SUR LA STRUCTURE GALOISIENNE DE CERTAINES PRO-p-EXTENSIONS DE CORPS DE NOMBRES

par

Christian Maire

Résumé. — Soit K_Σ/K la pro-p-extension maximale du corps de nombres K, non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini Σ de places de K. Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe fermé et distingué de $G_\Sigma := \mathrm{Gal}(K_\Sigma/K)$ et soit $G := G_\Sigma/\mathcal{H}$ le quotient. Dans des contextes arithmétiques dépendant de Σ et de la structure de G, nous étudions ici la liberté du $\mathbb{Z}_p[[G]]$-module $\mathcal{X} := \mathcal{H}/[\mathcal{H},\mathcal{H}]$.

Introduction

Soient K un corps de nombres, p un nombre premier et Σ un ensemble fini de places de K. Notons par K_Σ la pro-p-extension maximale de K non-ramifiée en dehors de Σ ; $G_\Sigma = \mathrm{Gal}(K_\Sigma/K)$. Soit L/K une extension galoisienne contenue dans K_Σ/K. Posons $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ puis considérons l'algèbre d'Iwasawa complète

$$\Lambda(G) = \mathbb{Z}_p[[G]] := \varprojlim_{U} \mathbb{Z}_p[G/U],$$

la limite projective étant prise sur les sous-groupes ouverts U de G.

Dans cet article, nous développons un point soulevé dans l'article référencé [18], c'est-à-dire l'étude de la liberté du $\Lambda(G)$-module compact $\mathcal{X} := \mathrm{Gal}(K_\Sigma/L)^{ab}$.

Le point de départ de ce travail est donc le résultat suivant que l'on peut trouver dans [18] (à comparer avec la proposition 5.6.11 de [20]) :

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R23, 11R37.

Je tiens à remercier Georges Gras pour son soutien, son intérêt pour ce travail et ses fructueux commentaires. Mes remerciements également à Thong Nguyen Quang Do pour ses remarques.

Théorème 0.1. — *Soit $\mathcal{G}$ un pro-p-groupe de présentation finie et de dimension cohomologique $cd(\mathcal{G})$ au plus 2. Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$, distingué et fermé, et ayant un multiplicateur de Schur $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ trivial. Soit $\mathrm{G} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ le quotient et soit $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab}$. Supposons le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ de type fini.*

(i) Si $\mathcal{X}$ est libre, alors $cd(\mathrm{G}) \leq 2$.
(ii) Supposons $cd(\mathrm{G}) \leq 2$ et $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$. Alors si le morphisme naturel $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} \to \mathrm{G}^{ab}$ est injectif, le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ est libre.

Du point de vue arithmétique, dans le cadre de l'étude de la liberté des $\Lambda(\mathrm{G})$-modules $\mathcal{X}$, le théorème 0.1 montre l'importance des pro-p-extensions à ramification restreinte où le groupe de Galois est de dimension cohomologique au plus 2. Par exemple, quand Σ contient toutes les places au-dessus de p (pour $p > 2$), il est bien connu que G_Σ est de dimension cohomologique au plus 2. Mais c'est seulement récemment grâce aux travaux de Labute [14] que l'on connaît des exemples de pro-p-extensions non ramifiées en p où la dimension cohomologique est égale à 2. L'idée de Labute a été reprise puis développée par de nombreux auteurs : Schmidt dans [26], Vogel [30], Salle [25], Labute et Mináč [15]...
Dans ce travail, les extensions K_S/K à ramification incomplète (S ne contient pas toutes les places au-dessus de p) où la dimension cohomologique de G_S est au plus 2 jouent un rôle important. Elles nous permettent d'exhiber des exemples de $\Lambda(\mathrm{G}_S)$-modules $\mathcal{X} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S)^{ab}$ libres et non triviaux (suivant les notations du théorème 0.1, $\mathrm{G} = \mathrm{G}_S$, $\mathcal{G} = \mathrm{G}_\Sigma$ avec $S \subset \Sigma$).
Quand S évite les places divisant p, les groupes G_S sont au coeur d'un cas particulier de la conjecture de Fontaine-Mazur [3], et pour celle-ci, l'étude de la liberté des $\Lambda(\mathrm{G}_S)$-modules en jeu n'est pas sans intérêt (voir [18]).

Ce travail comporte deux parties. Dans la première, nous commençons par rappeler quelques faits généraux sur l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$. Au passage, pour que cette section soit complète, nous redonnons les grandes lignes de la preuve du théoréme 0.1. Nous abordons ensuite la question du calcul du rang des modules $\mathcal{X}$ lorsque ceux-ci ont un sens. Nous terminons par quelques remarques sur le lien entre modules et sous-modules.
La seconde partie est consacrée aux applications arithmétiques. Nous rappelons tout d'abord les résultats sur la dimension cohomologique des extensions considérées pour justifier les hypothèses effectuées dans la partie I. Les trois dernières sections sont consacrées à l'étude de diverses situations arithmétiques : S-rationalité, fausse courbe de Tate, théorie d'Iwasawa abélienne et extensions localement cyclotomiques, ramification mixte ... Typiquement, on étudie des situations où $\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$, où $\mathrm{G} = \mathrm{G}_S$, où G est pro-$p$-libre ... Dans les contextes abordés, nous faisons ressortir l'importance de l'étude de la torsion

des groupes $\mathcal{G}^{ab}$ en jeu mais aussi de la ramification modérée. Au passage, nous retrouvons quelques résultats bien connus.
Les méthodes utilisées s'inspirent fortement du livre de Gras [6].
Les calculs ont été effectués avec GP-PARI [1].

Notations. Si A désigne un $\mathbb{Z}_p$-module, nous notons par d_pA la dimension sur $\mathbb{F}_p$ de A/A^p, par $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}A$ la dimension sur $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$, par $A[p]$ les éléments de A tués par p (ou encore la p-torsion de A) et par $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}A$ le sous-module de torsion de A.

PARTIE I
QUELQUES RUDIMENTS ALGÉBRIQUES

1. Généralités

1.1. Λ-module. — Cette partie repose sur l'article de Brumer [2]. Il convient également de citer le livre de Neukirch, Schmidt et Wingberg [20].
Soit G un pro-p-groupe (de type fini). La $\mathbb{Z}_p$-algèbre compact $\Lambda(\mathrm{G})$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathrm{G}}$ engendré par I_{G} l'idéal d'augmentation de $\Lambda(\mathrm{G})$ et par $p\Lambda(\mathrm{G})$. Si $cd(\mathrm{G})$ désigne la dimension cohomologique de G, la dimension projective de l'anneau $\Lambda(\mathrm{G})$ est finie si et seulement si $cd(\mathrm{G}) < \infty$ et dans ce cas elle est égale à $1 + cd(\mathrm{G})$.
Soit $\mathcal{C}$ la catégorie abélienne des $\Lambda(\mathrm{G})$-modules compacts. Dans toute la suite, les modules considérés $\mathcal{X}$ sont dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{X}$ est de type fini (sur $\Lambda(\mathrm{G})$), alors la topologie initiale sur $\mathcal{X}$ et la topologie $\mathfrak{m}_{\mathrm{G}}$-adique induite sur $\mathcal{X}$ coïncident. Rappelons alors le lemme de Nakayama crucial dans notre contexte.

Lemme 1.1. — *Le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X} \in \mathcal{C}$ est de type fini si et seulement si $\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \mathcal{X}/\mathfrak{m}_{\mathrm{G}}$ est de dimension finie r sur $\mathbb{F}_p$.*

Ainsi si $\mathcal{X}$ est de type fini, il existe un $\Lambda(\mathrm{G})$-morphisme continu $\Lambda(\mathrm{G})^r \twoheadrightarrow \mathcal{X}$. Lorsque r est minimal (en fait donné par le lemme précédent), on obtient une présentation minimale de $\mathcal{X}$.
Soit donc $\mathcal{X}$ un $\Lambda(\mathrm{G})$-module de type fini. Le module $\mathcal{X}$ est libre s'il admet une base, c'est-à-dire s'il existe un entier r tel que $\mathcal{X} \simeq \Lambda(\mathrm{G})^r$, isomorphisme de $\Lambda(\mathrm{G})$-modules. L'anneau $\Lambda(\mathrm{G})$ étant local, lorsque $\mathcal{X}$ est libre (et de type fini), l'entier r est un invariant de $\mathcal{X}$. C'est le rang de $\mathcal{X}$. Rappelons que libre ou projectif (pour les modules de type fini), ici, c'est la même chose, puisque $\Lambda(\mathrm{G})$ est un anneau local.

Définition 1.2. — Lorsque $\mathcal{X}$ est $\Lambda(\mathrm{G})$-libre de type fini, le rang $\rho_{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ est l'unique entier vérifiant

$$\mathcal{X} \simeq \Lambda(\mathrm{G})^{\rho_{\mathcal{X}}}.$$

Remarque 1.3. — Si G est un pro-p-groupe p-adique analytique sans torsion, alors $\Lambda(\mathrm{G})$ est noetherien ([16], [4]) et sans diviseur de zéro ([21]) : il admet un corps des fractions $\mathrm{Q}(\mathrm{G})$ ([17]). Le rang d'un $\Lambda(\mathrm{G})$-module de type fini $\mathcal{X}$ est dans ce cas défini comme la dimension sur $\mathrm{Q}(\mathrm{G})$ de $\mathcal{X} \otimes_{\Lambda(\mathrm{G})} \mathrm{Q}(\mathrm{G})$. Bien sûr, quand $\mathcal{X}$ est libre, ces rangs coïncident.

