne par $ligne_2 - ligne_1$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 0 & = & -2 & & \end{array}\right.$$

...ce système n'admet aucune solution !

# VIII Exercices

## VIII.1 Systèmes carrés

Exercice 2.20. Résoudre les systèmes suivants avec la méthode des déterminants (formules de Cramer) :

$$a. \left\{\begin{array}{ccc} X + 2Y & = & 3 \\ X + 5Y & = & 1 \end{array}\right. \quad b. \left\{\begin{array}{ccc} X + Y & = & -1 \\ X & = & 6 \end{array}\right.$$

$$c. \left\{\begin{array}{ccc} X + 2Y & = & 1 \\ -X + 3Y & = & 1 \end{array}\right. \quad d. \left\{\begin{array}{ccc} X + 2Y & = & 1 \\ -3X + -6Y & = & -3 \end{array}\right.$$

Exercice 2.21. Montrez que le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} X & + & 3Y & + & 2Z & = & 1 \\ 4X & + & 5Y & + & 4Z & = & 1 \\ X & + & Y & + & Z & = & 1 \end{array}\right.$$

admet une unique solution, puis calculez-la par la méthode des déterminants.

Exercice 2.22. Même exercice avec :

$$a. \left\{\begin{array}{ccc} X+2Y & = & 5 \\ 3X+4Y & = & 6 \end{array}\right. \quad b. \left\{\begin{array}{ccc} Y & = & -1 \\ -X-Y & = & -3 \end{array}\right. \quad c. \left\{\begin{array}{ccc} 2X+2Y & = & 1 \\ X+Y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2.23. A l'aide des déterminants, discuter du nombre de solutions des systèmes suivants. En cas d'unicité, les trouver.

$$a. \left\{\begin{array}{ccc} X+2Y+3Z & = & 5 \\ 4X+5Y+6Z & = & 6 \\ 7X+8Y+9Z & = & 7 \end{array}\right. \quad b. \left\{\begin{array}{ccc} 2X+2Y+3Z & = & 1 \\ 4X+5Y+6Z & = & 1 \\ 7X+8Y+9Z & = & 1 \end{array}\right. \quad c. \left\{\begin{array}{ccc} 2X+2Y+3Z & = & 5 \\ 4X+5Y+6Z & = & 6 \\ 7X+8Y+9Z & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice 2.24. Par la méthode des exercices précédents, résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccc} X+3Z+T & = & 5 \\ 4X+Y+2Z & = & 2 \\ -X+8Y+9Z+5T & = & 3 \\ -Z+T & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2.25. Montrez que le système

$$\left\{\begin{array}{rcc} X+3Z+T & = & 1 \\ 4X+Y+2Z & = & 2 \\ -X+4Y+9Z+5T & = & 3 \\ -Z+T & = & 1 \end{array}\right.$$

admet une unique solution, puis calculez-la par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 2.26. Montrez que le système

$$\left\{\begin{array}{rcc} X+2Y+Z & = & 0 \\ 2X+Y+4Z+3T & = & 1 \\ X+2Z+2T & = & 2 \\ 3X+2Y+Z+2T & = & 3 \end{array}\right.$$

admet une unique solution, puis calculez-la par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 2.27.

1. Résoudre, par la méthode du pivot, et en écrivant les opérations effectuées sous la forme

$$L_i \to L_i + C^{te} L_j,$$

les systèmes suivants

$$(S_1) \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_2) \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & & y & - & 2z & = & -4 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$(S_3) \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & - & z & - & t & = & 2 \\ & & y & - & 2z & + & 3t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Peut-on prévoir le nombre de solutions du système :

$$(S_4) \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -2 \\ & & y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

## VIII.2 Systèmes rectangulaires

EXERCICE 2.28. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on considère

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 3 \\ 2x-y &=& 1 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 3 \\ -x+y &=& -3 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x-6y &=& 2 \\ -x+2y &=& -2 \end{array}\right. \quad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} -x-3y &=& 1 \\ 2x+6y &=& 0 \end{array}\right.$$

Déterminez l'ensemble solution de ces systèmes, en précisant leurs représentations géométriques.

EXERCICE 2.29. Faire comme dans l'exercice précédent, avec les systèmes

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y &=& 8 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 1 \\ -x+y &=& -1 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 1 \\ 2x-3y &=& 2 \\ -x-2y &=& -2 \end{array}\right. \quad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 3 \\ 2x-y &=& 2 \end{array}\right.$$

EXERCICE 2.30. On se place dorénavant dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminez l'ensemble solution des systèmes

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 3 \\ x-z &=& 2 \\ y+z &=& 0 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 2 \\ x+y &=& 3 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y &=& 3 \\ x+y+z &=& 1 \\ 3x+z &=& 4 \end{array}\right. \quad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \end{array}\right.$$

EXERCICE 2.31. Résoudre les systèmes de $\mathbb{R}^5$ suivants

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+t &=& 1 \\ 2x-y+z+t+u &=& 0 \\ x-y+z+u &=& 3 \\ -x-y+z-t &=& 2 \\ y-u &=& 5 \end{array}\right.$$

et

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x-2y-z+u &=& -1 \\ y-2z+t &=& 0 \\ x+y+z+t+u &=& 5 \\ t-2u &=& 0 \\ y+z+t &=& 3 \end{array}\right.$$

## VIII.3 Systèmes à paramètres

EXERCICE 2.32. Résoudre les systèmes suivants en discutant, s'il y a lieu, en fonction des valeurs des paramètres réels :

1. $\left\{\begin{array}{ccccc} x &+& 2y &=& 5 \\ x &+& 3y &=& 5 \\ x &+& 7y &=& \beta \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x &+& y &-& \alpha z &=& 0 \\ x &+& \alpha y &-& z &=& 0 \\ x &+& (\alpha+1)y &+& 2z &=& 0 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha x &+& y &-& z &=& 1 \\ x &+& \alpha y &-& z &=& \alpha \\ x &+& y &+& \alpha z &=& \alpha^2 \end{array}\right.$

Exercice 2.33. Discuter, en fonction de $m$, du nombre de solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & 3m^2z & = & 1-m \end{array}\right.$$

Le résoudre à l'aide de l'algorithme du pivot.

Exercice 2.34. Discuter, en fonction de $(a, b, c)$, du nombre de solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & bz & = & a \\ x & + & by & + & az & = & b \\ ax & + & y & + & bz & = & a \\ bx & + & y & + & az & = & b \end{array}\right.$$

# Chapitre 3

# Systèmes d'équations linéaires

## I Présentation

### I.1 Exemples d'utilisation

#### I.1.1 Changement de base (dans le plan)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $\overrightarrow{I} = (a, b)$ et $\overrightarrow{J} = (c, d)$ deux vecteurs non colinéaires.

Etant donné un point M de coordonnées connues $(x, y)$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on cherche ses coordonnées $(X, Y)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OM} & = & x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \\ & = & X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} \\ & = & X(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}) + Y(c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}) \\ & = & (aX + cY)\overrightarrow{i} + (bX + dY)\overrightarrow{j} \end{array}$$

On veut donc $x = aX + cY$ et $y = bX + dY$

Ceci nous mène à résoudre le *système d'équations linéaires* (SEL)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aX + cY & = & x \\ bX + dY & = & y \end{array} \right.$$

#### I.1.2 Système d'équations linéaires

Dans le même esprit, différents problèmes géométriques (changement de base, interpolation...) se résument à la résolution de SEL, de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dot{a}_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dot{a}_{2,n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dot{a}_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

où les $x_i$ représentent les inconnues du système.

### I.2 Nombre de solutions

#### I.2.1 Résultat

Propriété 3.1. Un système linéaire :
- n'admet aucune solution,
- ou bien admet une (unique) solution,
- ou alors une infinité de solutions.

Il n'y a pas d'autre cas.

### I.2.2 Illustration

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & + & y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lllll} x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lllll} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

une solution $x = 1, y = 2$ — aucune solution — une infinité de solutions le plan x+y=2

# II Algorithme du pivot

Le but est de se ramener, par substitution, à un système triangulaire.
On illustrera l'algorithme du pivot par la résolution du SEL :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

## II.1 Première étape : descente

On cherche le coefficient $a_{i,1}, i \in [1, n]$ de la première colonne (correspondante à $x_1$) de plus grand module : c'est notre premier *pivot*. On intervertit alors la première ligne avec celle du pivot :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Puis on fait :

$$\text{pour i allant de 2 à } n \text{ faire } L_i := L_i - a_{i,1}/a_{1,1} * L_1$$

Ceci a pour conséquence de supprimer la première variable dans les lignes 2 à n. On est donc ramené à un système à $n-1$ équations à $n-1$ inconnues.

Ce qui donne sur notre exemple :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & -\frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 2 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

On réitère le procédé pour les lignes 2 à $n$ : choix du pivot

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & = & 1 \\ & & -\frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Élimination de la deuxième inconnue dans le reste :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & = & 1 \\ & & & + & 8x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

etc.

## II.2 Deuxième étape : remontée

Ayant aboutit à un système triangulaire, on résout par remontée : de la troisième ligne, on tire

$$x_3 = \frac{5}{8}$$

remplaçons $x_3$ par sa valeur dans la deuxième équation, ce qui donne :

$$x_2 = \frac{2}{3} * (1 - \frac{5}{2} * \frac{5}{8}) = -\frac{3}{8}$$

enfin, remplaçons les valeurs de $x_2$ et $x_3$ dans la première équation, ce qui permet de trouver $x_1$ :

$$x_1 = \frac{1}{2}(\frac{3}{8} - \frac{5}{8})$$

### II.3 Cas où l'un des pivots est nul

Si, à un moment donné, on tombe sur un pivot nul, alors à la fin de la descente, on aura un certain nombre d'équations de la forme :

$$0 = \lambda$$

Dans ce cas : si tous les $\lambda$ sont nuls, il y a une infinité de solutions, sinon il n'y en a pas.

Exemple 3.1.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

On met le pivot à sa place :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 2y & = & 4 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$$

On remplace la deuxième ligne par $ligne_2 - \frac{1}{2} * ligne_1$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 2y & = & 4 \\ 0 & = & 0 & & \end{array}\right.$$

Conclusion : une infinité de solutions (tous les points (x,y) tels que $y = 2 - x$ conviennent).

Exemple 3.2.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le pivot est déjà en place. On remplace la deuxième ligne par $ligne_2 - ligne_1$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 0 & = & -2 & & \end{array}\right.$$

...ce système n'admet aucune solution !

## III Exercices

### III.1 Systèmes carrés

Exercice 3.3. Résoudre les systèmes suivants avec la méthode des déterminants (formules de Cramer) :

$$a. \left\{\begin{array}{ccc} X + 2Y & = & 3 \\ X + 5Y & = & 1 \end{array}\right. \quad b. \left\{\begin{array}{ccc} X + Y & = & -1 \\ X & = & 6 \end{array}\right.$$

$$c. \left\{\begin{array}{ccc} X + 2Y & = & 1 \\ -X + 3Y & = & 1 \end{array}\right. \quad d. \left\{\begin{array}{ccc} X + 2Y & = & 1 \\ -3X + -6Y & = & -3 \end{array}\right.$$

Exercice 3.4. Montrez que le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} X & + & 3Y & + & 2Z & = & 1 \\ 4X & + & 5Y & + & 4Z & = & 1 \\ X & + & Y & + & Z & = & 1 \end{array}\right.$$

admet une unique solution, puis calculez-la par la méthode des déterminants.

Exercice 3.5. Même exercice avec :

$$a. \left\{\begin{array}{ccc} X + 2Y & = & 5 \\ 3X + 4Y & = & 6 \end{array}\right. b. \left\{\begin{array}{ccc} Y & = & -1 \\ -X - Y & = & -3 \end{array}\right. c. \left\{\begin{array}{ccc} 2X + 2Y & = & 1 \\ X + Y & = & 1 \end{array}\right.$$

EXERCICE 3.6. A l'aide des déterminants, discuter du nombre de solutions des systèmes suivants. En cas d'unicité, les trouver.

$$a. \begin{cases} X+2Y+3Z &= 5 \\ 4X+5Y+6Z &= 6 \\ 7X+8Y+9Z &= 7 \end{cases} \quad b. \begin{cases} 2X+2Y+3Z &= 1 \\ 4X+5Y+6Z &= 1 \\ 7X+8Y+9Z &= 1 \end{cases} \quad c. \begin{cases} 2X+2Y+3Z &= 5 \\ 4X+5Y+6Z &= 6 \\ 7X+8Y+9Z &= 7 \end{cases}$$

EXERCICE 3.7. Par la méthode des exercices précédents, résoudre :

$$\begin{cases} X+3Z+T &= 5 \\ 4X+Y+2Z &= 2 \\ -X+8Y+9Z+5T &= 3 \\ -Z+T &= 1 \end{cases}$$

EXERCICE 3.8. Montrez que le système

$$\begin{cases} X+3Z+T &= 1 \\ 4X+Y+2Z &= 2 \\ -X+4Y+9Z+5T &= 3 \\ -Z+T &= 1 \end{cases}$$

admet une unique solution, puis calculez-la par la méthode du pivot de Gauss.

EXERCICE 3.9. Montrez que le système

$$\begin{cases} X+2Y+Z &= 0 \\ 2X+Y+4Z+3T &= 1 \\ X+2Z+2T &= 2 \\ 3X+2Y+Z+2T &= 3 \end{cases}$$

admet une unique solution, puis calculez-la par la méthode du pivot de Gauss.

