Statistiques inférentielles

Christian MAIRE

christian.maire@univ-fcomte.fr

page web pro :

https://members.femto-st.fr/christian-maire

→ Enseignement → Licence de Psycho.

(1)

Objectif du cours
Détail d'un exemple

Statistiques inférentielles

Etendre des propriétés constatées sur un échantillon à la population toute entière, de valider ou infirmer des hypothèses.

Les propriétés porteront sur la moyenne, l'écart-type. On cherchera à donner des intervalles de confiance, à faire des comparaisons (à travers un test par exemple).

La taille de l'échantillon aura son importance. Lorsque celui-ci sera de grande taille on utilisera le théorème limite central. Pour les échantillons de petite taille il est nécessaire d'avoir des indications sur la loi sous-jacente.

Détail d'un exemple.

On dispose d'une pièce de monnaie $\rightarrow$ face F

$\rightarrow$ pile P

On lance n fois la pièce de monnaie.

La fonction X dénombre le nombre de fois que l'on obtient le côté F.

X est une variable aléatoire sur l'ensemble des n lancers.

$\boxed{n=1}$ On effectue 1 lancer.

Les résultats possibles sont F ou P.

Ainsi X prend la valeur 1 si c'est F

0 si c'est P.

$\boxed{n=2}$ On effectue 2 lancers

Les résultats possibles sont : FF ; FP ; PF ; PP

$X=0$: 1 possibilité

$X=1$: 2 possibilités

$X=2$: 1 possibilité

4 possibilités au total

$\boxed{n=3}$ On effectue 3 lancers. ③

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

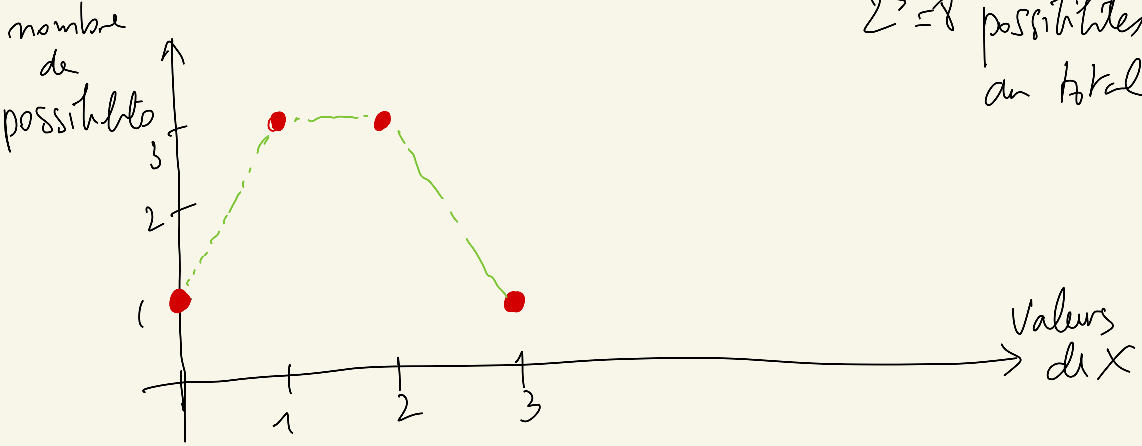
$X=0$: 1 possibilité PPP

$X=1$: 3 possibilités : FPP ; PFP ; PPF

$X=2$: 3 possibilités : FFP ; FPF ; PFF

$X=3$: 1 possibilité : FFF

$2^3=8$ possibilités au total



On note une symétrie... et l'on voit apparaître "une cloche".