Sur $\mathcal{C}$, on peut définir un produit tensoriel "compact" : pour $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{C}$ (à droite pour $\mathcal{X}$ et à gauche pour $\mathcal{Y}$), on pose $\mathcal{X}\hat{\otimes}_{\mathrm{G}}\mathcal{Y} := \varprojlim_{U,V}(\mathcal{X}/U) \otimes_{\mathrm{G}} (\mathcal{Y}/V)$, la limite étant prise sur les sous-modules ouverts U de X et V de $\mathcal{Y}$. Ce foncteur n'est pas exact à droite et $\mathcal{T}or_{\mathrm{G}}$ est le foncteur dérivé de $\hat{\otimes}_{\mathrm{G}}$. Rappelons que si $\mathcal{X}$ est de type fini, alors $\mathcal{X}\hat{\otimes}_{\mathrm{G}}\mathcal{Y} \simeq \mathcal{X} \otimes_{\mathrm{G}} \mathcal{Y}$ et que pour $\mathcal{X} \in \mathcal{C}$ (à gauche), $\mathcal{T}or^n_{\mathrm{G}}(\mathbb{Z}_p, \mathcal{X}) \simeq H_n(\mathrm{G}, \mathcal{X})$. Ainsi : $H_0(\mathrm{G}, \mathcal{X}) = \mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \mathcal{X}/I_{\mathrm{G}}$. Rappelons que l'on a aussi, pour $n \geq 1$, $H^n(\mathrm{G}, \mathcal{X}^*) \simeq H_n(\mathrm{G}, \mathcal{X})^*$, où $.^*$ désigne la dualité de Pontryagin.
Terminons cette sous-section par :

Proposition 1.4. — *Soit $\mathcal{X}$ un $\Lambda(\mathrm{G})$-module de type fini.*

(i) Alors $\mathcal{X}$ est $\Lambda(\mathrm{G})$-libre si et seulement si $H_1(\mathrm{G}, \mathcal{X})$ est trivial et $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ est $\mathbb{Z}_p$-libre.

(ii) Si $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$ et si $\mathcal{X}$ est $\Lambda(\mathrm{G})$-libre, alors le morphisme $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} \to \mathrm{G}^{ab}$ est injectif.

Démonstration. — (i) Soit

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \Lambda(\mathrm{G})^r \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow 1,$$

une présentation minimale de $\mathcal{X}$. Alors, il vient la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_1(\mathrm{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow N_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^r \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \longrightarrow 1.$$

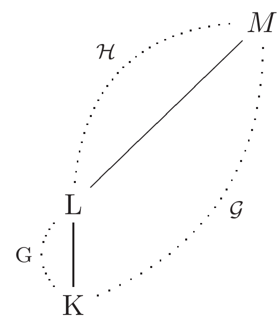
En se rappelant que pour un $\Lambda(\mathrm{G})$-module projectif $\mathcal{X}$, $H_1(\mathrm{G}, \mathcal{X}) = 1$, la conclusion est immédiate.
(ii) Comme $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$, la suite spectrale $H^i(\mathrm{G}, H^j(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \Longrightarrow H^{i+j}(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ donne la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathcal{G}^{ab} \longrightarrow \mathrm{G}^{ab} \longrightarrow 1 .$$

Ainsi $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ est $\mathbb{Z}_p$-libre si et seulement si le morphisme $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} \to \mathrm{G}^{ab}$ est injectif. On conclut avec (i). $\square$

2. Le cadre

2.1. Le contexte galoisien. — Soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{M}$ une tour de pro-p-extensions (locales ou globales). Notons $\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\mathrm{M}/\mathrm{K})$, $\mathcal{H} := \mathrm{Gal}(\mathrm{M}/\mathrm{L})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$. On suppose $\mathcal{G}$ de type fini.



Soit $\mathcal{X} := \mathcal{H}^{ab} = \mathcal{H}/[\mathcal{H},\mathcal{H}]$. Alors $\mathcal{X}$ est un $\Lambda(\mathrm{G})$-module compact.

Le lemme suivant va nous assurer que les situations arithmétiques considérées par la suite ne font apparaître que des $\Lambda(\mathrm{G})$-modules de type fini.

Lemme 2.1. — *Le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ est de type fini si et seulement si le noyau de l'inflation*

$$H^2(\mathrm{G},\mathbb{F}_p) \overset{Inf}{\to} H^2(\mathcal{G},\mathbb{F}_p)$$

est fini.
En particulier, $\mathcal{X}$ est de type fini dès lors que le groupe $H^2(\mathrm{G},\mathbb{F}_p)$ est fini.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la suite spectrale

$$H^i(\mathrm{G},H^j(\mathcal{H},\mathbb{F}_p)) \Longrightarrow H^{i+j}(\mathcal{G},\mathbb{F}_p)$$

et du lemme de Nakayama. □

Remarque 2.2. — Nous allons étudier le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ dans les deux situations suivantes : (i) G est pro-p, p-adique analytique sans p-torsion ; (ii) $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K})$, K_S/K étant la pro-p-extension maximale de K non-ramifiée en dehors de S (fini). Dans ces deux cas, les groupes $H^2(\mathrm{G},\mathbb{F}_p)$ sont bien finis (pour (i), voir la section suivante ; pour (ii), voir par exemple [13], ou encore[6], Appendice).

Remarque 2.3. — Attention, un cadre arithmétique raisonnable ne fournit pas systématiquement des $\Lambda(\mathrm{G})$-modules de type fini. Typiquement, en s'appuyant sur un résultat local, dans [9] sont données des situations pour lesquelles certains pro-p-groupes arrivant de l'arithmétique global n'ont pas un nombre fini de relations.

2.2. Le théorème 0.1. — Redonnons les grandes lignes de la preuve du théorème 0.1.
Soit donc $\mathcal{G}$ un pro-p-groupe de dimension cohomologique au plus 2, soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe fermé et distingué tel que $H_2(\mathcal{H},\mathbb{Z}_p)=0$. Soient $\mathrm{G}=\mathcal{G}/\mathcal{H}$ et $\mathcal{X}=\mathcal{H}^{ab}$.
Comme pour $i\geq 1$, $H_i(\mathcal{H},\mathbb{Z}_p)=0$, la suite spectrale $H^i(\mathrm{G},H^j(\mathcal{H},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))\Longrightarrow H^{i+j}(\mathcal{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ donne la suite exacte

$$\begin{tikzcd} H_2(\mathcal{G},\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & H_2(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \arrow[r] & \mathcal{G}^{ab} \arrow[r, two heads] & \mathrm{G}^{ab} \, . \\ H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}) \arrow[u] & H_3(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p) \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

• Supposons que $cd(\mathrm{G})\leq 2$ et que $H_2(\mathcal{G},\mathbb{Z}_p)=0$. Alors $H_2(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p)$ est $\mathbb{Z}_p$-libre, $H_1(\mathrm{G},\mathcal{X})=1$ et l'on a la suite exacte

$$\begin{tikzcd} H_2(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p) \arrow[r, hook] & \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \arrow[r] & \mathcal{G}^{ab} \arrow[r, two heads] & \mathrm{G}^{ab} \, . \end{tikzcd}$$

Ainsi, si $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab}\to \mathrm{G}^{ab}$ est injectif, $\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$ est $\mathbb{Z}_p$-libre, et d'après la proposition 1.4, on en déduit que $\mathcal{X}$ est $\Lambda(\mathrm{G})$-libre.
• Supposons le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ libre. Soient

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[d, dotted] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathcal{R} \arrow[r] & F \arrow[r] & \mathrm{G} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

deux présentations de G et $\mathcal{G}$ par le pro-p-groupe libre F à d générateurs, où $d=d_p(\mathcal{G}^{ab})$. Le lemme du serpent permet d'obtenir la suite exacte $1\longrightarrow W\longrightarrow \mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{H}\longrightarrow 1$, puis la suite exacte de $\Lambda(\mathrm{G})$-modules

$$\begin{tikzcd} 0=H_2(\mathcal{H},\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & (W^{ab})_{\mathcal{H}} \arrow[r] & \mathcal{R}^{ab} \arrow[r, two heads] & \mathcal{X} \, . \end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{G}$ est de dimension cohomologique au plus 2, un résultat de Brumer [2] indique que W^{ab} est $\mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]$-libre. Ainsi, $(W^{ab})_{\mathcal{H}}$ est $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$-libre. Comme $\mathcal{X}$ est $\Lambda(\mathrm{G})$-libre, on en déduit que $\mathcal{R}^{ab}$ est aussi $\Lambda(\mathrm{G})$-libre, et le même résultat de Brumer (en fait la réciproque) indique que $cd(\mathrm{G})\leq 2$.

