Licence SF 1ère année - 2023/24

Renforcement en mathématiques

FEUILLE 3

1 Polynômes de degré 2 et 3

Exercice 1 – On donne trois formes d'une même fonction polynôme.

(i) $f(x) = 3(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{27}{4}$

(ii) $f(x) = 3(x+1)(x-2)$

(iii) $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

1. Vérifier que ces trois formes sont égales.
2. Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse à l'aide de l'une des formes précédentes de $f(x)$.
   a. -6 est l'image de 0 par f.
   b. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
   c. $-\frac{27}{4}$ est le minimum de la fonction.
   d. $f(\frac{1}{6}) = f(\frac{5}{6})$

Exercice 2 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 7$.

1. résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = -7$;
2. résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = -16$;
3. résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 3 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

1. $-5x^2 + 4 = 0$
2. $-x^2 + 6x = 0$
3. $(x-1)^2 - (x-1)(x-2) = 0$
4. $x^2 - 16 + 2(x-4) = 0$
5. $(x+1)^2 - (2x-3)^2 = 0$
6. $(2x+3)(x-7) = -21$
7. $4x^2 - 1 = (2x-1)(x-3)$
8. $9 + 4(x-2)^2 = 0$

Exercice 4 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$
2. $\dfrac{-x^2 + 5x - 7}{2x+5} = 0$
3. $x^3 - x^2 + 4x = 0$

Exercice 5 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(x^2 + 4x - 5)(-x^2 + 5x - 7) > 0$
2. $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{-5x^2 - 3x + 8} \geq 0$
3. $(-x^2 - 5x + 6)(-3x^2 + 5x + 2) \geq 0$
4. $(-x^2 + 10x - 25)(4x^2 + 12x + 9) > 0$

Exercice 6 – Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g.
2. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1; 0]$.
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 – Étudier le sens de variation et le signe de f, commencer par donner son domaine de définition.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x^2 + 4x + 1}{x+1}$$

2 Les classiques

Exercice 8 – Représenter graphiquement les fonctions suivantes

1. $x \mapsto -1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x - 1$, $x \mapsto 2x + 3$, $x \mapsto -2x + 1$.
2. $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 + 1$, $x \mapsto -x^2 + 1$, $x \mapsto x^2 - 5x + 6$, $x \mapsto -x^2 + 5x - 7$.
3. $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
4. $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$.
5. $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \exp(x)$.

3 Logarithme népérien et exponentielle

Exercice 9 – Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.

1. $a = \ln(10) - \ln(\frac{1}{4})$
2. $b = \ln(0,05)$
3. $c = \ln(\frac{\sqrt{5}}{2})$
4. $d = 2\ln(5e^2) - \ln(4e^{-1})$

Exercice 10 – Simplifier les expressions suivantes.

1. $a = \ln(e^4) + 3\ln(e^{-1})$
2. $b = e^{2\ln(5)} - \ln\left((e^5)^2\right)$
3. $c = \ln(e^{-3}) \times \ln(e^3)$
4. $d = 20\ln(\sqrt{e}) - e^{3\ln(3)}$

Exercice 11 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(2x^2 + 3x - 6)\ln(1 - x) = 0$
2. $\ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1) = 1 + \ln(2)$
3. $\ln(x + 1) - \ln(x) = 2\ln(3)$

Exercice 12 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{2x^2} = e^{-3x-1}$
2. $\dfrac{e^{2x}}{e^{x+1}} = e^{-4x+2}$
3. $e^{2x+1} \times e^{x-3} = e^{2x+3}$
4. $e^{x^2} = e^{x-3}$

4 Valeurs absolues

Exercice 13 – Résoudre les équations suivantes.

1. $|x + 3| = 2$
2. $|x - 2| = |x - 3|$
3. $|x - 1| = |x^2 + x - 1|$
4. $|x(x + 1)| = 2$

Exercice 14 – Représenter le graphe des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto |x|$
2. $x \mapsto |x - 1|$
3. $x \mapsto |x| + |x - 1|$
4. $x \mapsto |x| + |x - 1| + 1$
5. $x \mapsto |x + 2| + |x - 1| + |x - 3|$
6. $x \mapsto |x| - 2|x + 1| + 3|x - 1|$
7. $x \mapsto |2x + 1| - |x + 1| + 2|x|$
8. $x \mapsto \dfrac{|x| + |x + 1|}{|x - 2|}$