n=5 On effectue 5 lancers

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

X=0 : 1 possibilité. PPPPP

X=1 : 5 possibilités : FPPPP ; PFPPP ; ... ; PPPPF

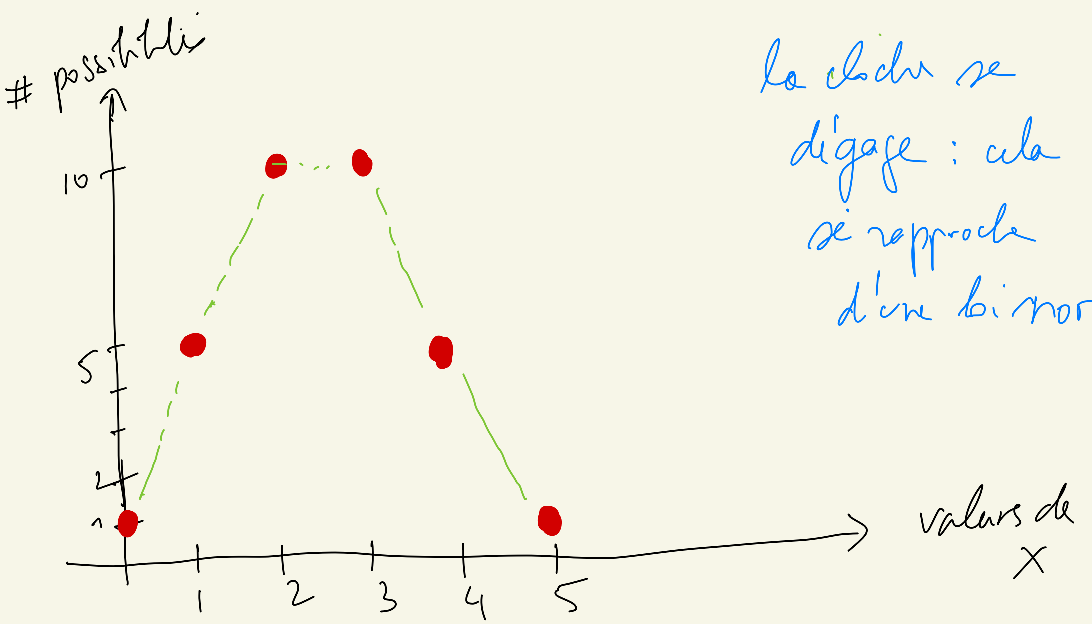
X=2 : 10 possibilités

X=3 : 10 possibilités.

X=4 : 5 possibilités

X=5 : 1 possibilité

$2^5 = 32$ possibilités



la cloche se dégage : cela se rapproche d'une loi normale

(Pour n grand)

On centre puis on normalise:

$$Y = \frac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}/2}$$

Y est une nouvelle variable aléatoire.

"possibilités normalisées" = probabilités
on divise par 2^n

Y est proche de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème limite central

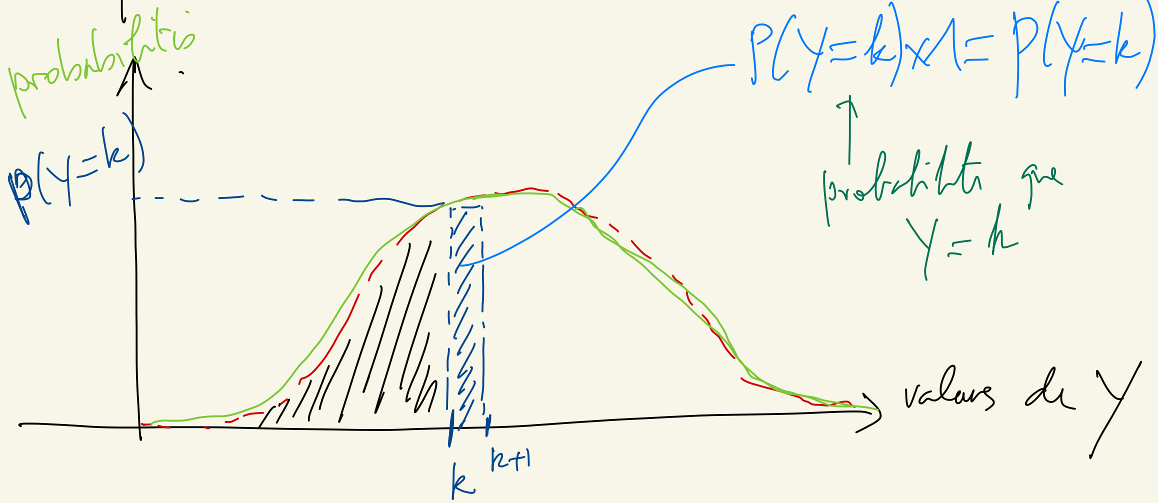
$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Conséquences

1) La cloche correspondant à X se déduit de celle de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Le passage de l'une à l'autre est simplement une question de recentrage et de normalisation.

2) Cette correspondance permet de calculer des probabilités.



$$P(Y \leq k) = P(Y=1) + P(Y=2) + \dots + P(Y=k)$$
$$= 1 \times P(Y=1) + \dots + 1 \times P(Y=k)$$
$$= \text{surface sous la cloche delimité par la courbe}$$

Ainsi un calcul de probabilité est réduit à un calcul de surface !!

Pour n grand, cette surface est délimitée par la courbe de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire la fonction $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

fonction exponentielle.

Cela dit, ce calcul n'est pas facile (à la main) d'où les tables.

3) Ainsi 1) + 2) + table de $\mathcal{N}(0,1)$ permettent de donner une valeur pour

$P(Y \leq k)$ puis de $P(X \leq k)$

Comparaison avec une expérience

On effectue n lancers d'une pièce de monnaie.

On a un échantillon de taille n avec n valeurs $x_1, \dots, x_n$.

On rappelle : $x_i = \begin{cases} 1 & F \\ 0 & P \end{cases}$

On peut calculer la moyenne de l'échantillon, son écart-type, etc.

Prenons la moyenne $\bar{x} = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ et $\bar{y}$ sa normalisation

la probabilité que $\bar{y}$ tombe dans un intervalle $[a,b]$ est contrôlée par la surface hachurée ////

Si la quantité $\bar{y}$ tombe en dehors de $[a,b]$

cela peut donner lieu à des interprétations :

* échantillons non représentatifs
* pièce biaisée
* estimation du biais
* rejet d'une hypothèse.

Autre lecture : un échantillon de taille n peut fournir une estimation ponctuelle de la moyenne ou de l'écart-type sur la population.

Cela peut aussi fournir un intervalle de confiance pour la moyenne (ou l'écart-type) sur la population