Grâce à la proposition 1.4, précisons le point (ii) du théorème 0.1 :

Proposition 2.4. — *Sous les conditions du théorème 0.1, supposons que* $cd(\mathrm{G})\leq 2$, *et que* $H_2(\mathcal{G},\mathbb{Z}_p)=H_2(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p)=0$. *Alors le* $\Lambda(\mathrm{G})$-*module* $\mathcal{X}$ *est libre si et seulement si le morphisme* $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab}\to\mathrm{G}^{ab}$ *est injectif.*

3. Les estimations du rang $\rho_{\mathcal{X}}$

3.1. La caractéristique d'Euler-Poincaré. —

Définition 3.1. — Sot G un pro-p-groupe. On dit que G est homologiquement de type fini si pour tout $i \geq 0$, les groupes $H_i(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p)$ sont de type fini (sur $\mathbb{Z}_p$).

Remarque 3.2. — On peut remarquer que G est homologiquement de type fini si et seulement si pour tout $i \geq 0$, les groupes $H_i(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p)$ sont finis.

Exemple 3.3. — (i) Si G est de dimension cohomologique au plus 2, alors G est homologiquement de type fini si et seulement si G est de présentation finie (i.e. $H_1(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p)$ et $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p)$ sont finis).
(ii) Soit G un pro-p-groupe de type fini. Si l'anneau $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$ est noetherien, alors G est homologiquement de type fini. En particulier, c'est le cas si G est pro-p, p-adique analytique.
En effet, soit

$$\cdots \to F_{i+1} \to F_i \to \cdots F_1 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$$

une $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$-résolution libre de $\mathbb{Z}_p$. Comme $\mathbb{Z}_p$ est de type fini et que $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$ est noetherien, on peut s'assurer que les modules F_i sont de type fini et ainsi $F_i \simeq \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^{r_i}$. Les groupes d'homologie $H_i(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p)$ se calculent alors à partir du complexe $\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{r_{i+1}} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{r_i} \longrightarrow \cdots$ et ils sont donc bien de type fini (sur $\mathbb{Z}_p$). Pour les mêmes raisons, si $\mathcal{X}$ est un $\Lambda(\mathrm{G})$-module de type fini, les groupes $H_i(\mathrm{G}, \mathcal{X})$ sont de type fini.

Définition 3.4. — Soit G un pro-p-groupe homologiquement de type fini. On définit par

$$\chi_n(\mathrm{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_p H_i(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p),$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré de G tronquée à l'ordre n.
Si G est de dimension cohomologique n, la caractéristique $\chi(\mathrm{G})$ de G est simplement l'entier $\chi(\mathrm{G}) = \chi_n(\mathrm{G})$.
De même, on définit

$$\chi_n^*(\mathrm{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_i(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p).$$

Si G est de dimension cohomologique finie n, on pose $\chi^*(\mathrm{G}) = \chi_n^*(\mathrm{G})$.

Il convient de terminer par le lemme classique suivant :

Lemme 3.5. — *Pour tout entier $n > 0$, on a*

$$\chi_n^*(\mathrm{G}) = \chi_n(\mathrm{G}) + (-1)^{n+1} d_p H_n(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p)[p].$$

En particulier, si G *est de dimension cohomologique finie,* $\chi^*(\mathrm{G}) = \chi(\mathrm{G})$.

3.2. Un lemme fondamental. — Soient donc $\mathcal{G}$ un pro-p-groupe homologiquement de type fini, $\mathcal{H}$ un sous-groupe distingué et fermé de $\mathcal{G}$. Soient $\mathrm{G} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ le quotient (que l'on suppose aussi homologiquement de type fini) et $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab}$ ($\mathcal{X}$ est alors de type fini cf. lemme 1.1).
Supposons $\mathcal{G}$ de dimension cohomologique au plus 2 et supposons également trivial le groupe $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$.
La suite spectrale

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathrm{G}, H^j(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \Longrightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

nous permet de montrer le lemme à venir, très important pour la suite de cet article.

Lemme 3.6. — *(i) Pour $i \geq 2$, le morphisme de dérivation*

$$d_2^{i,1} : H^i(\mathrm{G}, \mathcal{X}^*) \to H^{i+2}(\mathrm{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

est un isomorphisme.

(ii) Le morphisme de dérivation

$$d_2^{1,1} : H^1(\mathrm{G}, \mathcal{X}^*) \to H^3(\mathrm{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

est surjectif.

(iii) Il vient

$$\chi_3^*(\mathrm{G}) - \chi_2^*(\mathcal{G}) = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}H_1(\mathrm{G}, \mathcal{X}).$$

(iv) Si de plus $H_2(\mathcal{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$, alors $d_2^{1,1}$ est un isomorphisme et

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \chi_2^*(\mathrm{G}) - \chi_2^*(\mathcal{G}).$$

(v) Si de plus $H_2(\mathcal{G}, \mathbb{Z}_p) = H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$, alors

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}^{ab}.$$

Démonstration. — (i) Soit $i \geq 2$ et soit donc le morphisme de dérivation $d_2^{i,1} : E_2^{i,1} \to E_2^{i+2,0}$. Comme $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$, il vient $\ker(d_2^{i,1}) = E_3^{i,1} = E_\infty^{i,1}$. Ainsi, $\ker(d_2^{i,1})$ est un quotient d'un sous-groupe de $E^{i+1} = H^{i+1}(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et est donc trivial car $cd(\mathcal{G}) \leq 2$. Quant à l'image de $d_2^{i,1}$, on obtient :

$$\mathrm{Im}(d_2^{i,1}) = \ker(d_2^{i+1,0}),$$

car $E_3^{i+2,0} = E_\infty^{i+2,0}$ est un quotient d'un sous-groupe de E^{i+2}, donc aussi trivial. Comme $d_2^{i+1,0}$ est nul, on a donc $\ker(d_2^{i+1,0}) = E_2^{i+1,0}$, d'où le résultat.

(ii)-(iii)-(iv) et (v) : ces points résultent de la longue suite exacte

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathrm{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r, hook] & H^1(\mathcal{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[r] & H^1(\mathcal{H},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{G}} \arrow[d] \\
H^1(\mathrm{G},H^1(\mathcal{H},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \arrow[d] & H^2(\mathcal{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[l] & H^2(\mathrm{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \arrow[l] \\
H^3(\mathrm{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & &
\end{tikzcd}$$

□

Ce lemme implique immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.7. — *Si pour un entier $n \geq 1$, $H_n(\mathrm{G},\mathcal{X}) = H_{n+1}(\mathrm{G},\mathcal{X}) = 0$, alors $cd(\mathrm{G}) \leq n+1$.*

En particulier, si $\mathcal{X}$ est libre, la dimension cohomologique de G est au plus 3. Rappelons que le théorème 0.1 indique en fait $cd(\mathrm{G}) \leq 2$.

Pour terminer, notons que si $\mathcal{X}$ est libre alors $\rho_{\mathcal{X}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$. Il convient alors de donner une estimation de cette quantité.
À ce niveau, ne supposons plus le groupe $H_2(\mathcal{H},\mathbb{Z}_p)$ nécessairement trivial.

Proposition 3.8. — *Supposons $H^2(\mathcal{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$. Alors*
(i) $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} - 1 + \chi_2(\mathrm{G}) - d_pH_2(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p)[p]$;
(ii) Si de plus $H^2(\mathrm{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$, on retrouve

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}^{ab}.$$

Démonstration. — Dans ce cas, on se limite à la suite exacte d'inflation-restriction appliquée à

$$1 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1.$$

Ceci donne immédiatement

$$H^1(\mathrm{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow H^1(\mathcal{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^1(\mathcal{H},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{G}} \twoheadrightarrow H^2(\mathrm{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Pour obtenir le résultat, il suffit ensuite d'utiliser l'égalité :

$$\chi_2^*(\mathrm{G}) = \chi_2(\mathrm{G}) - d_pH_2(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p)[p].$$

□

Corollaire 3.9. — *Supposons $cd(\mathrm{G}) \leq 2$ et $H^2(\mathcal{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$. Alors $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} - 1 + \chi_2(\mathrm{G})$.*

Démonstration. — Dans ce cas, le groupe $H_2(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p)$ est sans p-torsion. Il suffit ensuite d'utiliser la proposition 3.8. $\square$

3.3. Quand G est p-adique analytique. — Dans cette partie, nous supposons $\mathcal{G}$ de dimension cohomologique au plus 2 et le groupe $H^2(\mathcal{H},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ trivial.
Pour un pro-p-groupe p-adique analytique sans p-torsion, on rappelle que $\rho_{\mathcal{X}}$ a bien un sens. Le résultats vont alors reposer sur le théorème de Howson :

***Théorème 3.10* (Howson, [11]).** — *Soit* G *un pro-p-groupe p-adique analytique sans p-torsion. Soit* $\mathcal{X}$ *un* $\Lambda(\mathrm{G})$*-module. Alors*

$$\rho_{\mathcal{X}} = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_i(\mathrm{G},\mathcal{X}).$$