EXERCICE 3.10. 1. Résoudre, par la méthode du pivot, et en écrivant les opérations effectuées sous la forme

$$L_i \to L_i + C^{te} L_j,$$

les systèmes suivants

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} 2x + 2y + z = 9 \\ y - 2z = -4 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + 3y - z - t = 2 \\ y - 2z + 3t = 2 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

2. Peut-on prévoir le nombre de solutions du système :

$$(S_4) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 2z = -2 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$$

## III.2 Systèmes rectangulaires

EXERCICE 3.11. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on considère

$$(S_1) \begin{cases} x+2y &= 3 \\ 2x-y &= 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x-y &= 3 \\ -x+y &= -3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x-6y &= 2 \\ -x+2y &= -2 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} -x-3y &= 1 \\ 2x+6y &= 0 \end{cases}$$

Déterminez l'ensemble solution de ces systèmes, en précisant leurs représentations géométriques.

Exercice 3.12. Faire comme dans l'exercice précédent, avec les systèmes

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y &=& 8 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 1 \\ -x+y &=& -1 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 1 \\ 2x-3y &=& 2 \\ -x-2y &=& -2 \end{array}\right. \quad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 3 \\ 2x-y &=& 2 \end{array}\right.$$

Exercice 3.13. On se place dorénavant dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminez l'ensemble solution des systèmes

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 3 \\ x-z &=& 2 \\ y+z &=& 0 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 2 \\ x+y &=& 3 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y &=& 3 \\ x+y+z &=& 1 \\ 3x+z &=& 4 \end{array}\right. \quad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3.14. Résoudre les systèmes de $\mathbb{R}^5$ suivants

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+t &=& 1 \\ 2x-y+z+t+u &=& 0 \\ x-y+z+u &=& 3 \\ -x-y+z-t &=& 2 \\ y-u &=& 5 \end{array}\right.$$

et

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x-2y-z+u &=& -1 \\ y-2z+t &=& 0 \\ x+y+z+t+u &=& 5 \\ t-2u &=& 0 \\ y+z+t &=& 3 \end{array}\right.$$

## III.3 Systèmes à paramètres

Exercice 3.15. Résoudre les systèmes suivants en discutant, s'il y a lieu, en fonction des valeurs des paramètres réels :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcl} x &+& 2y &=& 5 \\ x &+& 3y &=& 5 \\ x &+& 7y &=& \beta \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& \alpha z &=& 0 \\ x &+& \alpha y &-& z &=& 0 \\ x &+& (\alpha+1)y &+& 2z &=& 0 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x &+& y &-& z &=& 1 \\ x &+& \alpha y &-& z &=& \alpha \\ x &+& y &+& \alpha z &=& \alpha^2 \end{array}\right.$

Exercice 3.16. Discuter, en fonction de $m$, du nombre de solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &-& my &+& m^2z &=& 2m \\ mx &-& m^2y &+& mz &=& 2m \\ mx &+& y &-& 3m^2z &=& 1-m \end{array}\right.$$

Le résoudre à l'aide de l'algorithme du pivot.

Exercice 3.17. Discuter, en fonction de $(a,b,c)$, du nombre de solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& ay &+& bz &=& a \\ x &+& by &+& az &=& b \\ ax &+& y &+& bz &=& a \\ bx &+& y &+& az &=& b \end{array}\right.$$

# Chapitre 4

# Notion de déterminant

## I Déterminant de petites tailles (<4)

### I.1 Déterminant de taille 1

Il est noté $|a|$ et vaut $a$.

Exemple 4.1. $|2| = 2$

### I.2 Déterminant de taille 2

Il est noté

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

et vaut $ad - bc$, soit “la diagonale descendante moins la diagonale montante”.

Exercice 4.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad et \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

### I.3 Déterminant de taille 3

De même, il est noté

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

et vaut $aei + dhc + bfg - gec - ahf - dbi$, soit à nouveau les diagonales descendantes moins les diagonales montantes.

Exercice 4.3. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}, \quad et \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Ainsi, si les coordonnées sous (ou sur) la diagonale sont nulles, alors le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux (ce résultat reste vrai, quelle que soit la taille du déterminant.)

### I.4 Exercices

Exercice 4.4. Calculez

$$a. \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad b. - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad c. \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$$

Exercice 4.5. Calculez les déterminants suivants :

$$a. \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \quad b. \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad c. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad d. \begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 4.6. Calculez

$$a. \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}, \ b. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \text{ et } c. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.7. Calculez

$$a. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \ b. \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } c. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

Exercice 4.8. Calculer

$$a. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \ b. \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix}$$

## II Cas général

Attention, la *règle de Sarrus* ("les diagonales descendantes moins les diagonales montantes") ne marche que pour les déterminants de taille inférieure ou égale à 3.

Pour calculer un déterminant $\Delta$ de taille $n$, on se base sur le résultat dit de "développement d'un déterminant suivant une colonne", que l'on illustre sur un exemple...

On choisit une fois pour toute une colonne $j_0$, de préférence celle qui contient le plus de 0. On applique alors l'algorithme $S \leftarrow 0$

pour $i$ de 1 à $n$ faire

$S \leftarrow S + a_{i,j_0}(-1)^{i+j_0}$ x "le déterminant obtenu en enlevant la ligne $i$ et la colonne $j_0$ à $\Delta$".

Exercice 4.9. Calculez

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Cet algorithme, appliqué à un déterminant ayant une colonne avec un seul élément non nul, est complété en une seule étape :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Le but est donc de se ramener à la forme de gauche.

Pour se ramener à la forme désirée, on utilise le fait que :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exercice 4.10. En déduire que si deux lignes d'un déterminant sont égales, alors ce déterminant est nul.

donc, quand on intervertit deux lignes quelconques, le déterminant est changé en son opposé.) De plus,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

EXEMPLE 4.11.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \; et \; \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Enfin, on peut remplacer une $ligne_i$ quelconque, par $ligne_i -$"*une combinaison linéaire des autres lignes*" :

EXEMPLE 4.12. Faisons $ligne_2 \leftarrow ligne_2 - 4\ ligne_1$ dans le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Reste alors à faire $ligne_3 \leftarrow ligne_3 - 7\ ligne_1$ pour obtenir la forme souhaitée.

Pour finir ce paragraphe, remarquons que tous ces résultats, sur les lignes d'un déterminant, s'appliquent aussi aux colonnes des déterminants.

EXERCICE 4.13.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \; et \; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

## II.1 Exercices

### II.1.1 Déterminants de taille fixée

EXERCICE 4.14. Donnez la valeur des déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 4.15. Calculez le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 4.16. Calculez

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 9 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 4.17. Donnez la valeur de

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 4.18. Soit
$$A = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$
où $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Calculez $A^TA$, et en déduire det(A) et $A^{-1}$.

### II.1.2 Déterminants de taille quelconque

Exercice 4.19. Calculez $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 4.20. Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$
(On pourra faire, pour i de 2 à n : $L_i \longleftarrow L_i - L_1$.)

Exercice 4.21. Calculez $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$
(On pourra faire, pour i de 2 à n : $C_i \longleftarrow C_i - C_{i-1}$.)

Exercice 4.22. Calculez $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 4.23 (Van der Monde).

1. Calculez $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix}$ $V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$
2. De même pour $V_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$
3. En déduire une valeur possible de $V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_4^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ et vérifier par récurrence que cette valeur convient.

# III Application du déterminant aux SEL

## III.1 Nombre de solutions du SEL

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

admet une unique solution si, et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

(le déterminant est nul si, et seulement si :
– ou bien il n'y a pas de solution,
– ou bien il y a une infinité de solutions.)
Bref, le déterminant permet de déterminer le nombre de solutions d'un SEL.

## III.2 Formule de Cramer (pour les petits systèmes)

On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} aX + bY & = & c \\ dX + eY & = & f \end{array}\right.$$

On suppose que $a, b, c, d, e, f$ sont choisis de telle sorte que le SEL admette une unique solution $(X_0, Y_0)$. Alors :

$$X_0 = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}, \; et \; Y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Exemple 4.24. Le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} X + 2Y & = & 3 \\ 4X + 5Y & = & 6 \end{array}\right.$$

a un déterminant valant -3. Il admet donc une unique solution, qui vaut :

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5*3 - 6*2}{1*5 - 4*2} = -1, \; et \; Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1*6 - 4*3}{1*5 - 4*2} = 2$$

On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} aX + bY + cZ & = & 3 = \alpha \\ dX + eY + fZ & = & \beta \\ gX + hY + iZ & = & \gamma \end{array}\right.$$

et on suppose que le système admet une unique solution, c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

alors on a

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \beta & e & f \\ \gamma & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\ et\ Y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha & c \\ d & \beta & f \\ g & \gamma & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\ et\ Z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ d & e & \beta \\ g & h & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Exemple 4.25. Le système

$$\begin{cases} 2X + 2Y + 3Z &= 1 \\ 4X + 5Y + 6Z &= 1 \\ 7X + 8Y + 9Z &= 1 \end{cases}$$

a un déterminant valant -3. Il admet donc une unique solution, qui vaut :

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{1*5*9+1*8*3+1*2*6-1*5*3-8*6*1-1*2*9}{2*5*9+4*8*3+7*2*6-7*5*3-8*6*1-4*2*9}$$

$$= \frac{0}{-3} = 0,\ et$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{2*1*9+1*4*3+7*1*6-1*7*3-2*6*1-1*4*9}{2*5*9+4*8*3+7*2*6-7*5*3-8*6*1-4*2*9}$$

$$= \frac{3}{-3} = -1,\ et$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{2*5*1+4*8*1+2*1*7-7*5*1-8*1*2-4*2*1}{2*5*9+4*8*3+7*2*6-7*5*3-8*6*1-4*2*9}$$

$$= \frac{-3}{-3} = 1$$

Le résultat subsiste pour des déterminants de taille supérieure : en cas de solution unique $(x_1, \ldots, x_n)$ au système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dot{a}_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dot{a}_{2,n}x_n &= b_2 \\ \qquad\qquad . & . \quad . \\ \qquad\qquad . & . \quad . \\ \qquad\qquad . & . \quad . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dot{a}_{n,n}x_n &= b_n \end{cases}$$

on a : $\forall j : x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, où $\Delta$ est le déterminant associé au système, et $\Delta_j$ est ce même déterminant auquel on a remplacé la $j^{ieme}$ colonne par le second membre, soit :

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Cependant, cette méthode génère vite un trop grand nombre de calculs pour l'ordinateur (et, a fortiori, pour l'être humain).

## III.3 Exercices

Exercice 4.26. Résoudre les systèmes suivants avec la méthode des déterminants (formules de Cramer) :

$$a. \left\{ \begin{array}{rcl} X+2Y & = & 3 \\ X+5Y & = & 1 \end{array} \right. \qquad b. \left\{ \begin{array}{rcl} X+Y & = & -1 \\ X & = & 6 \end{array} \right.$$

$$c. \left\{ \begin{array}{rcl} X+2Y & = & 1 \\ -X+3Y & = & 1 \end{array} \right. \qquad d. \left\{ \begin{array}{rcl} X+2Y & = & 1 \\ -3X+-6Y & = & -3 \end{array} \right.$$

Exercice 4.27. Même exercice avec :

$$a. \left\{ \begin{array}{rcl} X+2Y & = & 5 \\ 3X+4Y & = & 6 \end{array} \right. b. \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & -1 \\ -X-Y & = & -3 \end{array} \right. c. \left\{ \begin{array}{rcl} 2X+2Y & = & 1 \\ X+Y & = & 1 \end{array} \right.$$

**Exercice 8 :**
A l'aide des déterminants, discuter du nombre de solutions des systèmes suivants. En cas d'unicité, les trouver.

$$a. \left\{ \begin{array}{rcl} X+2Y+3Z & = & 5 \\ 4X+5Y+6Z & = & 6 \\ 7X+8Y+9Z & = & 7 \end{array} \right. b. \left\{ \begin{array}{rcl} 2X+2Y+3Z & = & 1 \\ 4X+5Y+6Z & = & 1 \\ 7X+8Y+9Z & = & 1 \end{array} \right. c. \left\{ \begin{array}{rcl} 2X+2Y+3Z & = & 5 \\ 4X+5Y+6Z & = & 6 \\ 7X+8Y+9Z & = & 7 \end{array} \right.$$

Exercice 4.28. Par la méthode des exercices précédents, résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X+3Z+T & = & 5 \\ 4X+Y+2Z & = & 2 \\ -X+8Y+9Z+5T & = & 3 \\ -Z+T & = & 1 \end{array} \right.$$

# Chapitre 5

# Matrices

## I Opérations élémentaires

### I.1 Présentation

Les matrices sont, en gros, des tableaux à deux entrées, que l'on met entre parenthèses. En voici quelques exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Il existe quelques opérations élémentaires sur les matrices, qu'il faut connaître : l'addition et la soustraction de deux matrices de même taille, la multiplication de deux matrices (éventuellement de tailles différentes, mais sous certaines conditions), et la multiplication d'un nombre (un “scalaire”) par une matrice.

### I.2 Addition matricielle

Les deux matrices que l'on souhaite additionner doivent avoir la même taille (c'est-à-dire le même nombre de lignes et de colonnes.) Les matrices ne doivent pas forcément être carrées. Cette addition est toute simple : elle s'effectue terme à terme, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$$

### I.3 Soustraction matricielle

De même, la soustraction de deux matrices (de même taille) s'effectue terme à terme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.1. Effectuer les opérations suivantes : $A+B$, $B-C$ et $A-B-C$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 4 & -1 & 11 & 8 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 2 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & 9 \\ 8 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.2. On considère

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ g & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Effectuer, quand c'est possible : $K_1 + K_2$ ; $K_1 - K_2$ ; $K_2 + K_1$ ;$K_3 + K_2$ et $K_3 + K_4$.

On remarquera au passage que l'addition de deux matrices est commutative : quelles que soient les matrices $M$ et $N$ (de même taille), on a $M + N = N + M$.

