Chapitre I
Eléments de Probabilité

(1)

1) Formalisme

On note par Ω l'espace des résultats possibles issus d'une expérience.

Un résultat est noté ω. On parle aussi d'événement élémentaire.

Un événement est la donnée d'un ensemble de résultats.

On note par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω.

Dans les faits, on ne considère que l'ensemble des événements que l'on trouve intéressants.

On notera encore $\mathcal{P}(\Omega)$ cet ensemble.

Définition

Une **probabilité** est une fonction définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, à valeurs dans $[0,1]$, vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si (A_n) est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right) = \sum \mathbb{P}(A_n).$$

En particulier :
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Définition

A et B, deux événements, sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Cas particulier Quand Ω est fini, on définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ la probabilité naturelle :

$$A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour } A}{\text{nombre de cas possibles.}}$$

Exemple. Une urne contient 20 boules : 5 noires
15 blanches

① L'expérience consiste à tirer 1 boule et le résultat indique la couleur

Probabilité d'avoir une boule blanche : $\frac{15}{20} = 3/4$.

Probabilité d'avoir une boule noire : $\frac{5}{20} = 1/4$.

② Une seconde expérience consiste à tirer 2 boules avec remise (tirage non exhaustif) - Résultat = couple de couleurs

Probabilité d'avoir $(b,b) = \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} = 9/16$.

Probabilité d'avoir au moins une boule noire :

$$1 - \frac{9}{16} = 7/16.$$

2) Variable aléatoire

Définition

Une variable aléatoire X est une fonction de Ω vers $\mathbb{R}$ (nombres réels) telle pour tout nombre réel x, l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}$$

est un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Si $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ on pose :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\})$$

Une loi de probabilité est la donnée d'un triplet $(\mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}, X)$.

Pratiquement on oublie Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$.

Fonction de répartition de X

Pour un nombre réel x, on pose

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

La fonction $x \longmapsto F_X(x)$

$$\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

est la fonction de répartition de la v.a. X.

Observons que $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exemple Pièce de monnaie $X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \text{ pile} \\ 1 & \omega \text{ face} \end{cases}$

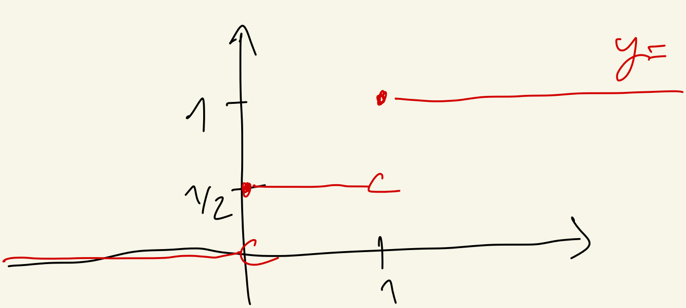
$W = 1$ lancer

On a $P(X<0) = 0$

$P(X=0) = 1/2$

$P(X=1) = 1/2$

$$\begin{cases} P(X<1) = 1/2 \\ P(X\leq 1) = 1 \end{cases}$$



c'est une fonction en escalier.

Définition. Une v.a. est dite discrète si l'ensemble des valeurs de X est fini (ou dénombrable)

Définition de la moyenne d'une v.a.

Soit X une v.a. discrète.

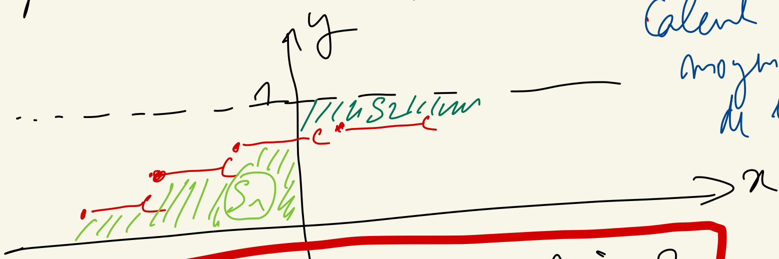
On définit sa moyenne μ_X par :

$$\mu_X = E(X) = \sum_k k \times P(X=k)$$

↑ valeurs prises par X

on parle aussi d'espérance

On peut montrer la propriété suivante :



Calcul de la moyenne à partir de la fonction de répartition

$$\boxed{\mu_X = \text{Aire } S_2 - \text{Aire } S_1}$$

Retour "Pile ou face"

$$\mu_X = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

La variance d'une variable aléatoire X mesure la distance moyenne à la moyenne :

Soit $Y = (X - \mu_X)^2$: c'est une v.a.