Ceci nous permet alors de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.11. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un pro-p-groupe, non trivial, homologiquement de type fini et de dimension cohomologique au plus* 2*. Soit* $\mathcal{H}$ *un sous-groupe fermé et distingué de* $\mathcal{G}$*, soit* $\mathrm{G}=\mathcal{G}/\mathcal{H}$ *le quotient et soit* $\mathcal{X}=\mathcal{H}^{ab}$*. Supposons le groupe* $H^2(\mathcal{H},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ *trivial et* G *p-adique analytique sans p-torsion. Alors*

$$\rho_{\mathcal{X}} = -\chi(\mathcal{G}).$$

Démonstration. — On applique le résultat de Howson aux $\Lambda(\mathrm{G})$-modules $\mathcal{X}$ et $\mathbb{Z}_p$. Avec le lemme 3.6, il vient

$$\rho_{\mathcal{X}} = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_i(\mathrm{G},\mathcal{X}) = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}) + \sum_{i\geq 4}(-1)^i \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_i(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p).$$

Comme

$$0 = \rho_{\mathbb{Z}_p} = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_i(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p),$$

il vient au total

$$\rho_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_{\mathrm{G}} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}) - \chi_3^*(\mathrm{G}),$$

c'est-à-dire (d'après le point (iii) du lemme 3.6)

$$\rho_{\mathcal{X}} = -\chi_2^*(\mathcal{G}) = -\chi^*(\mathcal{G}) = -\chi(\mathcal{G}).$$

$\square$

4. $\Lambda(\mathrm{G})$-modules et sous-$\Lambda(\mathrm{G})$-modules

Commençons par donner une définition.

***Définition 4.1* (La condition $(\mathcal{L})$).** — Soit $\mathcal{G}$ un pro-p-groupe et $\mathcal{H}$ un sous groupe fermé de $\mathcal{G}$. On dit que le couple $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ satisfait la condition $(\mathcal{L})$ si les groupes $H^2(\mathcal{G},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et $H^2(\mathcal{H},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont triviaux.

Soit la tour de pro-p-extensions $\mathrm{K}-\mathrm{L}-\mathrm{M}-\mathrm{M}'$ et la situation galoisienne s'en déduisant. On obtient la suite de pro-p-groupes

$$1 \longrightarrow \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow \mathcal{H}\text{"} \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1,$$

où $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(M/\mathrm{K})$, $\mathcal{G}' = \mathrm{Gal}(\mathrm{M}'/\mathrm{K})$, $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{M}/\mathrm{L})$, $\mathcal{H}' = \mathrm{Gal}(\mathrm{M}'/\mathrm{L})$, $\mathcal{H}'' = \mathrm{Gal}(\mathrm{M}'/\mathrm{M})$, $\mathcal{X}' = \mathcal{H}'^{ab}$, $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab}$.
Supposons la condition $(\mathcal{L})$ satisfaite par les couples $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ et $(\mathcal{G}',\mathcal{H}')$.
Supposons de plus que les groupes $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}$ sont de présentation finie et de dimension cohomologique au plus 2.
Pour terminer, supposons également que le groupe G est homologiquement de type fini (ce qui implique que les $\Lambda(\mathrm{G})$-modules $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont de type fini).

Posons

$$\mathcal{Y} := \frac{\mathcal{H}''}{[\mathcal{H}'',\mathcal{H}']} \simeq (\mathcal{H}''^{ab})_{\mathcal{H}}.$$

Il vient immédiatement que $\mathcal{Y}$ est un $\Lambda(\mathrm{G})$-module compact.

Proposition 4.2. — *i) Sous les conditions précédentes, on a la suite exacte de $\Lambda(\mathrm{G})$-modules :*

$$1 \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow 1.$$

ii) Le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{Y}$ est de type fini.
iii) Si G est p-adique analytique sans p-torsion, alors $\rho_{\mathcal{X}'} = \rho_{\mathcal{X}} + \rho_{\mathcal{Y}}$.

Démonstration. — Le point i) se déduit de la suite exacte $1 \longrightarrow \mathcal{H}'' \longrightarrow \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 1$ associée au fait que le groupe $H_2(\mathcal{H},\mathbb{Z}_p)$ est trivial.
Le point i) et le lemme 3.6 associés à l'isomorphisme $H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}) \simeq H_3(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p)$, permet d'obtenir la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_3(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{Y}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathcal{X}'_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathrm{G}} \longrightarrow 1. \tag{1}$$

On conclut avec le lemme de Nakayama.
Pour le point iii), il suffit de tensoriser la suite exacte du point i) par le corps des fractions $Q(\mathrm{G})$ de $\Lambda(\mathrm{G})$. $\square$

A l'aide de la proposition 1.4, on peut décliner les différentes interprétations de la suite exacte (1) :

Théorème 4.3. — *Conservons les notations de cette section. Supposons la condition* $(\mathcal{L})$ *satisfaite par les couples* $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ *et* $(\mathcal{G}',\mathcal{H}')$. *Supposons les groupes* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{G}'$ *de dimension cohomologique au plus* 2. *Supposons également que les groupes* $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ *et* G *sont homologiquement de type fini. Alors, il vient les points suivants :*

(i) Si $\mathcal{X}'$ *est* $\Lambda(\mathrm{G})$*-libre,* $\mathcal{Y}$ *l'est aussi et* $\rho_{\mathcal{Y}} \leq \rho_{\mathcal{X}'}$.
(ii) Si $\mathcal{Y}$ *et* $\mathcal{X}$ *sont libres,* $\mathcal{X}'$ *l'est aussi et* $\rho_{\mathcal{X}'} = \rho_{\mathcal{X}} + \rho_{\mathcal{Y}}$.
(iii) Supposons $\mathcal{X}$ *libre. Alors* $\mathcal{Y}$ *est libre si et seulement si,* $\mathcal{X}'$ *est libre.*

Démonstration. — Commençons par donner un lemme qui se déduit immédiatement du lemme 3.6.

Lemme 4.4. —

$$H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}) \simeq H_3(\mathrm{G},\mathbb{Z}_p) \simeq H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}').$$

Ainsi quand $\mathcal{X}$ (ou $\mathcal{X}'$) est libre, il vient $cd(\mathrm{G}) \leq 2$ (cf théorème 0.1) et donc $H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}') = 0$ (resp. $H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}) = 0$).
(i) : grâce au lemme 3.6, le groupe $H_2(\mathrm{G},\mathcal{X})$ est trivial. Le module $\mathcal{X}'$ étant libre, le groupe $H_1(\mathrm{G},\mathcal{X}')$ est trivial, il en est alors de même pour $H_1(\mathrm{G},\mathcal{Y})$ (c'est une conséquence de la suite exacte (1)). Ensuite, $\mathcal{Y}_{\mathrm{G}} \hookrightarrow \mathcal{X}'_{\mathrm{G}} \simeq \mathbb{Z}_p^d$ et il suffit ensuite d'utiliser la proposition 1.4.
(ii) et (iii) : évident. $\square$

On obtient alors

Corollaire 4.5. — *Sous les conditions du précédent théorème, lorsque les modules* $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$ *et* $\mathcal{X}'$ *sont libres, il vient*

$$\rho_{\mathcal{Y}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}'^{ab} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab}.$$

Cette égalité reste valable pour G p*-adique analytique sans* p*-torsion.*

Démonstration. — Dans la situation libre, cela se déduit du corollaire 3.9.
Quand G est pro-p, p-adique analytique sans p-torsion, d'après le théorème 3.11

$$\rho_{\mathcal{Y}} = \chi(\mathcal{G}) - \chi(\mathcal{G}').$$

Il suffit alors de noter ici que $\chi(\mathcal{G}) = \chi^*(\mathcal{G}) = 1 - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab}$ (idem pour $\mathcal{G}'$). $\square$

PARTIE II
ILLUSTRATIONS ARITHMÉTIQUES

4.1. Sur la dimension cohomologique. — [voir par exemple [8], [28], [20]]

4.1.1. le cas local. — Soit K_v une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Désignons par $\overline{\mathrm{K}}_v$ la pro-p-extension maximale de K_v et posons $\mathcal{G}_v = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}_v/\mathrm{K}_v)$.
La dimension cohomologique de $\mathcal{G}_v$ est au plus 2 et le multiplicateur de Schur $H^2(\mathcal{G}_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est trivial (la dimension cohomologique stricte de $\mathcal{G}_v$ vaut 2). Appliquant ce fait aux extensions finies $\mathrm{L}_v/\mathrm{K}_v$ de K_v, on obtient que pour tout sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}_v$, $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$. En effet :

$$H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \lim_{\substack{\to \\ \mathrm{L}_v}} H^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}_v/\mathrm{L}_v), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),$$

la limite projective étant prise sur les extensions galoisiennes finies $\mathrm{L}_v/\mathrm{K}_v$ fixes par $\mathcal{H}$.