Exercice 5.3. Faire $A + B$, $2A$ et $3B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.4. Effectuer les opérations suivantes : $A + B$ et $A - B - C$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 4 & -1 & 11 & 8 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 2 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & 9 \\ 8 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

### I.4 Transposée

### I.5 Multiplication matricielle

Attention : NE JAMAIS MULTIPLIER TERME A TERME ! La multiplication matricielle c'est un peu plus compliqué.

Il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égale au nombre de lignes de la seconde, pour pouvoir effectuer le produit matriciel.

Voici le produit pour une matrice de taille 2x3 par une matrice 3x2 :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} \end{pmatrix}$$

On généralise aisément aux autres tailles de matrices. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*5+2*7 & 1*6+2*8 \\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Cette fois-ci, le produit matriciel n'est pas commutatif : M*N n'est pas N*M, en général.

Ainsi

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*1+6*3 & 5*2+6*4 \\ 7*1+8*3 & 7*2+8*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.5. On reconsidère les matrices $K_1, K_2, K_3$ et $K_4$ de l'exercice précédent. Effectuez tous les produits possibles entre ces matrices.

Les matrices (rectangulaires $mxn$) n'ayant que des zéros sont appelées matrices nulles de taille $mxn$, et sont notées $0_{m,n}$. Elles sont un peu comme le 0 pour l'addition des nombres : quelle que soit la matrice M de taille $mxn$, on a M+$0_{m,n} = 0_{m,n}$.

Les matrices carrées (de taille $n$) ayant des 1 sur la diagonale, et des 0 partout ailleurs, sont dites matrices identités de taille n, et sont notées $I_n$. Elles sont un peu comme le 1 pour la multiplication des nombres : quelle que soit la matrice M (eventuellement rectangulaire) à $n$ colonnes, on a : $M * I_n = M$, et quelle que soit la matrice M (eventuellement rectangulaire) à $n$ lignes, on a : $I_n * M = M$.

Exemple 5.6.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.7. Trouvez deux matrices 2x2 telles que leur produit soit nul, sans qu'aucune des deux ne le soit. Trouvez aussi deux matrices de tailles 2x2, différentes de $I_2$, et telles que leur produit soit égal à l'identité.

Exercice 5.8. Faire de même avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.9. Idem pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.10. Calculez $AB$ et $BA$ pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.11. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $B$ telle que $A = BC$.

Exercice 5.12. Soient $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez $AI_2$, $I_2A$, $BI_2$, $I_2B$, $CI_3$, $I_3C$.

Exercice 5.13. Calculez $AB, AC$ et $CD$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.14. On considère $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ g & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Effectuez : $K_1 + K_2$ ; $K_1 \text{x} K_2$ ; $K_2 \text{x} K_1$ ;$K_3 \text{x} K_4$ et $K_1 \text{x} K_3$.

Exercice 5.15. Calculez les produits

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

### I.6 Multiplication d'un nombre (scalaire) et d'une matrice

Il suffit de multiplier tous les coefficients de la matrice par ledit nombre.

Exemple 5.16.

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 666 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.17. Calculez $7A$ pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.18. Soient les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Trouvez $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $aA + bB + cC = 0$.

### I.7 Puissances de matrices

Pour les matrices carrées, on a la notation puissance : $M^3 = M * M * M$, par exemple, et on convient que la puissance 0 de toute matrice carrée est la matrice nulle ayant même taille.

Exercice 5.19. Calculez $A^n$, puis $B^n$, pour n=1,2,3 puis 4, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Une idée d'une formule générale ?

Exercice 5.20. On donne la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire $A$ sous la forme $I_3 + J$, et en déduire $A^n$

Exercice 5.21. Calculez $(A + A^T)^2$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 5.22. Calculez $A^n$, puis $B^n$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.23. On donne la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire $A$ sous la forme $I_3 + J$, et en déduire $A^n$.

Exercice 5.24. On se donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire $A$ sous la forme $I_3 + J$, et en conclure $A^n$.

Exercice 5.25. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2, B^3, B^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5.26. On se donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3$, $B^2$ et $C^4$.
2. Donner les valeurs de $A^n$, $B^n$ et $C^n$, pour $n$ quelconque, en justifiant vos prévisions à l'aide d'une démonstration mathématique (on pourra faire intervenir, selon les cas, une récurrence, ou la formule du binôme de Newton.)

### I.8 Exercices

Exercice 5.27. Vrai ou faux ? Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$a.A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b.\forall n, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$c.A$ est inversible, $\qquad$ $d.\forall n, A^n = nA$,

$e.A * \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.28. Trouvez deux matrices 2x2 telles que leur produit soit nul, sans qu'aucune des deux ne le soit

Exercice 5.29. Trouvez toutes les matrices carrées de taille 2 telles que

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A$$

Exercice 5.30. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trouvez les matrices $B \in \mathrm{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ telles que $BC = A$.

Exercice 5.31. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $B$ telle que $A = BC$.

Exercice 5.32. Trouvez $X$ tel que $AX = XA$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.33. On se donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$. Effectuez tous les produits matriciels possibles (à deux opérandes.)

Exercice 5.34. Montrez que le produit de deux matrices triangulaires supérieures, est triangulaire supérieure.

Exercice 5.35. Vrai ou faux ? On se donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$a.A + B$ est impossible. $\qquad$ $b.A + B$ est impossible.

$c.A * B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $d.B * A = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$

$e.A * B - B * A = O_2$

## II Inverse d'une matrice, systèmes linéaires

### II.1 Lien avec les systèmes linéaires

On se donne les matrices $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ telle que

$$AX = B$$

revient à trouver $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire à trouver $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ et \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ et \\ \vdots \\ et \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array}$$

C'est-à-dire à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n & = & b_p \end{array} \right.$$

## II.2 Inverse d'une matrice carrée

dans ce qui suit, on fait l'amalgame entre une fonction (application linéaire) et sa matrice représentative.

Après une homothétie $H_2$ de centre $O$, rapport 2 (zoom x2), l'homothétie de centre $O$, rapport $\frac{1}{2}$ renvoie les points à leur position d'origine. On dit que $H_{\frac{1}{2}}$ est l'application inverse de $H_2$, et on a

$$H_2X = Y \Leftrightarrow H_{\frac{1}{2}}Y = X$$

De même, si on translate d'un vecteur $-\overrightarrow{u}$ après avoir translaté d'un vecteur $\overrightarrow{u}$, on retombe sur le point d'origine : ces deux applications sont inverses l'une de l'autre.

$$T_{\overrightarrow{u}}X = Y \Leftrightarrow T_{-\overrightarrow{u}}Y = X$$

Toutes les application ne sont cependant pas inversibles : si on considère l'application $f$ qui envoie tout vecteur $\overrightarrow{u}$ sur le vecteur nul $\overrightarrow{0}$, alors on ne peut pas trouver d'application réciproque :

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \overrightarrow{0}$$

...si une telle fonction $g$ existait, on aurait alors

$$g(\overrightarrow{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Absurde !

Exercice 5.36. D'après vous, parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont inversibles ?

1. rotation de centre $A$, angle $\frac{\pi}{4}$,

2. projection sur l'axe $Ox$,

3. symétrie de centre $A$.

Pour trouver l'inverse d'une matrice, il suffit de résoudre un système : l'inverse de la matrice $A$ est la seule matrice $M$ vérifiant

$$AX = Y \Leftrightarrow Y = MX$$

D'où la méthode pour trouver l'inverse $A^{-1}$ de A, illustrée sur un exemple :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

à inverser. Alors :

$$\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 4x_3 & = & y_1 \\ 2x_2 + 5x_3 & = & y_2 \\ 3x_3 & = & y_3 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_3 & = & \frac{1}{3} y_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} y_2 - \frac{5}{2} x_3 = \frac{1}{2} y_2 - \frac{5}{6} y_3 \\ x_1 & = & y_1 - 4x_3 = y_1 - \frac{4}{3} y_3 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

...de la forme $X = A^{-1}Y$, donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## II.3 Exercices

Exercice 5.37. Trouver les inverses des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toutes les matrices (et donc toutes les applications linéaires) ne sont pas inversibles, comme on l'a vu. En fait, une matrice $A$ est inversible si et seulement si on peut inverser le système $AX = Y$ (c'est-à-dire s'il a une unique solution.)

Exercice 5.38. Dire si les matrices suivantes sont inversibles (et, si oui, calculer leur inverse) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.39. Soit $A$ une matrice inversible, d'inverse $A^{-1}$. D'après vous, que valent $AA^{-1}$ et $A^{-1}A$ ?

Propriété 5.1. Etant donné une matrice $A$. Si l'on peut trouver une matrice $M$ telle que $AM = I$, alors $A$ est inversible, d'inverse $M$.

Exercice 5.40. Inversez les matrices $A = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.41. Inversez les matrices (si c'est possible) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.42. Inversez $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.43. Inversez la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.44. Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.45. Soit $A$ une matrice inversible, d'inverse $A^{-1}$. D'après vous, que valent $AA^{-1}$ et $A^{-1}A$ ?

Exercice 5.46. Vrai ou faux ? Soit $A$ une matrice inversible, d'inverse noté $A^{-1}$. Alors

1. $A * A^{-1} = A^{-1} * A$,
2. $A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,
3. $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
4. $A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
5. $A^{-1}$ est inversible d'inverse $A$.

Exercice 5.47. Vrai ou faux ? La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. admet pour inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.
2. admet pour inverse $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$.
3. admet pour inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
4. admet pour inverse $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
5. n'est pas inversible.

Exercice 5.48. Montrez que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle qu'il existe $a$ et $b$ vérifiant $(A - aI_3)(A - bI_3) = 0$. En déduire $A^n$, pour $n \in \mathbf{N}^*$. Montrez que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, calculer $(P^{-1}AP)^n$, pour $n \in \mathbf{N}$, et en déduire $A^n$.

# III Applications des matrices à la géométrie

## III.1 Matrices et transformations du plan

Les matrices permettent de faire quelques transformations dans le plan et dans l'espace, du genre : rotations, homothéties (effet de zoom), symétries (effet miroir, etc.) et translations.

Composer de telles transformations (faire une homothétie puis une rotation), revient à effectuer des produits matriciels.

### III.1.1 Matrices de rotation

La matrice de la rotation de centre $O$ (l'origine du plan), et d'angle $\theta$, est de la forme suivante :

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Inversement, toute matrice de cette forme, est une matrice de rotation.

Exercice 5.49. Ecrire les matrices des rotations de centre $O$, et d'angle $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ ( : quart de tour), $\pi$ ( : demi-tour) et $\frac{3\pi}{2}$ ( : quart de tour, dans le sens anti-trigonométrique.)

Si on veut l'image du point $M(x, y)$ par la rotation $r_\theta$ de centre $O$ (l'origine du plan), et d'angle $\theta$, il suffit d'effectuer le produit :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercice 5.50. On veut tourner un carré d'un huitième de tour par-rapport à son centre.
On considère les points $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$ et $D(1, -1)$.

1. Les représenter dans le plan (muni d'un repère orthonormé direct).
2. Ecrire la matrice de rotation qui convient.
3. Calculer les images $A'$, $B'$, $C'$ et $D'$ des points $A$, $B$, $C$, $D$, puis les représenter sur la figure.

On appelle déterminant d'une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

le nombre a*d-b*c. On le note

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exercice 5.51. Calculer les déterminants des matrices de rotation de l'exercice 1.
Qu'en concluez-vous ?

En fait, une matrice de rotation (du plan ou de l'espace) aura toujours un déterminant égal à 1. La réciproque n'est pas vraie : il existe des matrices 2x2, de déterminant égal à 1, et qui ne sont pas des matrices de rotation.

Exercice 5.52. Trouvez une matrice 2x2 dont le déterminant est égal à 1, mais qui n'est pas une matrice de rotation.

Exercice 5.53. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des rotations ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.54. Soit $r_\theta$ la matrice de rotation d'angle $\theta$. Comparez $r_{\theta_1} * r_{\theta_2}$ et $r_{\theta_1+\theta_2}$. Conclusion ?

### III.1.2 Matrices d'homothétie

Les homothéties de centre $O$, rapport $\lambda$, sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Quels sont les effets visibles d'une telle transformation ? Prenons un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et appliquons-lui une homothétie de rapport 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

...le vecteur a doublé de taille. On a fait un zoom x 2. (De même, une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$ renverra une image trois fois plus petite que l'originale.)

Exercice 5.55. On reprend le carré de l'exercice ? ? ?.
1. Diminuez de moitié la taille du carré $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ (en utilisant une matrice d'homothétie M adéquat.)
2. Diminuez de moitié la taille du carré $A$, $B$, $C$, $D$, puis faites subit au carré ainsi obtenu, une rotation d'un huitième de tour (en utilisant une matrice de rotation N.)
3. Calculez M*N, puis N*M...on trouve dans les deux cas la même matrice, que l'on note P.
4. Appliquez la matrice P au carré $A$, $B$, $C$, $D$. On s'apperçoit que l'on retombe sur le carré obtenu en 1., et en 2.

Conclusions : d'abord, quand on a des rotations et des homothéties à faire, l'ordre importe peu (ce qui se voit sur le produit matriciel, qui dans ce cas est commutatif : on peut commuter l'ordre dans lequel on fait ces opérations.)
Ensuite : la composition d'une rotation et d'une homothétie, c'est le produit des matrices correspondantes (d'où une utilité du produit matriciel) Quand on a plusieures opérations à faire, on multiplie donc les matrices correspondantes, et on applique la matrice ainsi obtenue à nos vecteurs.

Exercice 5.56. Comparez $r_{\theta_1} * r_{\theta_2}$ et $r_{\theta_1+\theta_2}$. Conclusion ?

### III.1.3 Matrices de symétrie

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ envoie le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

On a donc affaire à une symétrie d'axe $Oy$ ( c'est l'effet miroir.)

Exercice 5.57. On considère les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
A quelles symétries correspondent-elles ? Quels sont les effets apparents sur une image donnée ?