$$\boxed{Var(X) = \mu_Y}$$

On montre $Var(X) = \mu_{X^2} - (\mu_X)^2$.

$$\boxed{\text{Ecart-type de } X : \ \sigma_X = \sqrt{Var(X)}}$$

3) Quelques lois discrètes

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

généralise le lancer de la pièce

La v.a. prend deux valeurs $X=0$ ou $X=1$

$p = P(X=1)$ et $q = 1-p = P(X=0)$

On a $\mu_X = p \times 1 + q \times 0 = p$

$Var(X) = p(1-p)^2 + q(0-p)^2 = pq$

$\sigma_X = \sqrt{pq}$

$\mu_X = p$

$\sigma_X = \sqrt{pq}$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

C'est la loi qui modélise l'étude suivante :
une urne contient N boules de deux couleurs b, n

Probabilité de tirer une boule $b = p$
$n = q = 1-p$.

On effectue le tirage de n boules avec remise.
La variable aléatoire X compte le nombre de boules b.

On a $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $\quad k = 0, \dots, n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ coefficients binomiaux

$$\boxed{\mu_X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np}$$

$Var(X) = npq$; $\sigma_X = \sqrt{npq}$

Remarque 1 : $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$

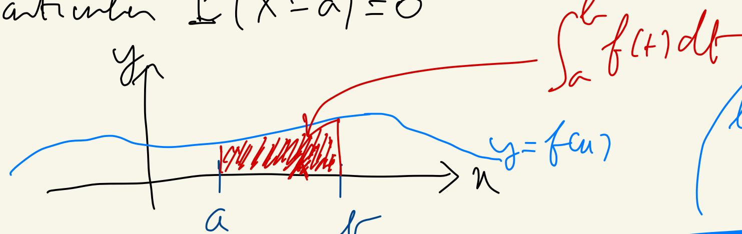
Remarque 2. Quand N est grand, le tirage peut être sans remise... On considère que X suit quand même une loi $\mathcal{B}(n,p)$: mais c'est une approximation.

4) Lois continues

Définition Une variable aléatoire continue X est une v.a. pour laquelle la probabilité d'appartenir à un intervalle se calcule à partir d'une surface délimitée par une fonction f continue par morceaux :

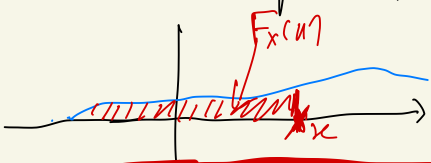
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

En particulier $\mathbb{P}(X = a) = 0$

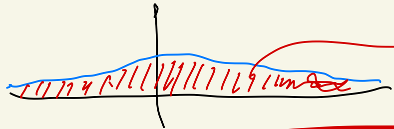


f est la densité de X

Comme pour la loi discrète, la fonction de répartition est définie par $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

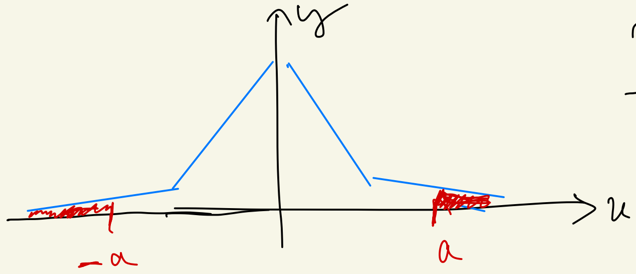


A noter : $\mathbb{P}(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$



Cas particulier : probabilités bilatérales

La fonction f est paire : axe de symétrie.

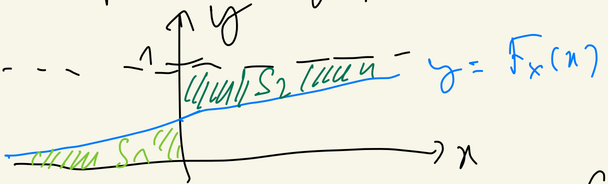


$P(|X|>a) =$

$= 2(1 - P(X<a))$

X en dehors de $[-a;a]$

Definition On définit la moyenne de X à partir du graphe de la fonction de répartition :



$$\mu_X = S_2 - S_1$$

On peut montrer que $\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.
(f est la densité de X)