Corollaire 4.6. — *Pour tout sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}_v$, le couple $(\mathcal{G}_v, \mathcal{H})$ satisfait la condition $(\mathcal{L})$ (cf. définition 4.1).*

Le groupe $\mathcal{G}_v$ est libre (c'est-à-dire de dimension cohomologique 1) si et seulement si le corps K_v ne contient pas les racines p-èmes de l'unité. Rappelons pour terminer que le groupe de Galois $\mathcal{G}_v^{ab}$ de la pro-p-extension abélienne maximale $\overline{\mathrm{K}}_v^{ab}$ de K_v est isomorphe au compactifié p-adique $\mathcal{K}_v^\times := \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathrm{K}_v^\times/\mathrm{K}_v^{\times p^n}$ de $\mathrm{K}_v^\times$.
Cet isomorphisme est donné par le symbole de réciprocité $(\,\cdot\,, \overline{\mathrm{K}}_v^{ab}/\mathrm{K}_v)$.

4.1.2. Le cas global. — Soit K un corps de nombres de signature (r_1, r_2). L'ensemble S désigne à priori un ensemble fini quelconque de places de K, l'ensemble S_p est l'ensemble constitué des places de K au-dessus de p. Soit K_S/K la pro-p-extension maximale de K non-ramifiée en dehors de S. Posons $\mathrm{G}_S = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K})$.
Soit v une place de K. Notons par $\mathcal{U}_v$ le compactifié p-adique des unités de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de K_v : $\mathcal{U}_v = \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathcal{O}_v^\times/\mathcal{O}_v^{\times p^n}$. Si v est étrangère à p, $\mathcal{U}_v$ est égal au p-Sylow du groupe des racines de l'unité de K_v. Le groupe d'inertie de v dans l'extension K_S/K est isomorphe, via le symbole de réciprocité, à un quotient de $\mathcal{U}_v$ et la place v est donc non-ramifiée dans K_S/K dès lors que $\mathcal{U}_v = \{1\}$. Ainsi, pour toute la suite, nous supposons que les places v de S qui sont étrangères à p sont telles que $\mathcal{U}_v$ est non-trivial ce qui équivaut au fait que K_v contient les racines p-èmes de l'unité.

4.1.2.1. La dimension cohomologique 2. — Notons que pour S fini quelconque, si G_S est de dimension cohomologique au plus 2, alors G_S est homologiquement de type fini. En effet, les groupes G_S sont de présentation finie.

Lorsque S contient S_p, le groupe G_S est de dimension cohomologique $cd(\mathrm{G}_S)$ au plus 2 (pour $p = 2$, on s'assure que K est totalement imaginaire). Si l'on désigne par $\chi(\mathrm{G}_S)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de G_S (voir la section 3.1), il vient dans ce cas : $\chi(\mathrm{G}_S) = -r_2$, où r_2 est le nombre de places complexes de K (voir par exemple [8], [20] ...).

Le travail de Labute [14] montre que quand S ne contient pas toutes les places au-dessus de p, la dimension cohomologique de G_S peut être au plus 2.

Nous allons maintenant rappeler l'interprétation arithmétique de la trivialité des multiplicateurs de Schur des groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ (ou encore de la condition $(\mathcal{L})$).

4.1.2.2. La conjecture de Leopoldt. — Soit K un corps de nombres de degré $n = r_1 + 2r_2$. Posons $\mathcal{E} = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E$ le compactifié p-adique du groupe des unités E de K.

La conjecture de Leopoldt prédit que l'image de $\mathcal{E}$ dans l'algèbre semi-locale $\prod_{v\in S_p} \mathcal{U}_v$ est de $\mathbb{Z}_p$-rang maximal, à savoir $r_1 + r_2 - 1$. Comme noté par exemple dans [22], cette conjecture pour le couple (K, p) équivaut à la trivialité du groupe $H^2(\mathrm{G}_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ dès lors que S contient l'ensemble des places au-dessus de p. La conjecture de Leopoldt le long de K_S/K équivaut alors au fait que la dimension cohomologique stricte de G_S vaut 2.

Définissons

$$\mathcal{E}_S = \ker\left(\mathcal{E} \xrightarrow{\iota_S} \prod_{v\in S} \mathcal{U}_v\right)$$

le noyau du morphisme de plongement ι_S des unités $\mathcal{E}$ vers les localisés en les places de S. Lorsque $S = S_p$, nous notons par ι_p le morphisme ι_S.

Si S contient S_p, l'ensemble constitué de toutes les places au-dessus de p, la conjecture de Leopoldt équivaut à la trivialité de $\mathcal{E}_S$, c'est-à-dire à l'injectivité de ι_S.

Plus généralement, dans [19], il est noté que la trivialité du groupe $\mathcal{E}_S$ implique la trivialité du groupe $H^2(\mathrm{G}_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Voici une situation qui illustre ce fait et sur laquelle nous reviendrons. Soit K_0 un corps quadratique imaginaire et soit v une place de K_0 correspondant à un premier $\mathfrak{p}$ divisant p (que l'on suppose décomposé dans $\mathrm{K}_0/\mathbb{Q}$). Soit K/K_0 une extension de corps de nombres. Notons par S l'ensemble des places de K au-dessus de v. Alors, comme noté dans [19], sous la conjecture de Schanuel, le morphisme φ_S est injectif le long de K_S/K.

Ainsi, pour cette situation, (conjecturalement) pour tout sous groupe-fermé $\mathcal{H}$ de G_S, le couple $(\mathrm{G}_S, \mathcal{H})$ satisfait la condition $(\mathcal{L})$.

4.1.2.3. La conjecture faible de Leopoldt. — Soit L/K une pro-p-extension dans K_S/K, de groupe de Galois G. Notons par $\mathcal{H}$ le sous-groupe fermé $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{L})$.

Proposition 4.7. — *Supposons que S contient S_p. Alors sous la conjecture de Leopoldt le long de* L/K, *le groupe $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est trivial. En d'autre terme, le couple $(\mathrm{G}_S, \mathcal{H})$ satisfait la condition $(\mathcal{L})$.*

La trivialité du groupe $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est une version faible de la conjecture forte de Leopoldt, car comme noté dans [22], lorsque K_S/K contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique K_∞ de K et que le sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_\infty)$, la trivialité du groupe $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est inconditionnelle :

Lemme 4.8. — *Notons par K_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de* K. *Supposons celle-ci contenue dans* L/K. *Alors le groupe $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est trivial.*

Toujours dans la même direction, pour terminer, il convient d'indiquer

Proposition 4.9. — *Soit $\mathcal{G}$ un pro-p-groupe et soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe fermé et distingué de $\mathcal{G}$ tel que $G = \mathcal{G}/\mathcal{H} \simeq \mathbb{Z}_p$. Alors la trivialité de $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ implique la trivialité de $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (ou encore le couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ satisfait la condition $(\mathcal{L})$).*

Démonstration. — Le quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ étant pro-p-libre, c'est une conséquence immédiate de la suite spectrale $H^i(\mathrm{G}, H^j(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \Longrightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. □

4.1.2.4. La trivialité du groupe $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p)$. — En vue d'appliquer la proposition 2.4, nous cherchons des situations où $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$. Tout d'abord, comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe 4.1.2.2, si ι_S est injectif alors $H_2(\mathrm{G}_S, \mathbb{Z}_p) = 0$. En particulier, si $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$, ou si K est un corps quadratique imaginaire, pour tout ensemble fini S, $H_2(\mathrm{G}_S, \mathbb{Z}_p) = 0$.
Regardons le cas où G est pro$p$-p, p-adique analytique. Rappelons alors le lemme bien connu suivant qui se déduit de la suite exacte $1 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p \longrightarrow 1$:

Lemme 4.10. — *Soit* G *un pro-p-groupe homologiquement de type fini. Alors $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$ si et seulement si $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{G}^{ab} = -\chi_2(\mathrm{G}) + 1$.*

Ainsi, si G est isomorphe à $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$, le groupe $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p)$ est trivial si et seulement si le produit n'est pas direct.

5. Les premiers contextes arithmétiques

5.1. Un résultat de Harris. — Considérons le premier contexte arithmétique venant à l'esprit. L'extension L/K est p-adique analytique sans p-torsion et $\mathrm{M} = \mathrm{K}_{S_p}$. On a la tour d'extensions $\mathrm{K} - \mathrm{L} - \mathrm{K}_{S_p}$. On pose $\mathcal{G} = \mathrm{G}_{S_p} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K})$, $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$ et $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})$. Alors, on rappelle que la dimension cohomologique de $\mathcal{G}$ est au plus 2 (pour $p = 2$, on s'assure que K est totalement imaginaire). Du théorème 3.11, on en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 5.1 **(Harris [10]).** — *Supposons que* L *contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de* K. *Alors le $\Lambda(\mathrm{G})$-rang $\rho_{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X} := \mathcal{H}^{ab}$ est égal à r_2.*

Remarque 5.2. — Le fait que L contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K nous assure la trivialité du groupe $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Condition superflue dès lors que l'on se place sous la conjecture de Leopoldt.

Ce résultat a été établi par Harris sous l'hypothèse que le corps K contient μ_p. Pour le cas général, on peut se reporter au travaux de Greenberg [7], mais aussi de Nguyen [22], de Venjakob [29] ...