Bien évidemment, on peut composer la symétrie avec les rotations et les homothéties. Cela revient à faire des multiplications de matrices.

EXERCICE 5.58. 1. Ecrire la matrice de la composition d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ par une symétrie d'axe $Ox$.
1. Ecrire la matrice de la composition d'une symétrie d'axe $Ox$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.
3. Conclure.

### III.1.4 Matrices de translation

La matrice de translation (du plan) de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vraiment on veut travailler avec de telles matrices, il faut mettre tout ce qui précède (matrices et vecteurs) en coordonnées homogènes.

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ ; la matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ s'écrit dorénavant $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{matrix}$
et on procède de même pour les autres matrices (homothétie, symétrie, etc.) : on rajoute une ligne de 0 en bas, une colonne de 0 à droite, et un 1 en bas à droite.

Par exemple, si on veut déplacer le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de deux unités vers la droite ( : une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$), puis renverser le vecteur obtenu (symétrie par-rapport à l'axe $Ox$), on effectue le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur image est donc $\begin{pmatrix} x+2 \\ -y \end{pmatrix}$.

### III.1.5 Exercices

EXERCICE 5.59. On considère le carré ABCD du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où $A(1;1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;-1)$ et $D(1;-1)$.

1. Faites subir à cette figure une rotation d'un quart de tour, de centre $O$.

2. Faire de même en prenant $A$, puis $B$, pour centre de la rotation.

3. Effectuer respectivement les symétries d'axe $0x$ (renversement de figure), $Oy$ ("effet miroir") et suivant la première bissectrice $y = x$.

4. Faire une homothétie de centre 0, rapport 2 (zoom x2).

EXERCICE 5.60. On considère les points $A(0,1)$, $B(-1,-1)$, et $C(-1,-1)$.

1. Les représenter dans le plan (muni d'un repère orthonormé direct.)
2. Effectuer la rotation de centre $A$, d'un quart de tour.
3. Faire les symétries d'axe $Ox$, $Ax$, et $By$.

EXERCICE 5.61. On considère le losange $ABCD$ du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où $A(0;0)$, $B(1;-1)$, $C(2;0)$ et $D(1;1)$.

1. Déterminez l'image de ce losange par la rotation d'un quart de tour, centre $A$. Faire de même avec $C$ comme centre de rotation (même angle de rotation.)

2. Quelle est l'image de $ABCD$ par une homothétie de centre 0, rapport 2 ?

3. Calculez l'image du losange $ABCD$ par la symétrie d'axe $(AD)$.

Exercice 5.62. Vrai ou faux ?
On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soit $A(x_A, y_A)$ un point de ce plan. Alors, pour obtenir l'image d'un point $M$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par la rotation de centre $A$, angle $\theta$

1. on fait $\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

2. on calcule (en coordonnées homogènes) la matrice $R_{A,\theta}$ de cette rotation, en procédant ainsi :

$$R_{A,\theta} = T_{\overrightarrow{AO}} * R_{0,\theta} * T_{\overrightarrow{OA}}$$

(où $T_{\overrightarrow{u}}$ désigne la matrice de translation de vecteur $\overrightarrow{u}$), puis on fait $R_{A,\theta} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

3. on calcule (en coordonnées homogènes) la matrice $R_{A,\theta}$ de cette rotation, en procédant ainsi :

$$R_{A,\theta} = T_{\overrightarrow{OA}} * R_{0,\theta} * T_{\overrightarrow{AO}}$$

puis on fait $R_{A,\theta} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

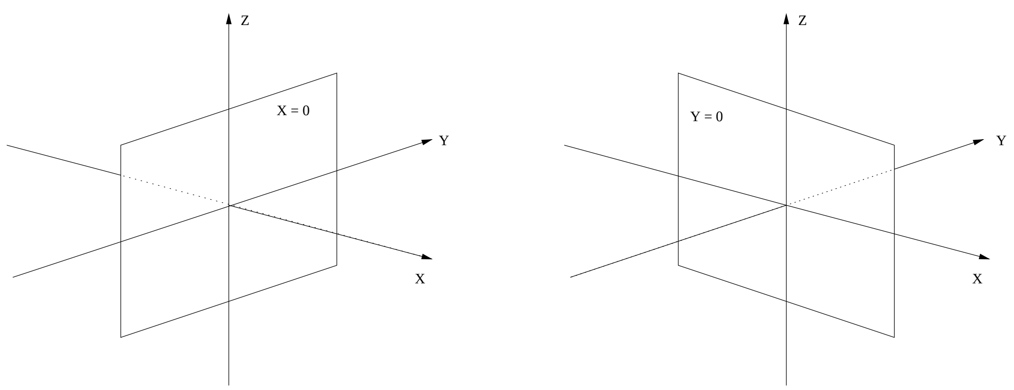
4. avec les notations précédentes, on calcule $M_1 = T_{\overrightarrow{AO}} M$, puis $M_2 = R_{0,\theta} M_1$, d'où l'image $P$ de $M$ : $P = T_{\overrightarrow{OA}} M_2$

5. On calcule l'image de $A$ par la rotation de centre $O$, angle $\theta$, que l'on translate suivant un vecteur $\overrightarrow{OA}$.

## III.2 Matrices et transformations de l'espace

### III.2.1 Rappels sur les équations de droites

$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$ est l'équation d'une droite dans l'espace. En effet, x = 0 est le plan de tous les points de l'espace qui ont une abscisse nulle, et y = 0 est le plan des points de l'espace ayant une ordonnée nulle.




On a donc affaire à l'intersection de ces deux plans, à savoir la droite (Oz).
D'une manière générale, un plan de l'espace a pour équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

Et quand on prend l'intersection de deux plans

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by+cz+d & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & = & 0 \end{array}\right.$$

...on trouve une droite.

Il y a deux exceptions. En effet, les plans x+y = 1 et 2x+2y = 2 sont confondus, donc l'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 2x+2y & = & 2 \end{array}\right.$ est un plan.

L'autre exception, c'est quand les plans sont parallèles (et non confondus) : il n'y a alors pas de point d'intersection.
ex : $\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ est l'ensemble vide.

Exercice 5.63. Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des droites ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ 2x+4y & = & 6 \end{array}\right.$$

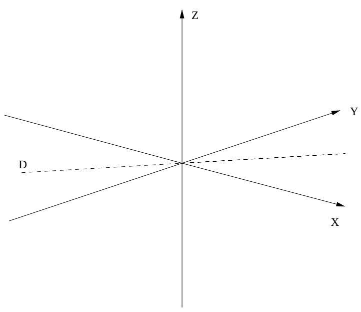
Remarque 5.2. Tout se passe comme dans le plan : $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$ est l'intersection de deux droites, ce qui est en général un point...mais peut aussi être une droite, ou l'ensemble vide.

### III.2.2 Rotations dans l'espace

Dans le plan, les rotations se font autour d'un point. Dans l'espace, autour d'une droite. Il suffit de connaître les matrices de rotation d'axe $Ox$, $Oy$ et $Oz$ pour faire n'importe quelle rotation de l'espace :

$$rotation : \underset{\text{axe Ox}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cosx & -sinx \\ 0 & sinx & cosx \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{axe Oy}}{\begin{pmatrix} cosx & 0 & sinx \\ 0 & 1 & 0 \\ -sinx & 0 & cosx \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{axe Oz}}{\begin{pmatrix} cosx & -sinx & 0 \\ sinx & cosx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

En effet, pour effectuer (par exemple) une rotation d'axe $(D)$ $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0' \end{array}\right.$ et d'angle $\theta$...




On fait une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, d'axe $Oz$, donc $D$ se trouve en $(0Y)$. On applique ensuite la rotation d'angle $\theta$, axe $(Oy)$, puis la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$, et d'axe $(Oz)$.

Exercice 5.64. On considère la pyramide A(1 ;-1 ;0), B(1 ;1 ;0), C(-1 ;0 ;0) et D(0 ;0 ;1).
1. La représenter.
2. La faire tourner de $\pi$ autour de $(Oz)$, projeter orthogonalement la figure obtenue sur le plan $xOz$, sensé représenter l'écran.
3. Faire tourner la figure obtenue autour de $(Ox)$. Projeter de même que précédemment.

### III.2.3 Quesques autres transformations

L'homothétie de centre O, rapport $\lambda$, a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour effectuer une symétrie par-rapport à un plan $P$ donné, on amène $P$ sur l'un des trois plans de référence ($xOy$, $xOz$, $yOz$) grâce à des rotations bien choisies, on effectue la symétrie voulue :

$$\text{symétrie de plan :} \quad \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ xOy & xOz & yOz \end{array}$$

et, enfin, on effectue les rotations inverses pour renvoyer $P$ (et le reste de la figure) à sa position d'origine.

Exercice 5.65. Reprendre la pyramide de l'énoncé précédent.
1. Réduire sa taille de moitié, puis projeter l'image obtenue sur le plan $xOz$.
2. Obtenir l'image de la pyramide d'origine par les symétries de plan $xOy$ et $xOz$. Les projeter orthogonalement sur "l'écran" ( : le plan $xOz$).

### III.2.4 Translations et coordonnées homogènes

Il n'y a pas de matrices de translation de l'espace, de taille 3x3. On doit passer en coordonnées homogènes, si on souhaite gérer toutes ces opérations à l'aide de produits matriciels. Voici les matrices précédentes, en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cosx & -sinx & 0 \\ 0 & sinx & cosx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosx & 0 & sinx & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sinx & 0 & cosx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosx & -sinx & 0 & 0 \\ sinx & cosx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de translation de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur position $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit dorénavant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.66. On reprend la pyramide de l'avant dernier exercice.

Lui appliquer une rotation d'axe $Bz$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Symétriser la figure obtenue, par rapport au plan $xBy$.
3. Projeter (orthogonalement) la figure obtenue sur le plan $xOz$ sensé représenter l'écran.

### III.2.5 Exercices

Exercice 5.67. On considère la pyramide A(1 ;-1 ;0), B(1 ;1 ;0), C(-1 ;0 ;0) et D(0 ;0 ;1).

1. La représenter.
2. La faire tourner de $\pi$ autour de $(Oz)$, projeter orthogonalement la figure obtenue sur le plan $xOz$, sensé représenter l'écran.
3. Faire tourner la figure obtenue autour de $(Ox)$. Projeter de même que précédemment.

Exercice 5.68. Reprendre la pyramide de l'énoncé précédent, réduire sa taille de moitié, puis projeter l'image obtenue sur le plan $xOz$. Obtenir ensuite l'image de la pyramide d'origine par les symétries de plan $xOy$ et $xOz$. Projeter le tout orthogonalement sur "l'écran" ( : le plan $xOz$).

Exercice 5.69. On reprend la pyramide de l'antépénultième exercice.

1. Lui appliquer une rotation d'axe $Bz$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Symétriser la figure obtenue, par rapport au plan $xBy$.
3. Projeter (orthogonalement) la figure obtenue sur le plan $xOz$ (l'écran.)

Exercice 5.70. On considère la pyramide $P$ de sommets A(1 ;-1 ;0), B(1 ;1 ;0), C(-1 ;0 ;0) et D(0 ;0 ;1). La représenter.

1. La faire tourner de $\pi$ autour de $(Oz)$, puis projeter orthogonalement la figure obtenue sur le plan $xOz$.
2. Obtenir l'image de la pyramide d'origine $P$ par les symétries de plan $xOy$ et $xOz$.
3. Réduire la taille de la pyramide d'origine $P$ de moitié, puis projeter l'image obtenue sur le plan $xOz$.

Exercice 5.71. Vrai ou faux ? On se donne les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, et $D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de sa base orthonormée directe.

1. l'image de cette figure par l'homothétie de centre $A$, rapport 2, est $A'\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$, $C'\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$, et $D'\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$,
2. la rotation de centre $O$, angle $\pi$, envoie $A$ en $C$, et $B$ en $D$,
3. pour calculer l'image de l'homothétie de centre $D$, rapport $\frac{1}{3}$, on effectue une translation de vecteur $\overrightarrow{DO}$, puis on divise toutes les coordonnées obtenues par 3, enfin on fait subir aux points résultants une translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$,
4. pour projeter sur le plan $xOz$, il suffit de transformer la deuxième coordonnée en son opposée.

# Chapitre 6

# Espaces vectoriels

## I Espaces vectoriels

### I.1 Définition d'un espace vectoriel

On considère :
- un ensemble E,
- une application $+ : ExE \rightarrow E$, dite *loi de composition interne*,
- une application $. : RxE \rightarrow E$, dite *loi de composition externe.*

Définition 6.1 (Espace vectoriel). On dit que le triplet (E,+,.) forme un *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ s'il vérifie les propriétés
- pour la loi de composition interne +
  1. il existe un vecteur spécial de E, noté O et appelé élément neutre, tel que pour tout vecteur x de E,
  $$O + x = x + O = x$$
  2. tout vecteur x de E possède un inverse, c'est-à-dire y de E tel que
  $$x + y = y + x = O$$
  3. la loi + est associative :
  $$\forall x, y \in E, x + (y + z) = (x + y) + z$$
  4. la loi + est commutative
  $$\forall x, y \in E, x + y = y + x$$
- pour la loi .
  1. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
  2. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
  3. $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
  4. $\forall x \in \mathbb{R}, 1.x = x$

Remarque 6.2. + est une fonction de deux variables.
Si on utilise la notation préfixe f(x,y) d'une telle fonction, l'existence d'un élément neutre s'écrit :

$$\forall x \in E, f(x, O) = f(O, x) = x$$

et l'associativité donne :

$$f(x, (f(y, z)) = f(f(x, y), z)$$

Idem pour .

## I.2 Notion de groupe

Définition 6.3 (Groupe). Un couple (E,+), où + est une loi de composition interne, qui vérifie les trois premiers axiomes de la loi + pour les espaces vectoriels (associativité, élément neutre et inverse), est appelé un *groupe*.