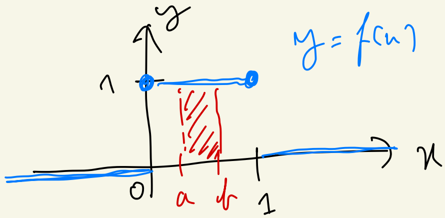
Variance de X = $\mu_{X^2} - (\mu_X)^2$

Ecart-type de X = $\sqrt{var(X)}$

5) Exemples de lois continues

Loi uniforme

- fonction de densité f : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



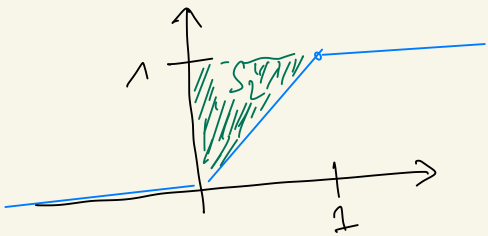
$0 \le a, b \le 1$

$P(a \le X \le b) = b - a$

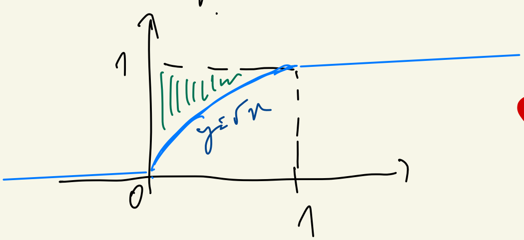
Ainsi $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

- Graphe de F_X

$\mu_X =$ aire //// $= 1/2$



- Le graphe de F_{X^2} fait intervenir $x \longmapsto \sqrt{x}$.



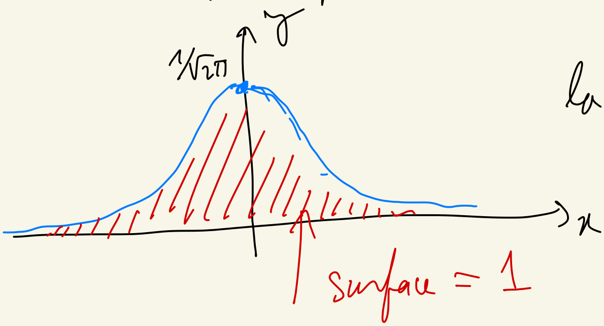
$\mu_{X^2} =$ //// $= 1/3$

$\mathrm{Var}(X) = 1/3 - (1/2)^2 = 1/12$

$\sigma_X = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

- densité définie par la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$.

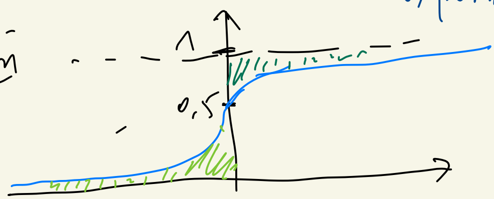


la fonction est paire.

Courbe de Gauss

($x \mapsto e^x = \exp(x)$
exponentielle)

- Fonction de répartition



$\mu_X =$ –

$\mu_X = 0$

- Pour $x \geq 0$, on montre

$$P(X^2 \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t^{-1/2} e^{-t/2}\, dt$$

loi gamma

Par le calcul : $\mu_{X^2} = 1$; $\mathrm{Var}(X) = 1$ et $\sigma_X = 1$.

⚠ Difficile

$$\boxed{\mu_X = 0 \ ; \ \sigma_X = 1}$$

problème : pas de formule pour calculer $P(X \leq x)$.
cela se fait à l'aide de tables

Exemple.

$P(X \leq 0{,}41) \simeq 0{,}6591$ (se lit via la table)

Que vaut $P(X \leq -0{,}41)$?

$$P(X \leq -0{,}41) = 1 - P(X \leq 0{,}41) \simeq 1 - 0{,}6591 \simeq 0{,}3409$$

Ainsi $P(|X| \geq 0{,}41) = P(X \leq -0{,}41) + P(X \geq 0{,}41)$

$$= 2P(X \leq -0{,}41) \simeq 0{,}6818.$$

que l'on retrouve dans le tableau « probabilités bilatérales ».

plus généralement :

Soit $a \geq 0$. $P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a)$

$$\boxed{P(|X| \geq a) = 2(1 - P(X \leq a))}$$

se lit dans le tableau probabilités bilatérales.

Cas particulier $P(|X| \geq 1) \simeq 0{,}3173$

$$\|$$

$$P(|X - \mu_X| \geq \sigma_X)$$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, $\sigma>0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu_X = \mu$

$\sigma_X = \sigma$

Fonction gamma : Γ

c'est une fonction définie pour $x \geq 0$ ... compliqué.