Remarque 5.3. — Dans [7], Greenberg montre que sous la conjecture de Leopoldt le long de L/K, le module $\mathcal{X}$ n'a pas de sous $\Lambda(\mathrm{G})$-module fini. Cela repose sur le fait que dans une tour d'extensions $\mathrm{K} - \mathrm{K}_n - \mathrm{K}_m$ de degré fini dans L/K, le morphisme de transfert $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}_n)^{ab} \longrightarrow \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_m)^{ab}$ est injectif (voir par exemple [6], chapitre IV). Ce résultat reste valable (i.e. $\mathcal{X}$ n'a pas de sous-$\Lambda(\mathrm{G})$-module fini) pour G infini quelconque.

5.2. Le cas où G est pro-p-libre. — On suppose ici le quotient $\mathrm{G} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ pro-p-libre. Supposons également que le couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ vérifie la condition $(\mathcal{L})$ et que $cd(\mathcal{G}) \leq 2$.
Il vient immédiatement la proposition suivante.

Proposition 5.4. — *Supposons* G *pro-p-libre. Le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si, le groupe $\mathcal{G}$ est pro-p-libre. Dans ce cas,*

$$\rho_{\mathcal{X}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}^{ab}.$$

Démonstration. — Comme $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$ et que G^{ab} est sans torsion, la condition de liberté (cf. théorème 0.1 et proposition 2.4) équivaut à $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}^{ab} = \{1\}$, ce qui, sous la condition $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$, équivaut à $\mathcal{G}$ pro-p-libre. ☐

On retrouve alors le résultat bien connu suivant :

Corollaire 5.5. — *Soit* L/K *une* $\mathbb{Z}_p$*-extension de* K *et soit* K_{S_p} *la pro-p-extension maximale de* K *non-ramifiée en dehors de p. Posons* $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$ *et* $\mathcal{X} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})^{ab}$. *Supposons la conjecture de Leopoldt vraie pour le corps* K. *Alors* $\mathcal{X} := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})^{ab}$ *est libre si et seulement si* $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K})^{ab}$ *est sans p-torsion. Dans ce cas,* $\rho_{\mathcal{X}} = r_2$.

5.3. Application à la S-rationalité. — Prenons $S \subset S_p$. Suivant Jaulent et Sauzet [12], le corps K est dit S-rationnel si le groupe de Galois $\mathrm{G}'_S = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}'_S/\mathrm{K})$ est pro-p-libre, où K'_S est la pro-p-extension maximale de K S-ramifiée et $S_p \backslash S$-décomposée.
Le fait de prendre $S \subset S_p$ n'est pas restrictif. On peut rappeler que dans une extension L/K pro-p-libre, les places en dehors de p ne sont pas ramifiées. En effet, pour $v \nmid p$, le sous-groupe de décomposition G_v de v dans L/K est à la fois libre et à la fois un quotient de $\mathbb{Z}_p$ ou de $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$. Il est donc p-adique analytique de dimension au plus 2 et libre : il est de dimension 1 et donc isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Cela ne peut que correspondre à la pro-p-extension non-ramifiée maximale de K_v.
Rappelons une conséquence d'un résultat de Jaulent et Sauzet :

Théorème 5.6 **(Jaulent-Sauzet, [12] théorème 2.7)**
Supposons le corps K S*-rationnel. Le groupe* G_{S_p} *est pro-p-libre si et seulement si pour* $v \in S_p \backslash S$, $\mathrm{K}_v^\times$ *ne contient pas les racines primitives p-èmes de l'unités.*

Posons $\mathcal{X} := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}'_S)^{ab}$. On aboutit ainsi au corollaire suivant :

Corollaire 5.7. — *Supposons le corps* K S*-rationnel et le groupe* G_{S_p} *pro-p-libre. Alors*

$$\mathcal{X} \simeq \Lambda(\mathrm{G}'_S)^{[\mathrm{K}:\mathbb{Q}]-\delta_S+|S_p-S|},$$

où $\delta_S = \sum_{v \in S} [\mathrm{K}_v : \mathbb{Q}_p]$ *est le poids de* S.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.4. □

5.4. Λ-rang et ramification modérée. — Supposons ici la conjecture de Leopoldt.

5.4.1. — Prenons S et Σ deux ensembles finis de places de K avec $S \subset \Sigma$. Posons $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma)/\mathrm{K})$, $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/K)$, $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S)$ et $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S)^{ab}$.

Proposition 5.8. — *Supposons que* S *contient* S_p. *Alors, le* $\Lambda(\mathrm{G}_\Sigma)$*-module* $\mathcal{X}$ *est libre si et seulement si il est trivial c'est-à-dire si et seulement si* $\mathrm{K}_\Sigma = \mathrm{K}_S$.

Démonstration. — En effet, s'il est libre, il vient : $\rho_{\mathcal{X}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}}$.
Mais d'un autre côté, comme $H^2(\mathcal{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$, il vient également (lemme 3.6) :

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}_{\mathrm{G}} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_{\Sigma}^{ab} - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_{S}^{ab} = 0.$$

□

Remarque 5.9. — Nous retrouverons plus loin ce résultat. En particulier, cela implique $\Sigma = S$.

5.4.2. — Grâce au théorème 4.3, on peut pousser un peu plus loin le résultat de cette dernière proposition.

Corollaire 5.10. — *Soit* L/K *une pro-p-extension de dimension cohomologique au plus* 2 *contenue dans* $\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}$. *Soit la tour de pro-$p$-extensions* $\mathrm{K} - \mathrm{L} - \mathrm{K}_{S_p} - \mathrm{K}_{\Sigma}$, *avec* $\Sigma = S_p \cup S$. *Posons* $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$ *(que l'on suppose homologiquement de type fini),* $\mathcal{X} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})^{ab}$, $\mathcal{X}' = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{\Sigma}/\mathrm{L})^{ab}$. *Si les* $\Lambda(\mathrm{G})$*-modules* $\mathcal{X}$ *et* $\mathcal{X}'$ *sont libres, il vient* $\mathrm{K}_{S_p} = \mathrm{K}_{\Sigma}$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{H}' = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{\Sigma}/\mathrm{L})$, $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})$, $\mathcal{H}'' = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{\Sigma}/\mathrm{K}_{S_p})$. Le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{Y} = \mathcal{H}''/[\mathcal{H}'', \mathcal{H}']$ est libre de rang $\rho_{\mathcal{Y}} = 0$ (cf. corollaire 4.5). Il est donc trivial et il en est de même pour $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{\Sigma}/\mathrm{K}_{S_p})$. □

Pour ce qui est du cas où G est analytique p-adique :

Corollaire 5.11. — *Soit* L/K *une pro-p-extension p-adique analytique sans p-torsion contenue dans* $\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}$. *Soit la tour de pro-$p$-extensions* $\mathrm{K} \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{K}_{S_p} \subset \mathrm{K}_{\Sigma}$, *avec* $\Sigma = S_p \cup S$. *Posons* $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$, $\mathcal{X} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})^{ab}$, $\mathcal{X}' = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{\Sigma}/\mathrm{L})^{ab}$. *Alors* $\rho_{\mathcal{X}} = \rho_{\mathcal{X}'} = r_2$.

6. Quelques constructions avec G p-adique analytique

6.1. La fausse courbe de Tate. —

6.1.1. Le cas local. — Prenons pour simplifier $p > 2$. Désignons par ζ_{p^n} une racine primitive p^n-ème de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Soit $\mathrm{K}_v = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$. Notons $K_{v,n} = \mathrm{K}_v(\zeta_{p^n})$.
Soit ε une unité de K_v et considérons la tour d'extensions

$$\mathrm{L}_v = \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{K}_{v,n}(\sqrt[p^n]{\varepsilon \cdot p}).$$

L'extension $\mathrm{L}_v/\mathrm{K}_v$ est galoisienne de groupe de Galois G_v isomorphe au produit semi-direct (non direct) $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$. Soit $\overline{\mathrm{K}}_v$ la pro-p-extension maximale de K_v. Posons alors : $\mathcal{G}_v = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}_v/\mathrm{K}_v)$, $\mathcal{H}_v = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}_v/\mathrm{L}_v)$ et $\mathcal{X}_v := \mathcal{H}_v^{ab}$.

D'après la proposition 2.4 et le paragraphe 4.1.2.4, le $\Lambda(\mathrm{G}_v)$-module $\mathcal{X}_v$ est libre (de rang $p-1$) si et seulement si le morphisme de restriction

$$\varphi_v := \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{G}_v^{ab} \to \mathrm{G}_v^{ab}$$

est injectif.
Maintenant, la torsion de $\mathcal{G}_v^{ab}$ est d'ordre p et est engendrée par $(\zeta_p, \overline{\mathrm{K}_v}^{ab}/\mathrm{K}_v)$. On cherche donc à déterminer $(\zeta_p, \mathrm{L}_v^{ab}/\mathrm{K}_v)$, où L_v^{ab} est la pro-p-extension abélienne maximale de K_v contenue dans L_v. On a $\mathrm{L}_v^{ab} = \mathrm{K}_{v,\infty}(\sqrt[p]{\varepsilon \cdot p})$ et $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_v^{ab}/\mathrm{K}_v) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$.
Comme $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_v^{ab}/\mathrm{K}_v(\sqrt[p]{\varepsilon \cdot p}))$ est sans torsion, il est alors facile de noter que le morphisme φ_v est injectif si et seulement si le symbole $(\zeta_p, \mathrm{K}_v(\sqrt[p]{\varepsilon \cdot p})/\mathrm{K}_v)$ n'est pas trivial (on cherche à voir si $\mathrm{K}_v(\sqrt[p]{\varepsilon \cdot p})$ est dans le compositum des $\mathbb{Z}_p$-extensions de K_v).