Définition 6.4 (Groupe abélien). Si de plus + est commutative, on parle de *groupe abélien*, ou *commutatif*.

Remarque 6.5. Un espace vectoriel (E,+,.) est donc un groupe abélien (E,+) qui vérifie de plus les quatre propriétés pour .

## I.3 Exemples d'espaces vectoriels

Exemple 6.1. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des vecteurs du plan, muni de l'addition terme a terme, et du produit d'un nombre par un vecteur :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

,

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 6.2. L'ensemble $\mathbb{R}^3$ des vecteurs de l'espace, muni des memes types d'opérations.

Exemple 6.3. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels, muni d'opérations semblables

Exemple 6.4. L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un espace vectoriel sur R, avec l'addition de deux réels, et le produit de deux réels.

Exemple 6.5. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de l'addition de deux complexes, et de la multiplication d'un réel par un complexe, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6.6. L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n$x$p$, muni de l'addition matricielle, et du produit d'un scalaire par une matrice, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6.7. L'ensemble des polynomes de degré au plus n, des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, des solutions d'un système linéaire homogène, des fonctions entre deux espaces vectoriels... sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

## I.4 Propriétés des espaces vectoriels

Propriété 6.6. L'élément neutre et l'inverse sont uniques dans un espace vectoriel.

Preuve Soient O1 et O2 deux éléments neutres, alors pour tout x de E,

$$x + O_1 = x, \text{ et } O_2 + x = x$$

or $O_2$ appartient à l'espace vectoriel E, et $O_1$ en est un élément neutre, donc

$$O_2 + O_1 = O_2$$

De mêmen, $O_1$ appartient à E, et $O_2$ en est un élément neutre, donc

$$O2_+ O_1 = O_1$$

Propriété 6.7. On obtient sans problème les propriétés suivantes : pour tout réel $\lambda$ et tout vecteur $x$, $O.x = O$ $\lambda.O = O$ $\lambda.x = O \Longrightarrow (\lambda = 0 ou x = O)$ $(-1).x = (-x)$

## I.5 Exercices

Exercice 6.8. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$

1. Montrez que toute matrice de $E$ s'écrit sous la forme $aI + bJ + cK$, où $I, J, K$ sont des matrices indépendantes de $a, b, c$.
2. Montrez que $E$ est un espace vectoriel. Donnez sa dimension.
3. Calculez $J^2, JK, KJ, K^2$, et vérifiez que $J^2 = J + I$.

Exercice 6.9. Soit $E$ l'ensemble des matrices (2,2) de la forme $\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}$, où $m, n \in \mathbf{C}$. $E$ est-il un $\mathbf{C}$-espace vectoriel ? un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ? En donner une base.

Exercice 6.10. Déterminer si $\mathbb{R}^3$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou non un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ :

1. (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) et $\lambda.(a, b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$,
2. (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) et $\lambda.(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$,
3. (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) et $\lambda.(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.11. Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. l'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit de deux réels,
2. l'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$,
3. l'ensemble des fonctions continues sur [0,1] vérifiant f(1/2)=0,
4. l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.12. On munit l'ensemble des réels strictement positifs, des opérations $x + y = xy$ et $\lambda.x = x^\lambda$. Est-ce un espace vectoriel ?

Exercice 6.13. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulle en 4,
2. l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$,
3. l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.14. L'ensemble des polynômes de degré exactement $n$ est-il un espace vectoriel ? Et qu'en est-il de celui des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7 ? Et de l'ensemble des polynômes de degré au moins $n$ (respectivement, au plus $n$) ?

Exercice 6.15. Répondre aux questions suivantes :

- On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $sin(x + y) = 0$ est-il un espace vectoriel ?
- On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ?
- On se place dans l'espace $\mathbb{R}^5$. L'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur $(3, 0 - 1, -2, 1)$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ?

Exercice 6.16. L'ensemble des solutions $(x_1, x_2, x_3)$ d'un système linéaire sans second membre, est-il un espace vectoriel ?

EXERCICE 6.17. L'ensemble des primitives de la fonction $xe^x$ forme-t-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ?

EXERCICE 6.18. Démontrez que $\mathbb{C}$, muni des opérations classiques d'addition, et de multiplication par un scalaire, forme bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6.19. Vrai ou Faux ? On considère, sur $E = \mathbb{R}^2$, les lois

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \end{pmatrix}$$

1. Il y a un élément neutre pour $\bigoplus$ dans $E$.
2. $\bigoplus$ est associative.
3. $\bigoplus$ est commutative.
4. $\lambda \bigodot (\mu \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (\lambda\mu) \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. $\bigoplus$ est une loi de composition interne.

EXERCICE 6.20. Vrai ou Faux ? On se place sur $E = \mathbb{R}_+$ (ensemble des réels positifs), où + désigne l'addition classique de deux nombres positifs. La loi

$$\bigodot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\text{x}E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda + x \end{array}$$

1. est une loi de composition interne,
2. est une loi de composition externe,
3. vérifie $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \bigodot (x + y) = \lambda \bigodot x + \lambda \bigodot y$,
4. vérifie $\forall x \in E, 1 \bigodot x = x$ ,
5. vérifie $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \bigodot (\mu \bigodot x) = (\lambda\mu) \bigodot x$.

EXERCICE 6.21. Vrai ou faux ? On considère, sur $E = \mathbb{R}^2$, les lois

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ y_1 + x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

1. $(\mathbb{R}^2, \bigoplus, \bigodot)$ est un espace vectoriel
2. $\bigoplus$ est associative.
3. $\bigoplus$ est commutative.
4. $1 \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. $(\lambda + \mu) \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bigoplus \mu \bigodot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

# II Sous-espaces vectoriels

## II.1 Défintion

PROPRIÉTÉ 6.8. Soit (E , + , . ) un R-espace vectoriel, et F inclus dans E (et non vide). Si les deux assertions suivantes sont vérifiées :
- pour tout vecteur x, y dans F, la somme x + y reste dans F,
- pour tout vecteur x dans F, et tout réel $\lambda$, le vecteur $\lambda.x$ appartient encore à F,

alors (F, + , . ) est un R-espace vectoriel.

Définition 6.9 (Sous-espace vectoriel). On dit, dans cette situation, que (F,+,.) est un *sous-espace vectoriel* de E.

Remarque 6.10. Les applications + et . de (F,+,.) sont les restriction à l'ensemble F des applications + et . de (E,+,.)

### II.2 Exercices

Exercice 6.22. Déterminez lesquels des ensembles $E_1, E_2$ et $E_3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Calculer leurs dimensions.
$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 2y = 0\}$
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 1\}$
$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$

Exercice 6.23. Déterminer lesquels des ensembles $E_1, E_2, E_3$ et $E_4$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = x + y + z = 0\}$
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y = 0\}$
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z(x^2 + y^2) = 0\}$

Exercice 6.24. On munit l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ des opérations + et . usuelles. Déterminez si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : 2g(0) = g(2)\}$
2. $E_2 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(2) = g(0) + 2\}$
3. $E_3 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g \text{ croissante}\}$
4. $E_4 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g \text{ est la différence de deux applications croissantes}\}$
5. $E_5 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g \text{ ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles}\}$

On les considèrera comme des sous-espaces vectoriels d'un espace bien choisi (ou le cas échéant, on prouvera qu'une des propriétés d'espace vectoriel n'est pas satisfaite.)

Exercice 6.25. Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\}, F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy = 0\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x + y\}, F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x^2\}$$

Exercice 6.26. Soit $\alpha$ un réel. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble $F$ des quadruplets $(x, y, z, t)$ tels que $x+y+z+t = 0$, et l'ensemble $G$ des quadruplets $(x, y, z, t)$ tels que $x + \alpha y + \alpha z + t = 0$.

1. Quelle est la nature de $F$ et de $G$ ?
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6.27. Montrer que $F_a = \{(x, y, a), x, y \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel si, et seulement si $a = 0$.

## III Familes libres, génératrices, et bases

### III.1 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 6.11 (Base, dimension). On considère une famille de vecteurs $e_1, e_2, \ldots, en$ d'un espace vectoriel E. Si la matrice constituée par les $(e_i)$ est inversible, alors on dit que $e_1, e_2, \ldots, en$ est une *base* de E, et que E est un espace vectoriel *de dimension n*.

## III.2 Exemples de bases

EXEMPLE 6.28.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$, car la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. $\mathbb{R}^3$ est donc un espace vectoriel de dimension 3.

EXEMPLE 6.29.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, en = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment pareillement une base de $\mathbb{R}^n$, qui est donc de dimension n.

## III.3 Utilité des bases

PROPRIÉTÉ 6.12. Soit $(e_1, e_2, \dots, en)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n.
Alors :
Tout vecteur x de E s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n en$$

REMARQUE 6.13. Les bases permettent donc de repérer, sans ambiguité, et avec quelques éléments, tout vecteur d'un espace vectoriel.

EXEMPLE 6.30.

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$, car la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

$\mathbb{R}^{\nvDash}$ est donc un espace vectoriel de dimension 2, et tout vecteur x du plan s'écrit, de manière unique :

$$x = \lambda i + \mu j$$

REMARQUE 6.14. Tout espace vectoriel possède une infinité de bases (si $(e_1, e_2, \dots, en)$ forme une base d'un e.v. E, alors $(2e_1, 2e_2, \dots, 2en)$ en forme aussi une).
mais toutes ces bases ont le même nombre d'éléments.

REMARQUE 6.15. Si la matrice correspondante à une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \dots, en)$ n'est pas carrée, alors parler d'inversibilité n'a aucun sens, et ces vecteurs ne forment donc pas une base.

## III.4 Familles libres

### III.4.1 Définition d'une famille libre

DÉFINITION 6.16 (FAMILLE LIBRE). On dit qu'une famille $(e_1, e_2, \dots, en)$ de vecteurs d'un ev (E,+,.) est *libre* si on a :

Pour tout réel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,
si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_n e_n = O$,
alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

### III.4.2 Exemple de famille libre

EXEMPLE 6.31. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Alors $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 0 + \lambda_2 1 = \lambda_2 = O$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ : $(e_1, e_2)$ est libre.

### III.4.3 Lien entre famille libre et base

PROPRIÉTÉ 6.17. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :
- toute famille libre de E a au plus n éléments,
- si une famille libre de E a exactement n éléments, alors c'est une base de E.

## III.5 Familles génératrices

### III.5.1 Définition d'une famille génératrice

DÉFINITION 6.18. On dit qu'une famille $(e_1, e_2, \dots, en)$ de vecteurs d'un espace vectoriel (E,+,.) est *génératrice* si on a :

Pour tout vecteur x de E, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_n e_n.$$

REMARQUE 6.19. Cela revient à dire que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des $e_i$ : ces quelques vecteurs engendrent tout l'espace.

### III.5.2 Exemple de famille génératrice

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $(\mathbb{R}^2, +, .)$. Alors tout vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de E s'écrit :

$$u = xe_1 + (y - x)e_2$$

et donc $(e_1, e_2)$ est une famille génératrice de $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

### III.5.3 Lien entre familles génératrices et bases

PROPRIÉTÉ 6.20. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :
- toute famille génératrice de E a au moins n éléments,
- si une famille génératrice de E a exactement n éléments, alors c'est une base de E.

## III.6 Bases versus libres et génératrices

Propriété 6.21. Une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est une base si, et seulement si elle est libre et génératrice :
base $\Longleftrightarrow$ libre et génératrice

Propriété 6.22.
- Toute sous-famille d'une famille libre, est libre... ainsi, toute famille libre peut se compléter en base, en ajoutant des éléments bien choisis.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice, est génératrice... ainsi, toute famille libre peut se compléter en base, en supprimant des éléments bien choisis.
- Une base est donc une famille libre maximale, ou une famille génératrice minimale.

### III.7 Exercices

Exercice 6.32. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ :

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, -2, 1), \overrightarrow{u}_2 = (1, -3, 1), \overrightarrow{u}_3 = (2, -4, 3)$$

Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ? Si oui, calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $(a, b, c)$.

Exercice 6.33. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (0, 3, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, h, 5/3)$ et $\overrightarrow{w} = (k, 1, h/3)$. Déterminer l'ensemble des couples $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base.

Exercice 6.34. Soit dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$\overrightarrow{V}_1 = (1, 0, 0, -1), \overrightarrow{V}_2 = (2, 1, 1, 0), \overrightarrow{V}_3 = (1, 1, 1, 1), \overrightarrow{V}_4 = (1, 2, 3, 4), \overrightarrow{V}_5 = (0, 1, 2, 3)$$

Extraire de ces cinq vecteurs une base du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

Exercice 6.35.
- Les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\overrightarrow{V}_1 = (2, 3, -1, 4), \overrightarrow{V}_2 = (1, -2, 3, -2), \overrightarrow{V}_3 = (3, 0, 2, 3)$$

  forment-ils une famille base ?
- Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ?

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, -1), \overrightarrow{v} = (1, 0, 1), \overrightarrow{w} = (-1, 2, -3)$$

- Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs suivants forment-ils une base ?

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, 0, -1), \overrightarrow{v} = (1, 2, 0, 1), \overrightarrow{w} = (0, -1, 2, -3)$$

Exercice 6.36. La somme de deux applications linéaires est-elle linéaire ? Qu'en est-il de leur composée ? et du produit entre un scalaire et une application linéaire ?