On a : $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma(t/2) = (t/2 - 1)\,\Gamma(t/2 - 1)$$

$$\rightsquigarrow \Gamma(t/2) = \begin{cases} (t/2 - 1)! & \text{si } t \text{ entier pair} \\ (t/2 - 1)(t/2 - 2)\cdots \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} & t \text{ impair} \end{cases}$$

Rappel : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

factoriel n

Loi de Student St(r)

r = degré de liberté.

densité $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{r}\right)^{-\left(\frac{r+1}{2}\right)}.$$

Ici $r = 1, \dots$: degré de liberté.

<u>Remarques</u>
- la fonction f est paire
- $r=1$: $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

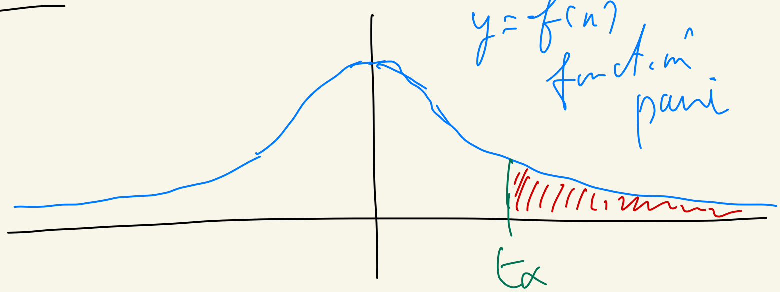
Fonction de répartition : $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$.

- pour $r = 1, 2$, l'écart-type n'est pas défini.

Difficile

pour $r \geq 2$ $$\boxed{\mu_X = 0\ ;\ \sigma_X = \sqrt{\frac{r}{r-2}}}$$

<u>Exemple</u>



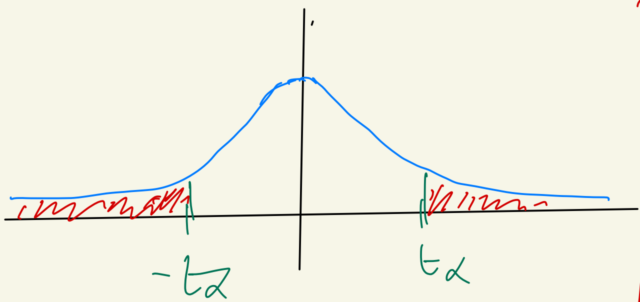
Exemple

$n=3$

$t_\alpha = 1,638.$

$P(X \geq 1,638) = 0,10 \leftarrow$ surface hachurée.

Comme la fonction f est paire, on peut parler de probabilités bilatérales.



$$\boxed{\begin{aligned} &P(|X| \geq t_\alpha) \\ &= P(X \geq t_\alpha) + P(X \leq -t_\alpha) \\ &= 2 \times P(X \geq t_\alpha). \end{aligned}}$$

Par la table (bilatérale), on trouve

$P(|X| \geq 1,64) = 0,20 \leftarrow$ seuil

$\uparrow$ donné par la table

Et on retrouve bien que

$P(|X| \geq 1,64) = 2 \times 0,10.$

5) Quelques opérations entre les variables

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si pour tout x et y :

$$P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y).$$

Cette notion peut être étendue à une famille finie de variables aléatoires.

On note alors v.a.i. (Variables Aléatoires Indépendantes)

- Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.i. avec
$$X_i \sim \mathcal{N}(0,1).$$
Alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{n})$

- $X_1, \dots, X_n$ des v.a.i. avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

et $\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

- X v.a. de moyenne μ et d'écart-type σ.

Soient $a>0$ et b deux nombres réels.

Alors $aX+b$ est une v.a.

de moyenne : $a\mu+b$

d'écart-type : $a\sigma$

Ainsi si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ alors

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

• Moyenne empirique

$X_1, \dots, X_n$ des v.a.i suivant la même loi X de moyenne μ et d'écart-type σ.

On pose

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

moyenne empirique

$$S^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$$

Variance empirique

- $\bar{X}$ et S^2 sont deux nouvelles variables aléatoires qui vont jouer un rôle important pour la suite.
- Une évaluation de $\bar{X}$ et S^2 sur un échantillon de taille n donnera lieu à des interprétations

Théorème

$X_1, \dots, X_n$ des v.a.i. avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Alors

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n(n-1)}}} \sim St(n-1)$$

loi de Student à n-1 ddl.

Une étude statistique d'une loi normale est bien contrôlée en "théorie".

6) Convergences

Théorème limite central

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.i de même loi X.

Soit μ = moyenne de X

σ = écart-type de X.

Soit $Y_n = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Alors $F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_Z(x)$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

fonctions de répartition.