Pour le calcul de ce symbole, on peut s'appuyer sur le corps global $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Soit $\mathfrak{p}|p$. La formule du produit indique que le symbole cherché vaut

$$(\zeta_p, \mathrm{K}_v(\sqrt[p]{\varepsilon \cdot p})/\mathrm{K}_v) = (\zeta_p, \mathrm{K}(\sqrt[p]{\varepsilon \cdot p})/\mathrm{K})_{\mathfrak{p}} = \left(\prod_{w|\varepsilon} (\zeta_p, \mathrm{K}(\sqrt[p]{\varepsilon \cdot p})/\mathrm{K})_w\right)^{-1}.$$

Maintenant, pour $w|\varepsilon$, le calcul du symbole peut se faire à l'aide du théorème d'approximation (voir par exemple [6], chapitre II).
Regardons alors les deux situations suivantes.

6.1.1.1. Le cas où $\varepsilon = 1$. — C'est le cas le plus connu :

$$\mathrm{L}_v = \bigcup_n \mathrm{K}_v(\zeta_{p^n}, \sqrt[p^n]{p}).$$

Nous devons calculer le symbole $(\zeta_p, \mathrm{K}_v(\sqrt[p]{p})/\mathrm{K}_v)$.
Comme ζ_p est une unité et que $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ ne contient qu'une seule place au-dessus de p, la formule du produit indique immédiatement que

$$(\zeta_p, \mathrm{K}_v(\sqrt[p]{p})/\mathrm{K}_v) = 1.$$

Ainsi le morphisme φ_v n'est pas injectif et le module $\mathcal{X}_v$ n'est donc pas libre.

6.1.1.2. Le cas où $\varepsilon = \ell$. — Soit un nombre premier ℓ et considérons

$$\mathrm{L}_v = \bigcup_n \mathrm{K}_v(\zeta_{p^n}, \sqrt[p^n]{\ell \cdot p}).$$

Une situation est particulièrement facile à déterminer : lorsque ℓ est inerte dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$. Dans ce cas, $\mathrm{K}_\ell(\sqrt[p]{\ell \cdot p})/\mathrm{K}_\ell$ est l'unique extension cyclique de K_ℓ totalement et modérément ramifiée. Soit ζ un générateur du p-Sylow des racines de l'unité de $\mathrm{K}_\ell^\times$. Soit K_ℓ^{tm} l'extension abélienne modérément ramifiée et maximale de K_ℓ. La restriction à K_ℓ^{tm} du symbole de ζ dans $\mathrm{K}_\ell^{ab}/\mathrm{K}_\ell$ engendre

$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\ell^{tm}/\mathrm{K}_\ell)$. On en déduit : $(\zeta_p, \mathrm{K}_\ell(\sqrt[p]{\ell\cdot p})/\mathrm{K}_\ell) \neq 1$ si et seulement si $<\zeta_p>=<\zeta>$, c'est-à-dire si et seulement si K_ℓ ne "contient" que les racines p-èmes de l'unité ou encore que $\ell^{p-1}\not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$. Si c'est le cas, par la formule du produit, on en déduit que le symbole en p n'est pas trivial puis que le $\Lambda(\mathrm{G}_v)$-module $\mathcal{X}_v$ est libre de rang $p-1$.

6.1.2. Le cas global. — On se place toujours sous la conjecture de Leopoldt.

6.1.2.1. Lorsque p est régulier. — Soit $p>2$. Prenons $\mathrm{K}=\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et supposons p régulier (le premier p ne divise pas l'ordre du groupe des classes de K). Soit

$$\mathrm{L}=\bigcup_n \mathrm{K}(\zeta_{p^n}, \sqrt[p^n]{p}),$$

puis $\mathrm{M}=\mathrm{K}_{S_p}$. Soit $\mathrm{G}=\mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})\simeq \mathbb{Z}_p\rtimes\mathbb{Z}_p$, $\mathcal{G}=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K})$, $\mathcal{H}=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})$, $\mathcal{X}:=\mathcal{H}^{ab}$. Alors, comme p est régulier, le groupe $\mathcal{G}$ est pro-p-libre (voir par exemple [**20**], chapitre X) et le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ est donc libre de rang $(p-1)/2$ (c'est une application immédiate du théorème 0.1).

Comparons ce résultat avec la situation locale précédente. Soit $\mathfrak{p}$ l'unique premier de K au-dessus de p. Le premier p étant régulier, $\mathfrak{p}$ n'est pas décomposé dans $\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}$ et le corps K_{S_p} ne contient qu'une seule place au-dessus de p (l'extension $\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}$ est locale, cf. définition 6.2 à venir).
On a alors la tour d'extensions locales

$$\mathrm{K}_\mathfrak{p}\subset \mathrm{L}_\mathfrak{p}\subset \mathrm{K}_{S_p,\mathfrak{p}}\subset \overline{\mathrm{K}_\mathfrak{p}}$$

donnant lieu aux groupes $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})=\mathrm{G}\simeq \mathrm{G}_\mathfrak{p}=\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_\mathfrak{p}/\mathrm{K}_\mathfrak{p})$, $D_\mathfrak{p}=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p,\mathfrak{p}}/\mathrm{K}_\mathfrak{p})$, $\mathcal{G}_\mathfrak{p}=\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}_\mathfrak{p}}/\mathrm{K}_\mathfrak{p})$. Soient $\mathcal{H}_\mathfrak{p}=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p,\mathfrak{p}}/\mathrm{L}_\mathfrak{p})$, $\mathcal{H}'_\mathfrak{p}=\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}_\mathfrak{p}}/\mathrm{L}_\mathfrak{p})$, $\mathcal{H}''_\mathfrak{p}=\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}_\mathfrak{p}}/\mathrm{K}_{S_p,\mathfrak{p}})$.
Le groupe $\mathcal{H}''_\mathfrak{p}$ mesure le défaut entre le "complété" en $\mathfrak{p}$ de l'extension globale $\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}$ et la pro-p-extension maximale de $\mathrm{K}_\mathfrak{p}$.
Suivant la section 4, considérons alors les $\Lambda(\mathrm{G}_\mathfrak{p})$-modules naturels $\mathcal{X}_\mathfrak{p}=\mathcal{H}_\mathfrak{p}^{ab}$, $\mathcal{X}'_\mathfrak{p}=\mathcal{H}'^{ab}_\mathfrak{p}$, et $\mathcal{Y}_\mathfrak{p}=\mathcal{H}''_\mathfrak{p}/[\mathcal{H}''_\mathfrak{p},\mathcal{H}'_\mathfrak{p}]$. Ce sont également des $\Lambda(\mathrm{G})$-modules compacts.
Les couples $(\mathcal{G}_\mathfrak{p},\mathcal{H}'_\mathfrak{p})$ et $(D_\mathfrak{p},\mathcal{H}_\mathfrak{p})$ vérifient la condition $(\mathcal{L})$ et les groupes $D_\mathfrak{p}$ et $\mathcal{G}_\mathfrak{p}$ sont de dimension cohomologique au plus 2. On obtient alors

Corollaire 6.1. — *i) Le $\Lambda(\mathrm{G}_\mathfrak{p})$-module $\mathcal{X}_\mathfrak{p}$ est libre de rang $(p-1)/2$.*
ii) Le module $\mathcal{X}'_\mathfrak{p}$ est de rang $(p-1)$, mais n'est pas libre.
iii) Le module $\mathcal{Y}_\mathfrak{p}$ est de rang $(p-1)/2$, mais n'est pas libre.

Démonstration. — Se déduit du théorème 4.3. □

6.1.2.2. Le cas d'une extension globale de type local. — Terminons cette partie par l'exemple d'une situation globale purement locale.

Définition 6.2. — L'extension L/K est dite locale en v, si

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{L}_v/\mathrm{K}_v) \simeq \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K}).$$

Elle est dite maximale locale en v si la composée des morphismes

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}_v}/\mathrm{K}_v) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathrm{L}_v/\mathrm{K}_v) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$$

est un isomorphisme.

Suivant le travail de Wingberg [31], il vient :

Proposition 6.3. — *Soit* $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt{d})$, *avec* $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$. *Soient* $\mathfrak{p}|p$. *Alors l'extension* $\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K}$ *est maximale locle en* $\mathfrak{p}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cadre de cette dernière proposition.
Pour $\mathfrak{p}|p$, il vient $\mathrm{K}_\mathfrak{p} = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$.
Soit alors la fausse courbe de Tate

$$\mathrm{L} = \bigcup_n \mathrm{K}(\zeta_{p^n}, \sqrt[p^n]{p}).$$

Posons $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{K})$, $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})$, $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$.
D'après le paragraphe 6.1.1.1, le module $\mathcal{X}$, de rang $(p-1)$, n'est pas libre.
Par contre, d'après le paragraphe 6.1.1.2, l'extension K_{S_p} contient une extension L', de groupe de Galois sur K isomorphe à $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$, où le $\Lambda(\mathrm{Gal}(\mathrm{L}'/\mathrm{K}))$-module d'Iwasawa $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L}')^{ab}$ est libre de rang $p-1$.

