Licence SF 1ère année - 2023/24

Renforcement en mathématiques

Feuille 2

1 Opérations sur les limites

Exercice 1 – Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x^3+3}{x^3-x+1}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+3}$

Exercice 2 – Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{3e^x+1}{1+e^x}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{e^x+3}{e^{2x}}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{(e^x+5)(x-2)}{x+3}$
4. $i : x \mapsto \dfrac{7e^x+1}{(e^x+3)^2}$
5. $j : x \mapsto \dfrac{e^x+3}{x}$
6. $k : x \mapsto (e^x-5)(x+700)$

2 Composition de limites

Exercice 3 – Dans chacun des cas suivantes, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f(x) = \sqrt{\frac{7}{x} - 3x + x^2}$, $a = +\infty$.
2. $f(x) = \sqrt{4+5e^x}$, $a = -\infty$.
3. $f(x) = e^{-x^2} + 3x + 1$, $a = +\infty$.
4. $f(x) = e^{-\frac{7}{x}}$, $a = +\infty$.

Exercice 4 –

1. Déterminer $\lim_{h\to-\infty}(-5h^3+2h-1)$.
2. En déduire $\lim_{h\to-\infty} e^{-5h^3+2h-1}$.
3. Procéder de même en $+\infty$.

Exercice 5 – Déterminer la limite, lorsque $x \to a$, des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x) = \ln(e^x - x)$, $a = +\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x-3})}{x}$, $a = +\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $a = 0$.
4. $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$, $a = 0$.

3 Comparaison de limites et croissances comparées

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - \cos(x)$$

Donner un encadrement de $f(x)$ et en déduire les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 7 – Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

Donner un encadrement de $f(x)$ et en déduire les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 8 – Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$
2. $x \mapsto e^x - x$
3. $x \mapsto xe^{-x}$
4. $x \mapsto e^x - 1000x$
5. $x \mapsto \dfrac{e^x-4x}{e^x+7}$
6. $x \mapsto \dfrac{e^x-4x}{x}$

4 Etude de fonctions

Exercice 9 – Soient la fonction $f(x) = x^2+3x-4$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. Représenter $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$, en $x = 1$ et en $x = -1$.
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $y = x$.

4. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est perpendiculaire à la droite $y = x$

Exercice 10 – Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f.
2. Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.
3. Suivant le paramètre réel k, déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$x^3 - 3x^2 - k = 0.$$

Exercice 11 – Montrer que l'équation $x^5+x^3+1 = 0$ admet une unique solution réelle α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 12 – Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes (on précisera les limites en l'infini et les éventuelles asymptotes horizontales et verticales)

1. $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$;
2. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{3x-4}$;
3. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-4}$;
4. $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$;
5. $x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2+1}$;
6. $x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2-1}$;

Exercice 13 – Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x-1}$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Soit la fonction $g(x) = f(x) - 2x - 1$. Etudier la fonction g.
3. En déduire que la fonction f admet une asymptote oblique en l'infini.
4. Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.