Ou encore

$$P(Y_n \leq x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \, dt$$

Pour n grand, la fonction de répartition de Y_n est proche de celle de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

On dit que Y_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Conséquence :

Une valeur approchée de $P(Y_n \leq x)$ peut être donnée à partir d'une surface liée à la courbe $x \mapsto e^{-x^2/2}$.

courbe de Gauss

⚠ Difficile à calculer.

Conséquence

Théorème de Laplace-De Moivre.

$X_1, \dots, X_n$ des v.a.i de même loi $\mathcal{B}(p)$.
Bernoulli.

Soit $Y_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Alors Y_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Observons que $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Pour n grand,

$\mathcal{B}(n,p)$ est proche de $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

En pratique, on assimile une loi binomiale d'une loi normale quand

$$np > 15 \text{ et } nq > 15$$

ou quand

$$n > 30 \text{ et } (np > 5 \text{ et } nq > 5)$$

Exemple Pile ou face $X = \mathcal{B}(1/2)$

$p = 1/2$; $q = 1/2$.

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Pile} \\ 0 & \text{Face} \end{cases}$$

On effectue n lancers d'une pièce ; ces lancers sont indépendants.
L'opération est modélisée par la donnée de n v.a.i. $X_1, \dots, X_n$ où $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$.

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Ici $S_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.

Alors pour n "grand".

S_n proche de $\mathcal{N}\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

Ainsi

$$\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n}/2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

"proche"

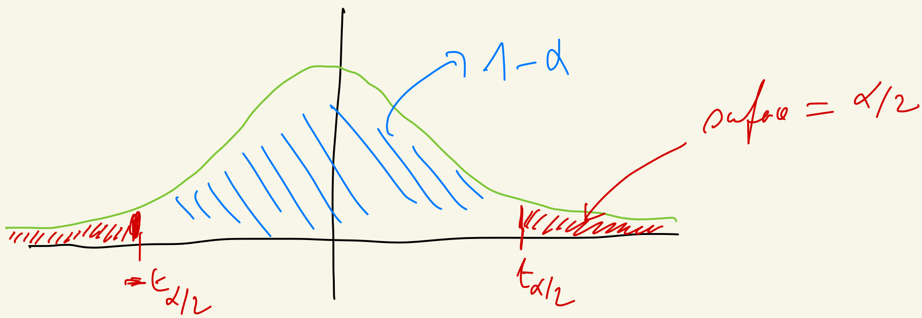
ou encore.

$$\frac{\overline{X} - 1/2}{1/2\sqrt{n}}$$ proche de $\mathcal{N}(0,1)$

où $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Pour $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit α (erreur)

Probabilité que $Y \in [-t_{\alpha/2} ; t_{\alpha/2}]$ vaut $1-\alpha$.



$\alpha = 0,1 \leadsto t_{\alpha/2} = 1,64$.

Retour pile ou face

Soit $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ la moyenne de l'échantillon

- Alors la probabilité que $\frac{\bar{x} - 1/2}{1/2\sqrt{n}}$ tombe dans $[-t_{\alpha/2} ; t_{\alpha/2}]$ vaut $1 - \alpha$.

- Pour $\alpha = 0,1 = 10\%$.

  Probabilité que $\frac{\bar{x} - 1/2}{1/2\sqrt{n}}$ tombe dans :

  $[-1,64 ; 1,64]$ vaut 90%.

ou encore

$$-1,64 \leq \frac{\bar{x} - 1/2}{1/2\sqrt{n}} \leq 1,64$$

ou encore

$$\boxed{\frac{1}{2} - 1,64 \times \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \frac{1}{2} + 1,64 \times \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

On obtient l'intervalle pour $\bar{x}$:

$$\left[\frac{1}{2} - 1,64 \times \frac{1}{2\sqrt{n}} ; \frac{1}{2} + 1,64 \times \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]$$

On rappelle que $\bar{x} = \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$ = moyenne des faces

On veut s'assurer que la moyenne $\bar{x}$ soit proche $1/2 = 0{,}5$.

- Par exemple que l'intervalle soit de longueur $0{,}2$.

On trouve alors :

$$2 \times 1{,}64 \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0{,}2$$

c'est à dire :

$$\sqrt{n} = \frac{1{,}64}{0{,}2} = 8{,}2$$

$$n = (8{,}2)^2 \cong 67{,}24.$$

<u>Conclusion</u>. Après 68 lancers, la probabilité que que $0{,}4 \leq \bar{x} \leq 0{,}6$ vaut 90 %.