Exercice 6.37. Déterminez quelles sont les applications linéaires parmi les fonctions suivantes

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (x + y, x - y)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (0, 2y - x)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (y, x)$

Exercice 6.38. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (0, 2y - z, 0)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (x + 2y + 3, 2y - z, x + z)$

4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (x + 2y + 3z, 2yz, x + z)$

EXERCICE 6.39. Faire de même avec

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \to x + 2y + 3z$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \to x^2 + 2x$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \to x^2$

EXERCICE 6.40. Même question que précédemment, en se plaçant cette fois sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. $\phi_0 : E \to E$ définie par $f \to f'$
2. $\phi_1 : E \to E$ définie par $f \to 3f'' + 8f' + 5f$
3. $\phi_2 : E \to E$ définie par $f \to f'' - 2xf' + 6f$
4. $\phi_3 : E \to E$ définie par $f \to f'f$
5. $\phi_4 : E \to E$ définie par $f \to f(0) - 2f(3)$

EXERCICE 6.41. La somme de deux applications linéaires est-elle linéaire ? Qu'en est-il de leur composée ? et du produit entre un scalaire et une application linéaire ?

EXERCICE 6.42. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ :

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, -2, 1), \overrightarrow{u}_2 = (1, -3, 1), \overrightarrow{u}_3 = (2, -4, 3)$$

Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ? Si oui, calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $(a, b, c)$.

EXERCICE 6.43. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (0, 3, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, h, 5/3)$ et $\overrightarrow{w} = (k, 1, h/3)$. Déterminer l'ensemble des couples $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base.

EXERCICE 6.44. Soit dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$\overrightarrow{V}_1 = (1, 0, 0, -1), \overrightarrow{V}_2 = (2, 1, 1, 0), \overrightarrow{V}_3 = (1, 1, 1, 1), \overrightarrow{V}_4 = (1, 2, 3, 4), \overrightarrow{V}_5 = (0, 1, 2, 3)$$

Extraire de ces cinq vecteurs une base du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

EXERCICE 6.45.

1. Les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\overrightarrow{V}_1 = (2, 3, -1, 4), \overrightarrow{V}_2 = (1, -2, 3, -2), \overrightarrow{V}_3 = (3, 0, 2, 3)$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ?

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, -1), \overrightarrow{v} = (1, 0, 1), \overrightarrow{w} = (-1, 2, -3)$$

3. Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs suivants forment-ils une base ?

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, 0, -1), \overrightarrow{v} = (1, 2, 0, 1), \overrightarrow{w} = (0, -1, 2, -3)$$

EXERCICE 6.46. Vrai ou faux ? Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,

1. $(\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$,
2. $(2\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -3\overrightarrow{k})$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$,
3. $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$,
4. $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$,
5. $(\frac{1}{2}\overrightarrow{i}, -\frac{1}{2}\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 6.47. Vrai ou faux ? Dans les espaces vectoriels,

1. Une application linéaire $f$ vérifie $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = f(\lambda)f(x)$
2. Les bases ont toutes le même nombre d'éléments.

3. Si on prend les "scalaires" dans $\mathbb{R}$, on parle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si on les prend dans $\mathbb{C}$, on parle alors de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
4. Dans un espace vectoriel de dimension $n$, dès qu'on prend $n$ vecteurs différents, ils forment une base.
5. Dans un espace vectoriel de dimension $n$, dès qu'on prend $n$ vecteurs non proportionnels, ils forment une base.

EXERCICE 6.48. Montrez que $B = \{1, X + 1, (X + 1)^2\}$ est une base des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

EXERCICE 6.49. Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{R}^2, +, .)$, on considère les familles de vecteurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} F_1 = \{v_1 = (1,1)\} & F_2 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-2), v_3 = (3,4)\} \\ F_3 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-2)\} & F_4 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (-3,-3)\} \end{array}$$

Indiquez quelles sont les familles libres, génératrices de $\mathbf{R}^2$, et les bases.

# IV Applications linéaires

## IV.1 Définition

DÉFINITION 6.23 (APPLICATION LINÉAIRE). Soient (E, + , . ) et (F,+, . ) deux R-espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une *application linéaire* si elle vérifie :
1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$.

NOTATION : On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$, et L (E) si E = F (on parle d'*endomorphismes* dans ce cas).

## IV.2 Propriétés

PROPRIÉTÉ 6.25. Toute application linéaire f vérifie :

$$f(O_E) = O_F$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(\lambda_1 x1 + \lambda_2 x2 + \ldots . + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x1) + \lambda_2 f(x2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

## IV.3 Exemples

EXEMPLE 6.50. $f(x) = 2x$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 6.51. L'application

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

est linéaire.

EXEMPLE 6.52. Soit

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

alors f est linéaire (endomorphisme), car :

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= (P+Q)(X+1)\check{\ }(P+Q)(X) = P(X+1) + Q(X+1)\check{\ }P(X) - Q(X) \\ &= (P(X+1)\check{\ }P(X)) + (Q(X+1)\check{\ }Q(X)) = f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

et

$$f(\lambda.P) = (\lambda.P)(X+1)\check{\ }(\lambda.P)(X) = \lambda P(X+1)\check{\ }\lambda P(X) = \lambda P(X+1)\check{\ }\lambda P(X) = \lambda(P(X+1)\check{\ }P(X)) = \lambda f(P)$$

## IV.4 Somme et composition d'applications linéaires

PROPRIÉTÉ 6.26. Soit f et g sont deux applications linéaires, et $\lambda$ un réel, alors $f+g$, $\lambda f$ et $f \circ g$ sont encore des applications linéaires.

## IV.5 Applications linéaires et bases

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E... donc tout vecteur x de E s'écrit de manière unique

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

$f$ étant linéaire, on a

$$f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n)$$

bref, il suffit de connaitre les valeurs de la fonction f sur une base de E (sur seulement n valeurs), pour pouvoir calculer toutes les images de f (une infinité de valeurs).

## IV.6 Noyau et image

### IV.6.1 Définitions et propriétés

DÉFINITION 6.27 (NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE). On appelle *noyau* d'une application linéaire $f : E \to F$ l'ensemble

$$Ker(f) = x \text{ appartenant à E, tels que } f(x) = O$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

DÉFINITION 6.28 (IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE). On appelle *image* d'une application linéaire $f : E \to F$ l'ensemble

$$Im(f) = f(x), \text{avec x appartenant à } E$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.

### IV.6.2 Injectivité, surjectivité et bijectivité des applications linéaires

PROPRIÉTÉ 6.29. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Alors :
f est injective $\Longleftrightarrow Kerf = O$ f est surjective $\Longleftrightarrow Imf = F$

## IV.7 Exercices

EXERCICE 6.53. Déterminez quelles sont les applications linéaires parmi les fonctions suivantes

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (x + y, x - y)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (0, 2y - x)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (y, x)$

EXERCICE 6.54. Les applications suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ sont-elles des endomorphismes de $(\mathbf{R}^2, +, .)$ ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (1 + x, y)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (x^2, y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (sin(x), y)$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (x - y, 0)$

EXERCICE 6.55. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (0, 2y - z, 0)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (x + 2y + 3, 2y - z, x + z)$
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \to (x + 2y + 3z, 2yz, x + z)$

Exercice 6.56. Faire de même avec

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \to x + 2y + 3z$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \to x^2 + 2x$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \to x^2$

Exercice 6.57. Même question que précédemment, en se plaçant cette fois sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. $\phi_0 : E \to E$ définie par $f \to f'$
2. $\phi_1 : E \to E$ définie par $f \to 3f'' + 8f' + 5f$
3. $\phi_2 : E \to E$ définie par $f \to f'' - 2xf' + 6f$
4. $\phi_3 : E \to E$ définie par $f \to f'f$
5. $\phi_4 : E \to E$ définie par $f \to f(0) - 2f(3)$

Exercice 6.58. On se place sur l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. L'application

$$f : P \longmapsto 2(X + 1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$$

est-elle linéaire ?

## V Matrices et applications linéaires

Se donner une matrice, ou une application linéaire, c'est la même chose. On a le choix entre représentation fonctionnelle et matricielle : on prend celle qui nous arrange.

Plus précisément, soit $f : E \to F$ une application linéaire entre l'espace vectoriel E, muni de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et l'espace F, muni de la base $(f_1, \ldots, f_p)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{p1}f_p \\ f(e_2) & = & a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{p2}f_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(e_p) & = & a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{pn}f_p \end{array}$$

et dans ce cas, on peut écrire f (x) sous forme matricielle : soit la matrice

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & \ldots & a_{pn} \end{array}$$

alors

$$f(x) = y \Longleftrightarrow Ax = y$$

## VI Notion de valeur propre et vecteur propre

Soit A ne matrice carrée de taille n.

<u>*def :*</u>S'il existe un réel $\lambda$ et un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul tel que $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$, alors on dit que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre $\lambda$.

<u>*ex :*</u> $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 2.

Exemple 6.59. Si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre, alors $C^{te}\overrightarrow{v}$ aussi, pour toute constante.

# Chapitre 7

# Les nombres complexes

Ce cours est largement inspiré de [CCB05, LM07, Vé93, LPR96].

## I Calculs avec les nombres complexes

On définit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme le corps commutatif contenant le corps des réels et tel que

1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ ;
2. l'addition et la multiplication de $\mathbb{C}$ prolongent celles dans $\mathbb{R}$ ;
3. l'équation $z^2 = -1$ admet deux solution dans $\mathbb{C}$ notées $j$ et $-j$.

### I.1 Notations et premières propriétés

Pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + jy$. Le réel $x$ est la *partie réelle* de $z$ et on note $x = \mathrm{Re}(z)$ ; le réel $y$ est la *partie imaginaire* de $z$ et on note $y = \mathrm{Im}(z)$. Ainsi l'écriture algébrique de $z$ est

$$z = \mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z).$$

Évidemment, un nombre complexe est un réel si sa partie imaginaire est nulle et un nombre complexe est un *imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle. De plus, deux nombres complexes $z$ et $z'$ sont égaux s'ils ont respectivement les même parties réelles et imaginaires. Formellement,

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}\,.\, z = z' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Re}(z) & = & \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) & = & \mathrm{Im}(z') \end{array} \right.$$

### I.2 Somme et produit dans $\mathbb{C}$

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. On a

$$\begin{array}{rcl} z + z' & = & (\mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z)) + (\mathrm{Re}(z') + j\,\mathrm{Im}(z')) \\ & = & (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')) + j(\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')) \\ z \times z' & = & (\mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z)) \times (\mathrm{Re}(z') + j\,\mathrm{Im}(z')) \\ & = & (\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')) + j(\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z')) \end{array}$$

### I.3 Conjugaison dans $\mathbb{C}$

Définition 7.1 (Conjugué d'un complexe). Soit $z \in \mathbb{C}$ ; le *conjugué* de $z$, noté $\overline{z}$, est défini par

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - j\,\mathrm{Im}(z)$$

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes quelconques. On a

1. conjugué d'une somme : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ ;
2. conjugué d'un produit : $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ ;
3. conjugué d'un opposé : $\overline{-z} = -\overline{z}$ ;

4. conjugué d'un inverse : soit $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ ;
5. conjugué d'un conjugué $\overline{\overline{z}} = z$

Exercice 7.1.

1. Démontrer les propriétés 2. et 4. à propos des conjugués précédents ;
2. Montrer que le conjugué d'un quotient de deux nombres complexes (dont le dénominateur n'est pas nul) est égal au quotient des conjugués des deux nombres complexes.

## I.4 Module et argument

Le *module* d'un nombre complexe $z$, noté $|z|$, est

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

.

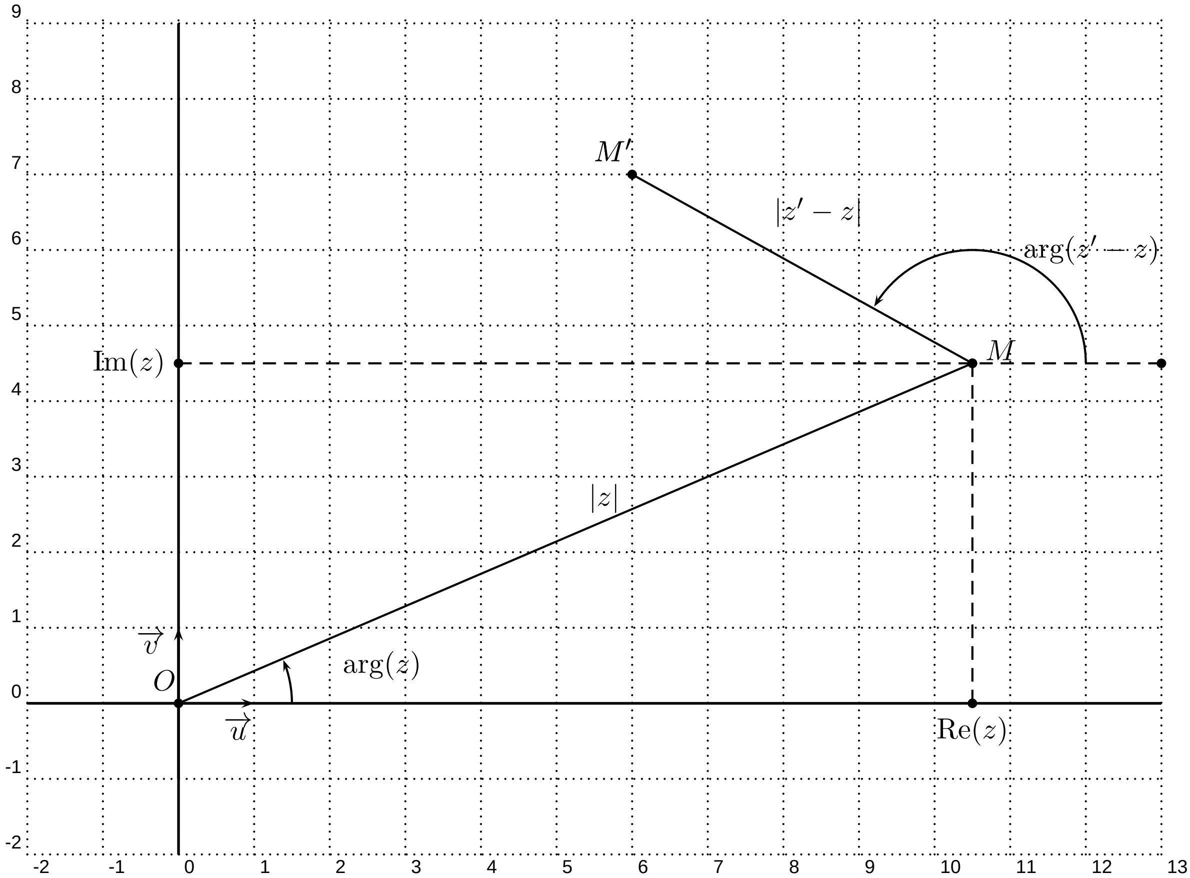



Figure 7.1 – Représentation géométrique d'un nombre complexe

On considère la figure 7.1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, un nombre complexe $z$ peut être représenté par le point $M$ de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$. Le module $|z|$ est alors la longueur du segment $[OM]$. Plus généralement, si $M$ a pour affixe $z$ et $M'$ a pour affixe $z'$, la distance de $M$ à $M'$ est $|z' - z|$.

