Licence SF 1ère année - 2023/24

Renforcement en mathématiques

Feuille 1

1 Rappels sur les suites

Exercice 1 – Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Calculer le dixième terme de cette suite.
3. Calculer u_{10}.
4. Exprimer u_{n+1}, puis $u_n + 1$ en fonction de n.
5. Déterminer une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
6. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante. Est-elle bornée ?

Exercice 2 – Traduire par une propriété dépendant de n les énoncés suivants.

1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est minorée par 5.
3. La suite (w_n) est majorée par -1.
4. La suite (t_n) est strictement positive.

2 Raisonnement par récurrence

Exercice 3 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6$.
Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$

Exercice 4 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.
Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

Exercice 5 – Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{0,5v_n + 8}$.
Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 4$

Exercice 6 – On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. a. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?
   b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 7 – La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.
Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

3 Récurrence et suites

Exercice 8 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$$

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par -3.
2. a. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n - 1$
   b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 9 – Pour chaque suite, calculer les premiers termes à la calculatrice, conjecturer le sens de variation puis le démontrer par récurrence.

1. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 10$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = -5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
3. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 10$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 4$

Exercice 10 – Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Rappeler l'expression de u_n en fonction de r et de n.
3. Montrer par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, la formule suivante :

$$u_0 + \cdots + u_n = (n+1)\left(u_0 + \frac{n}{2}r\right)$$

Exercice 11 – Soit (v_n) la suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Rappeler l'expression de v_n en fonction de q et de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, la formule suivante :

$$v_0 + \cdots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 12 – On place 10 000€ sur un compte rémunéré à $1,75\%$ et on effectue à chaque fin d'année un retrait de 225€. On appelle c_n le capital à la fin de l'année n, après le retrait.

1. Déterminer c_0 puis c_{n+1} en fonction de c_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que $c_n \leq 10\ 000$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite (c_n) est décroissante.
4. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4 Exercices avancés

Exercice 13 – Démontrer que les inégalités suivantes sont vraies à partir d'un certain rang que l'on précisera. On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. $2^n > n^2$
2. $3^n > n^3$
3. $2^n \leq n!$
4. $3^n < n!$

Exercice 14 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1$$

1. a. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées au centièmes près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.
   b. Sans utiliser de raisonnement par récurrence, démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

   En déduire une validation de la conjecture.
3. On désigne par (v_n) la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   b. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

   c. Refaire une démonstration de la croissance de la suite (u_n) à partir de la formule que l'on vient d'obtenir.

Exercice 15 – Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n \geq 1$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{nn!}, n \geq 1.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante, et que la suite (v_n) est décroissante.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite e. Donner une approximation de e à 10^{-3} près.
3. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 16 – Une étude sur une île fait apparaître l'observation suivante : sur une année, environ 5% d'une certaine population d'oiseaux disparaît. D'autre part, par un effet migratoire, chaque année cette population voit arriver de l'extérieur 100 nouveaux oiseaux. Notons par u_n la taille de la population des oiseaux en question à l'année n. On note par N la taille de la population au début de l'étude.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Montrer que la suite $v_n = u_n - 2000$ est une suite géométrique de raison $q = 0.95$.
3. Que peut-on dire sur l'évolution de la population de cette espèce d'oiseaux ?

Exercice 17 – Le taux d'intérêt annuel proposé par une banque est de a. Un client veut emprunter la somme S en euros sur une période de N mois. On note par M le remboursement mensuel. Soit u_n la somme restant due au n-ème mois.

1. Déterminer u_0 et u_N.

2. Donner la relation liant u_{n+1} à u_n.
3. On pose $q = 1 + \frac{a}{12}$ et $\ell = \frac{M}{q-1}$, puis $v_n = u_n - \ell$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q.
4. Exprimer u_n en fonction de q, n, M et S. Donner la contrainte liant M, S et a.
5. On suppose que $a = 2$ et que $S = 100000$. Le client souhaite rembourser son prêt en 3 ans. Quelle devra être la mensualité ? Donner le coût du crédit.
6. On suppose que $a = 2$ et que $S = 100000$. Le client souhaite rembourser son prêt avec des mensualités de 1000 euros. Quelle va être la durée du prêt ? Donner le coût de la dernière mensualité.

Exercice 18 – Une population de taille $N = 10000$ suit la loi suivante. Si l'on note u_n la taille de celle-ci à l'année n, on a

$$u_{n+2} = 0.3u_{n+1} + 0.18u_n.$$

On suppose la population stable à l'issue de la première année.

1. Trouver deux suites géométriques non nulles (a_n) et (b_n) vérifiant la relation de récurrence du problème.
2. *On suppose connu le résulat mathématique suivant : la suite (u_n) est combinaison linéaire des suites (a_n) et (b_n).* Exprimer alors u_n en fonction de n.
3. Quel est la taille de la population au bout de 10 ans ? Etudier l'évolution de cette population au cours du temps.

Exercice 19 – Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 20 – Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

1. Montrer que si une suite géométrique $v_n = q^n$ vérifie la relation de récurrence de la suite (u_n) alors la suite $w_n = nq^n$ vérifie également la relation de récurrence en question.
2. Exprimer u_n en fonction de n.