Si $z$ est différent de 0, on appelle *argument* de $z$ et on note $\arg(z)$ n'importe quelle mesure $\theta$ de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C} . \exists \theta \in \mathbb{R} . z = |z|(\cos(\theta) + j\sin(\theta)).$$

Lorsque $\theta$ appartient à $]-\pi, \pi]$, on dit que
– $\theta$ est l'*argument principal* de $z$ et que
– $|z|(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ est l'*écriture polaire* de $z$.

En généralisant, si $M$ a pour affixe $z$ et $M'$ a pour affixe $z'$, et si $z$ est distinct de $z'$, alors $\arg(z' - z)$ est la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MM'}\right)$.

Propriété 7.2. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même modules et leurs arguments sont égaux à $2\pi$ près.

Exercice 7.2. Démontrer les propriétés suivantes :

$$1.\quad \forall z \in \mathbb{C}\,.\,|z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad \text{et} \qquad 2.\quad \forall z \in \mathbb{C}^*\,.\,\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Le tableau suivant donne les propriétés des modules et arguments en fonction des opérateurs classiques sur les complexes. On considère que $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes quelconques.

| | Module | Argument<br>$z$ et $z'$ non nuls |
|---|---|---|
| Somme | $\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$ | |
| Opposé | $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$ | $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi(2\pi)$ |
| Différence | $\lvert z-z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$ | |
| Conjugué | $\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$ | $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)(2\pi)$ |
| Produit | $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$ | $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z)(2\pi)$ |
| Inverse<br>$z \neq 0$ | $\lvert\frac{1}{z}\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$ | $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)(2\pi)$ |
| Quotient<br>$z \neq 0$ | $\lvert\frac{z}{z'}\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ | $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')(2\pi)$ |

Exercice 7.3. Démontrer les propriétés du module et de l'argument relativement au produit et à l'inverse. On pourra se servir des propriétés admises pour tout nombres réels $a$ et $b$ :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Propriété 7.3 (Formule de Moivre). Pour tout entier relatif $n$ et tout réel $\theta$ on a

$$(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

Exercice 7.4. Démontrer la formule de Moivre par récurrence.

## I.5 Écritures exponentielles d'un nombre complexe

Par la suite pour tout nombre réel $\theta$ on adoptera la notation $\cos(\theta) + j\sin(\theta) = e^{j\theta}$. Ainsi tout complexe $z$ peut s'écrire sous la forme

$$z = |z|e^{j\arg(z)}$$

nommée *écriture exponentielle* de $z$.

Propriété 7.4 (Relations d'Euler). Pour tout nombre réel $\theta$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

# II Techniques : arguments d'un nombre complexe

On utilise pour cela la fonction arc-tangente : c'est la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, notée arctan. On applique alors la technique suivante :

1. Déterminer le signe des réels $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
2. En fonction du signe de $x$ et de $y$, se placer dans le tableau suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y < 0$ | $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| | $x < 0$ | $x = 0$ | $x > 0$ |
| $y = 0$ | $\pi$ | non défini | $0$ |
| $y > 0$ | $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ |

Exercice 7.5 (D'après BTS épreuves du groupement A, 2001). Déterminer un argument du nombre complexe $z = \frac{3-jy}{1-2jy}$ pour $y \in \mathbb{R}$

Exercice 7.6. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

$$z_1 = 3 - j\sqrt{3}, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3} - j\sqrt{3}}{1+j}, \qquad z_3 = \frac{3 - j\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3j}, \qquad z_4 = 3(1+j) + \sqrt{3}(1-j)$$

Exercice 7.7. On considère un filtre dont la fonction de transfert $H$ est une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

où $R$ est la résistance exprimée en Ohm, $C$ la capacité exprimée en Farad et $\omega$ la pulsation exprimée en radian par seconde. Déterminer pour tout $\omega$ l'écriture polaire de $H(\omega)$.

Exercice 7.8. Pour tout réel $t$, déterminer l'écriture exponentielle des nombres suivants : $z_1 = \cos(t) - j\sin(t)$, $z_2 = \sin(t) + j\cos(t)$, $z_3 = \sin(t) - j\cos(t)$, $z_4 = -\sin(t) - j\cos(t)$,

# III Racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$

Propriété 7.5 (Racines $n$-ièmes). Tout nombre complexe non nul a exactement $n$ racines $n$-ièmes. L'ensemble des racines $n$-ièmes d'un nombre complexe non nul $z$ est

$$\left\{ |z|^{\frac{1}{n}} e^{j\left(\frac{\arg(z)}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}, 0 \leq k \leq n \right\}$$

Exercice 7.9. Déterminer les racines troisièmes (ou cubiques) de 1. Montrer que leur somme est nulle.

On en déduit :

Corollaire 7.6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le complexe $x + jy$, ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est une racine carrée complexe de $z$ si et seulement si le couple $(x, y)$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & |z| \\ x^2 - y^2 & = & \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{signe}(xy) & = & \mathrm{signe}(\mathrm{Im}(z)) \end{array} \right.$$

Exercice 7.10. Donner l'écriture algébrique des racines carrées de $180 - 112j$.

Propriété 7.7. Soit $a$ un nombre complexe non nul. L'équation du seconde degré $az^2+bz+c=0$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ a pour solutions dans $\mathbb{C}$ les nombres

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où $\delta$ est une racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exercice 7.11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en $z$ $P(z) = 0$, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P$ dans chacun des cas suivants :

1. $P(z) = 4z^2 - 2(3-4j)z - 13 + j$
2. $P(z) = z^2 - 2\cos(\theta)z + 1$, avec $\theta$ un réel

Exercice 7.12 (D'après Banque d'épreuves DUT-BTS 2000). Répondre à chaque question par vrai ou faux en justifiant. Soit la fonction polynôme de la variable complexe $z$ définie par

$$p(z) = z^3 - (5+3j)z^2 + (6+10j)z - 8j$$

1. si $z$ est une racine réelle de $p(z)$, on a $z^3 = 5z^2 - 6z$ ;
2. si $z$ est une racine réelle de $p(z)$, on a $3z^2 - 10z + 8 = 0$ ;
3. il existe une racine réelle $a$ de $p(z)$ et $p(z) = (z-a)(z^2 + (3-3j)z + 4j)$ ;
4. une racine complexe de $2j$ est $1+j$ ;
5. on a $p(z) = (z-a)(z-1+j)(z+2+2j)$.

Exercice 7.13 (D'après Banque d'épreuves DUT-BTS 2003). Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme $Q(z) = z^8 - 2\cos(\theta)z^4 + 1$

Exercice 7.14 (D'après Banque d'épreuves DUT-BTS 2007). Soit les polynômes $P(x) = x^6 - 8\sqrt{2}x^3 + 64$ et $Q(X) = X^2 - 8\sqrt{2}X + 64$. L'objectif est de calculer les racines de $Q$ nommées $X_1$, $X_2$, puis les racines de $P$ en extrayant dans $\mathbb{C}$ leurs racines cubiques. Répondre à chaque question par vrai ou faux en justifiant.

1. les racines de $Q$ sont $X_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$ et $X_2 = 8e^{-j\frac{\pi}{4}}$ ;
2. l'équation $x^3 = X_1$ possède une seule solution complexe $x = 2e^{j\frac{\pi}{12}}$ ;
3. les racines de $P$ sont les racines cubiques de $X_1$ et leurs conjugués complexes ;
4. les racines de $P$ sont toutes de modulo 2 ;
5. les racines de $P$ à partie imaginaire positive ont pour argument $\frac{\pi}{12}$ , $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

# IV Application des complexes à la géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et soit les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $z_a$, $z_b$, $z_c$ et $z_d$. Alors,

- le point $C$ milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $z_c = \frac{z_a+z_b}{2}$ ;
- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_b - z_a$ ; on rappelle que la longueur du segment $[AB]$ est $|z_b - z_a|$ et qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$ est $\arg(z_b - z_a)$, à $2\pi$ près ;
- on a le rapport $\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_d-z_c}{z_b-z_a}\right|$ et la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est $\arg\left(\frac{z_d-z_c}{z_b-z_a}\right)$ à $2\pi$ près ;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_c-z_a}{z_b-z_a}$ est un réel ;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_c-z_a}{z_b-z_a}$ est un imaginaire pur.

Exercice 7.15 (D'après Banque d'épreuves DUT-BTS 2009). Dans la figure 7.2, on associe à tout point $M = (x, y)$ du plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ son affixe le nombre complexe $z = x + jy$. On considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a = j$ et $b = 1 + 2j$.

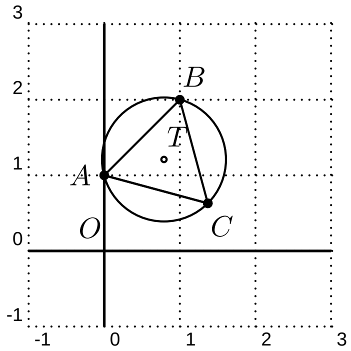



FIGURE 7.2 – Figure de l'exercice 7.15

1. On veut déterminer l'affixe $c$ du point $C$ tel que le le triangle $(ABC)$ est équilatéral avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$. Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes en justifiant :
   (a) on a $c - a = (b - a)e^{-j\frac{\pi}{3}}$ ;
   (b) on a $e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}-j}{2}$ ;
   (c) on a $c = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + j\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$ ;
   (d) les côtés du triangle $(ABC)$ ont pour longueur 2 ;
   (e) le module de $c$ est $\sqrt{4+\sqrt{3}}$.
2. On veut déterminer l'affixe $t$ du centre $T$ du cercle circonscrit à $(ABC)$. Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes en justifiant :
   (a) on a $t = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}) + \frac{j}{2}(3 - \sqrt{3})$ ;
   (b) on a $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ;

EXERCICE 7.16. Montrer que la somme des $n$ racine $n$ ème de l'unité distinctes est nulle.

EXERCICE 7.17 (D'APRÈS BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS 2010). On se propose d'exprimer les valeurs exactes de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin(\frac{2\pi}{5})$ à l'aide de racines de polynômes. On notera par la suite $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On pose $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ et $Q(t) = t^2 + t - 1$. Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes en justifiant :

1. on a $Q(z + \frac{1}{z}) = \frac{P(z)}{z^2}$ ;
2. les solutions de $Q(t) = 0$ sont $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ ;
3. on a $\alpha^2 = \alpha - 1$ ;
4. l'équation $z + \frac{1}{z} = \alpha$ admet comme solutions $\frac{\alpha+j\sqrt{\alpha+3}}{2}$ et $\frac{\alpha-j\sqrt{\alpha+3}}{2}$ ;
5. l'ensemble des solutions de $P(z) = 0$ est $\left\{\frac{\alpha+j\sqrt{\alpha+3}}{2}, \frac{\alpha-j\sqrt{\alpha+3}}{2}, \frac{\beta+j\sqrt{\beta+3}}{2}, \frac{\beta-j\sqrt{\beta+3}}{2}\right\}$ ;
6. le complexe $e^{\frac{2j\pi}{5}}$ est une racine de $P$ ;
7. on a $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ;
8. on a $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

# V Transformations dans le plan complexe

Le plan $P$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Une transformation $T$ du plan est une application

$$T : \left\{ \begin{array}{rcl} P & \to & P \\ M(z) & \mapsto & M'(f(z)) \end{array} \right.$$

où $f$ est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On distingue plusieurs transformations selon la nature de $f$ : les similitudes planes directes ou indirectes, les inversions géométriques ou complexes.

## V.1 Similitude planes directes

Lorsque

$$f(z) = az + b$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, $T$ est une *similitude plane directe.*

Propriété 7.8 (Propriétés d'une similitude plane directe).
- conservation des angles et de l'orientation
- conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, des milieux, des barycentres...
- en général, *les distances ne sont pas conservées*

On distingue les cas suivants :
- si $a = 1$, $T$ est une *translation* de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $b$ ; on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$ ; dans le cas particulier où $b$ est nul, $T$ est l'identité ;
- si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, alors $T$ est la *rotation* d'angle $\arg(a)$ et de centre $C$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ ;
- si $|a| \neq 1$, $T$ est la *composée* d'une *rotation* d'angle $\arg(a)$ et de centre $C$ d'affixe $\frac{b}{1-a}$ avec une *homothétie* de rapport $|a|$ et de centre $C$ (dans n'importe quel ordre) ; dans le cas particulier où $a$ est un réel $T$ se réduit à une homothétie.

## V.2 Similitude planes indirectes

Lorsque

$$f(z) = a\overline{z} + b$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, $T$ est une *similitude plane indirecte.*

Propriété 7.9 (Propriétés d'une similitude plane indirecte).
- conservation des angles mais *renversement* de l'orientation
- conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, des milieux, des barycentres...
- en général, *les distances ne sont pas conservées*

On distingue les cas suivants :
- cas particulier 1 : $f(z) = \overline{z}$, $T$ est une symétrie orthogonale d'axe $(0, \overrightarrow{u})$ ;
- cas particulier 2 : $f(z) = e^{j\theta}\overline{z}$, $T$ est une symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par l'origine $O$ et faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe $(0, \overrightarrow{u})$ ;
- cas général : on décompose $f$ en deux similitudes $g$ et $h$, c.-à-d. $f = h \circ g$ avec

$$g : z \mapsto \overline{z} \qquad \text{et} \qquad h : z \mapsto az + b$$

## V.3 Inversion géométrique

Lorsque

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$$

avec $z \in \mathbb{C}^*$, $T$ est une *inversion géométrique* de centre $O$ et de rapport 1.

Propriété 7.10 (Propriétés d'une inversion géométrique).
- $O$, $M(z)$ et $M'(f(z))$ sont alignés et $OM \times OM' = 1$ ;
- les points des cercles de centre $O$ sont invariants ;
- l'image d'une droite passant par $O$ est elle même ;

- l'image d'une droite ne passant pas par $O$ est un cercle passant par $O$ ;
- l'image d'un cercle passant par $O$ est une droite ne passant pas par $O$ ;
- l'image d'un cercle ne passant pas par $O$ est un cercle ne passant pas par $O$.

## V.4 Inversion complexe

Lorsque
$$f(z) = \frac{1}{z}$$
avec $z \in \mathbb{C}^*$, $T$ est une *inversion complexe.*

Propriété 7.11 (Propriétés d'une inversion géométrique).
- pour $O$, $M(z)$ et $M'(f(z))$, on a $(\widehat{u, \overrightarrow{OM'}}) = -(\widehat{u, \overrightarrow{OM}})$ et $OM \times OM' = 1$ ;
- on décompose $f$ en $g$ et $h$, c.-à-d. $f = h \circ g$ avec
$$g : z \mapsto \overline{z} \qquad \text{et} \qquad h : z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$$
- l'image d'une droite ne passant pas par $O$ est un cercle passant par $O$ ;
- l'image d'une droite passant par $O$ est la droite symétrique par rapport à $(0, \overrightarrow{u})$ ;
- l'image d'un cercle passant par $O$ est une droite ne passant pas par $O$ ;
- l'image d'un cercle ne passant pas par $O$ est un cercle ne passant pas par $O$.

Exercice 7.18.
1. Démontrer que l'image par inversion complexe d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle. Etudier le cas particulier des droites parallèles aux axes.
2. Trouver l'image de la droite d'équation $y = x + 1$.
3. Démontrer que l'image par inversion complexe d'une droite passant par l'origine est une droite symétrique par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$.

Exercice 7.19. Dans le plan complexe, on considère deux transformations : la symétrie $S$ par rapport à l'origine et la rotation $R$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point d'affixe 1. Caractériser verbalement puis formellement les transformations
1. $R \circ R$
2. $S \circ S$
3. $S \circ R$
4. $R \circ S$

Exercice 7.20. Soit $s$ l'application du plan complexe dans lui même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = \frac{1}{2}(1 + j)z$. On désigne par $C$ le carré inscrit dans le cercle de centre $O$ et de rayon 1 dont un sommet est le point $A$ d'affixe 1.
1. Déterminer les affixes des sommets de $C$.
2. Montrer que la transformation géométrique $S$ associée à $s$ est la composée d'une homothétie et d'une rotation. Quelle est la nature du quadrilatère $C_1$ image de $C$ par la transformation $S$.
3. On appelle $C_2$ l'image de $C_1$ par $S$. Montrer que $C_2$ est l'image de $C$ par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 7.21 (d'après BTS groupement A 2001). Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit $f$ l'application qui a tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $\frac{z}{1+z} = 1 - \frac{1}{1+z}$.

1. Déterminer l'ensemble $D$ des points d'affixe $-\frac{3}{2} + jy$, $y \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z_1 = z + 1$. Préciser la transformation géométrique $t_1$ qui associe à un point $M$ d'affixe $z$ le point $M_1$ d'affixe $z_1$. Quelle est l'image, notée $D_1$, de $D$ par la transformation $t_1$ ?
3. Soit $t_2$ la transformation géométrique qui au point d'affixe $z$ non nulle associe le point d'affixe $z_2 = \frac{1}{z}$. Quelle est l'image, notée $\Gamma_2$ de $D_1$ par $t_2$ ?
4. Soit $t_3$ la transformation géométrique qui au point d'affixe $z$ associe le point d'affixe $-z$. Préciser la nature de $t_3$. Quelle est l'image, notée $\Gamma_3$ de $\Gamma_2$ par $t_3$ ?
5. Déterminer l'ensemble des points $\Gamma$ d'affixe $1 - \frac{1}{1+z}$ lorsque $z = -\frac{3}{2} + jy$, $y \in \mathbb{R}$.
6. représenter sur une même figure $D$, $D_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ et $\Gamma$, (unité graphique 2 cm).

# Chapitre 8

# Calcul Matriciel

Ce chapitre est largement inspiré de [CR93]. Dans tout ce qui suit, on considère
– le plan $(E)$, que l'on rapporte au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ou bien
– l'espace $(E)$, que l'on rapporte au repère orthonormal par $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

## I Translation

Définition 8.1 (Translation). Une translation de vecteur $\overrightarrow{t}$ est une application qui à tout point $M$ de $(E)$ associe le point $M'$ de $(E)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{t}$.

Propriété 8.2 (Propriétés d'une translation). Soit une translation de vecteur $\overrightarrow{t}$ :
– aucun point n'est invariant si $\overrightarrow{t}$ est non nul ;
– la translation est une bijection de $(E)$ ; la bijection réciproque est la translation de vecteur $-\overrightarrow{t}$ ;
– si $tr_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{t_1}$ et $tr_2$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{t_2}$, $tr_2 \circ tr_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{t_1} + \overrightarrow{t_2}$.

Si $\overrightarrow{t}$ a pour coordonnées $(a, b, c)$, $M$ a pour coordonnées $(x, y, z)$ et $M'$ a pour coordonnées $(x', y', z')$, alors :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{t} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + a \\ y' & = & y + b \\ z' & = & z + c \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ caractérise ainsi la translation de vecteur $\overrightarrow{t}$. Pour composer de telles translations, il suffit d'ajouter de tels vecteurs.

## II Rotations

### II.1 Rappels sur les rotations dans le plan

On rappelle que dans le plan complexe, la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ associe au point $M$ d'affixe $z = x + jy$ le point $M'$ d'affixe $z' = x' + jy'$ tel que $z' = ze^{j\theta}$ (cf figure 8.1). On a ainsi le systeme $\left\{ \begin{array}{lclcl} x' & = & x\cos(\theta) & - & y\sin(\theta) \\ y' & = & x\sin(\theta) & + & y\cos(\theta) \end{array} \right.$

Cela se traduit immédiatement dans $(E)$ par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

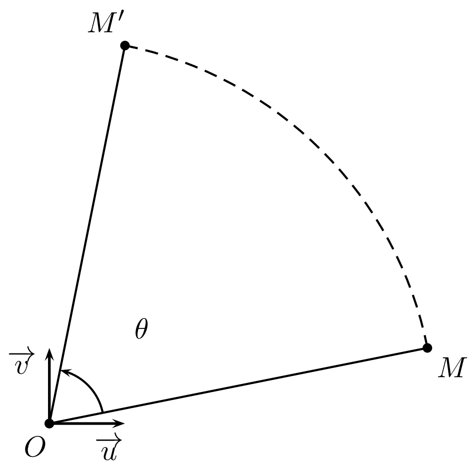



FIGURE 8.1 – Rotation dans le plan de centre 0 et d'angle $\theta$

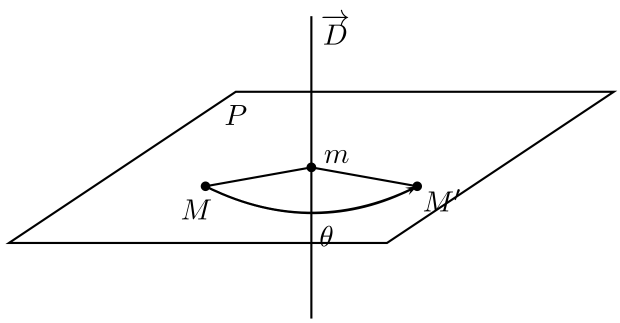



FIGURE 8.2 – Rotation dans l'espace selon $\vec{D}$ et l'angle $\theta$

Exercice 8.1 (D'après BTS Design Industriel 1989). $M$ est la matrice associée à la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.

1. Calculer $M_1$ pour $\theta = 30°$, $M_2$ pour $\theta = 60°$, $M_3$ pour $\theta = 180°$.
2. Calculer $M' = M_1 \times M_2$, $M'' = M_3^2$ et interpréter géométriquement les résultats.
3. Donner l'image du point $A$ de coordonnées $(1, 3)$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $60°$.

## II.2 Rotations dans l'espace selon un axe et un angle

On considère la figure donnée en 8.2. En orientant la droite $(D)$, on obtient un axe $\overrightarrow{D}$. Soit $P$ le plan passant par un point $M$ et orthogonal à la droite $(D)$ et soit $m$ l'intersection de $P$ et $(D)$. L'orientation de $\overrightarrow{D}$ induit une orientation positive du plan $P$.

Dans ce plan orienté, $M'$ est l'image de $M$ dans la rotation plane de centre $m$ et d'angle $\theta$. La rotation selon $\overrightarrow{D}$ et l'angle $\theta$ est l'application de $(E)$ dans $(E)$ qui, à tout point $M$, associe le point $M'$ ainsi défini.

Propriété 8.3 (Propriétés des rotations de l'espace). Soit une rotation selon $\overrightarrow{D}$ et l'angle $\theta$. Alors :

- si $\theta$ est différent de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, les points de $(D)$ sont les seuls points invariants ;
- une rotation est une application bijective ; la bijection réciproque est la rotation d'axe $\overrightarrow{D}$ et d'angle $-\theta$ ;
- si $r_1$ et $r_2$ sont deux rotations selon $\overrightarrow{D}$ et d'angles respectifs $\theta_1$ et $\theta_2$, alors la composée $r_2 \circ r_1$ est la rotation selon $\overrightarrow{D}$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

## II.3 Écriture matricielle d'une rotation autours d'un axe de coordonnées

Le point $M$ de coordonnées $(x, y, z)$ a pour image le point $M'$ de coordonnées $(x', y', z')$ tel que

- **Rotation d'axe** $(0, \overrightarrow{w})$ **:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- **Rotation d'axe** $(0, \overrightarrow{v})$ **:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- **Rotation d'axe** $(0, \overrightarrow{u})$ **:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pour composer de telles rotations dans l'espace, on multiplie de telles matrices à 3 lignes et 3 colonnes.

Propriété 8.4 (Propriétés communes à ces transformations de l'espace).

- Les translations et les rotations sont des isométries : elles conservent les distances, les angles et les volumes ;
- L'image d'une droite (resp. d'un plan) est une droite (resp un plan) ;
- l'image d'un cercle (resp. d'une sphère) est un cercle (resp. une sphère) ;
- le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés ;

Exercice 8.2. On considère la rotation $r$ d'axe $(0, \overrightarrow{v})$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la translation $t$ de vecteur $\overrightarrow{v}(1, 2, 3)$.

1. Écrire la matrice associée à la rotation $r$. En déduire l'image $M'$ du point $M(-1,0,5)$ dans cette rotation.
2. Calculer les coordonnées du point $M''$ image de $M$ dans la transformation $t \circ r$.

Exercice 8.3. On considère la transformation $f$ qui, à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} x' & = & y & + & 3 \\ y' & = & -x & + & 4 \\ z' & = & z & - & 1 \end{array}\right.$$

Montrer que $f$ peut s'écrire comme la composée $t \circ r$ où $t$ est une translation et $r$ une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{w})$.

Exercice 8.4. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère la transformation $f$ associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le but de ce problème est de démontrer que $f$ peut être décomposée en rotations d'axes respectifs $(O, \overrightarrow{u})$, $(O, \overrightarrow{v})$ et $(O, \overrightarrow{w})$. On pose $g = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ où $r_1$ est la rotation d'axe $(O, \overrightarrow{u})$ et d'angle $a$, $r_2$ est la rotation d'axe $(O, \overrightarrow{v})$ et d'angle $b$, $r_3$ est la rotation d'axe $(O, \overrightarrow{w})$ et d'angle $c$.

1. Écrire les matrices $M_1$, $M_2$ et $M_3$ associées aux rotations $r_1$, $r_2$ et $r_3$ et calculer le produit $G = M_1 \times M_2 \times M_3$.
2. Montrer que $M = G$ si et seulement si $\sin b = 1$. Par la suite on choisira $b = \frac{\pi}{2}$.
3. Démontrer l'égalité suivante
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(a+c) & \cos(a+c) & 0 \\ -\cos(a+c) & \sin(a+c) & 0 \end{pmatrix}.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions possibles.

# Bibliographie


[CCB05] Gérard Chauvat, Alain Collet, and Yves Bouteiller. *Mathématiques BTS/DUT*. Dunod, 2005.

[CR93] Gérard Chauvat and Jean-Philippe Réau. *Mathématiques BTS*. Armand Colin, 1993.

[LM07] J.-F. Lièvre and E. Mazoyer. *L'épreuve de Mathématiques au concours ENSEA*. Casteilla, 2007.

[LPR96] C Larcher, M Pariente, and J.-C. Roy. *Mathématiques, l'essentiel du cours, 300 exercices commentés et résolus*. Techniplus, 1996.

[Vé93] Jacques Vélu. *Mathématiques générales*. Dunod, 1993.