6.2. À partir de la théorie d'Iwasawa abélienne. —

6.2.1. Le contexte. — Soit S un ensemble fini de places de K, $S \cap S_p = \emptyset$, et soit $\Sigma = S \cup S_p$. Pour simplifier, on suppose ici $p > 2$.
Soit $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K ; $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})$. Soit $\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K}_\infty$ la pro-p-extension maximale de K_∞ non-ramifiée en dehors de S.
Notons par $\mathcal{Z}_S := \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K}_\infty)^{ab}$ le $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module correspondant à l'abélianisé de $\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K}_\infty)$.
Il vient facilement que $\mathrm{G} := \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K}) \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ si et seulement si $\mathcal{Z}_S \simeq \mathbb{Z}_p$.
Supposons donc que $\mathcal{Z}_S \simeq \mathbb{Z}_p$. En vue d'utiliser la proposition 2.4, il reste à s'assurer que le produit n'est pas direct. L'extension $\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K}$ a été étudiée dans [24], Salle y donne des conditions suffisantes pour que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K})^{ab} = 1$.
En particulier, quand il n'existe qu'une seule place v de K au-dessus de p (ou encore quand $|S_p| = 1$), le produit n'est pas direct. Nous allons nous intéresser à cette situation.
Pour la suite de cette section, on suppose donc que $|S_p| = 1$.

6.2.2. Unités localement cyclotomiques. — Soit v une place de K.
Rappelons que $\mathcal{U}_v$ désigne le compactifié p-adique des unités de K_v. Les unités localement cyclotomiques $\widetilde{\mathcal{U}_v}$ de K_v sont les unités de K_v qui sont normes dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cylotomique $\mathrm{K}_{v,\infty}$ de K_v. Par la théorie du corps de classes locale, le groupe $\widetilde{\mathcal{U}_v}$ correspond au compositum de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique $\mathrm{K}_{v,\infty}$ de K_v avec la $\mathbb{Z}_p$-extension non-ramifiée K_v^{nr} de K_v.
Si S' désigne un ensemble fini de places de K, posons alors $\mathcal{U}_{S'} = \prod_{v \notin S'} \mathcal{U}_v$ et $\widetilde{\mathcal{U}_{S'}} = \prod_{v \notin S'} \widetilde{\mathcal{U}_v}$.

6.2.3. La condition de liberté. — Rappelons que l'on a défini $\mathcal{E}_{S'}$, par

$$\mathcal{E}_{S'} = \ker\left(\mathcal{E} \xrightarrow{\iota_S} \prod_{v \in S'} \mathcal{U}_v\right),$$

où $\mathcal{E}$ est le compactifié p-adique du groupe des unités de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$.

Posons ici $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K})$, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K})$ et $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\widetilde{\mathrm{K}_S})$. Soit $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab}$.
Les groupes $\mathcal{G}$ et G sont de dimension cohomologique au plus 2 et, sous la conjecture de Leopoldt, le couple $(\mathrm{G}, \mathcal{H})$ vérifie la condition $(\mathcal{L})$. Traduisons le théoréme 0.1 et la proposition 2.4 dans ce contexte.

Proposition 6.4. — *Supposons $\mathcal{Z}_S \simeq \mathbb{Z}_p$ et $|S_p| = 1$. Alors le $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ est libre (de rang r_2) si et seulement si,*

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\left(\frac{\prod_{v \in S_p} \widetilde{\mathcal{U}_v}}{\iota_p(\mathcal{E}_S) \cap \prod_{v \in S_p} \widetilde{\mathcal{U}_v}}\right) = \{1\}.$$

Démonstration. — La théorie du corps de classes p-adique apporte le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K})^{ab} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K})^{ab} \arrow[d, "\wr"] & \\
1 \arrow[r] & \frac{\mathcal{K}^\times \widetilde{\mathcal{U}_S}}{\mathcal{K}^\times \mathcal{U}_\Sigma} \arrow[r] & \frac{\mathcal{J}_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}^\times \mathcal{U}_\Sigma} \arrow[r] & \frac{\mathcal{J}_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}^\times \widetilde{\mathcal{U}_S}} \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{K}^\times = \varprojlim_n \mathcal{K}^\times/(\mathcal{K}^\times)^{p^n}$ est le compactifié p-adique de $\mathrm{K}^\times$ et où $\mathcal{J}_{\mathrm{K}}$ est le compactifié p-adique du groupe des idèles de K. Puis notons que

$$\frac{\mathcal{K}^\times \widetilde{\mathcal{U}_S}}{\mathcal{K}^\times \mathcal{U}_\Sigma} \simeq \frac{\prod_{v \in S_p} \widetilde{\mathcal{U}_v}}{\iota_p(\mathcal{E}_S) \cap \prod_{v \in S_p} \widetilde{\mathcal{U}_v}}.$$

Le résultat s'en déduit. $\square$

Les $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $\mathcal{Z}_S$ ont été étudiés par Salle [23]. Appliquons brièvement sa stratégie pour exhiber des situations où $\widetilde{\mathrm{G}_S} = \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathrm{K}_S}/\mathrm{K}) \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$.

6.2.4. Le cas CM. — Partons d'un corps K à multiplication complexe. Soit K^+ son sous-corps réel maximal. Notons par K^+_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K^+ et par K^+_n le n-ème étage de $\mathrm{K}^+_\infty/\mathrm{K}^+$. Soit S un ensemble fini de places de K avec $S \cap S_p = \emptyset$ et S stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}/\mathrm{K}^+)$. Notons par $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{E}^+_n$) le compactifié p-adique du groupe des unités de K_n (resp. de K^+_n) et par $\mathcal{E}_{n,S}$ (resp. $\mathcal{E}^+_{n,S}$) le noyau du morphisme de localisation ι_S au niveau K_n (resp. au niveau K^+_n). Le comportement asymptotique de l'indice $[\mathcal{E}_n : \mathcal{E}_{n,S}]$ est identique à $[\mathcal{E}^+_n : \mathcal{E}^+_{n,S}]$. Soit A_n (resp. A^+_n) l'ordre de la p-partie du groupe des classes de K_n (resp. K^+_n) et $A_{n,S}$ (resp. $A^+_{n,S}$) l'ordre de la p-partie du groupe des classes de K_n (resp. K^+_n) de rayon S. Pour n assez grand, on obtient (cf. [6] par exemple) :

$$\frac{\#A_{n,S}}{\#A^+_{n,S}} = \frac{\#A_n}{\#A^+_n} \prod_{v \in S(\mathrm{K}_n)} p^{n\alpha_S + O(1)},$$

où $\alpha_S = \sum_{v \in S(\mathrm{K}^+)} \alpha_v$, et où ici α_v vaut 0 ou 1 suivant le comportement de v dans K/K^+. Par exemple si la place v est telle que : (i) $|\mathcal{U}_{\mathrm{K}^+_v}| = 1$; (ii) $|\mathcal{U}_{\mathrm{K}_v}| \neq 1$, alors $\alpha_v = 1$.

On voit ainsi que si les suites $(A_n)_n$ et $(A^+_{n,S})_n$ sont bornées, l'invariant λ_S du module $\mathcal{Z}_S$ au-dessus de $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}$ se calcule facilement suivant le comportement des places de S dans K/K^+.

Sur des exemples donnés, après quelques calculs le long de $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}$, on a donc une idée assez précise sur l'invariant λ_S. La partie finie du module $\mathcal{Z}_S$ va être contrôlée avec l'aide du lemme de Nakayama.

6.2.5. Un exemple. — Fixons $p = 7$. Soient $\mathrm{K}^+ = \mathbb{Q}(\sqrt{7 \cdot 13})$ et $\mathrm{K} = \mathrm{K}^+(\sqrt{-2})$. Prenons $S = \{\mathfrak{p}_{13}\}$ et $\Sigma = \{\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_{13}\}$. On peut alors noter que K ne contient qu'un seul idéal $\mathfrak{p}_7$ au-dessus de 7 (ainsi $S_7 \subset \Sigma$ et $|S_7| = 1$) et que celui-ci est totalement ramifiée dans $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}$. Ensuite, comme $\alpha_{\mathfrak{p}_{13}} = 1$ et $A_0 = \{1\}$, on a $\lambda_S = 1$. On a également facilement $d_7(A_{0,S}) = 1$, ce qui au total, par le lemme de Nakayama, implique l'isomorphisme $\mathcal{Z}_S \simeq \mathbb{Z}_7$. Il reste donc à tester le critère de liberté de la proposition 6.4.

Le corps K peut être engendré par θ une racine de $P = x^4 - 178x^2 + 8649$. Dans ce cas, $E_\mathrm{K} = \langle -1, \varepsilon \rangle$, avec $\varepsilon = 55/62\theta^3 - 14905/62\theta - 1574$. Un calcul montre

$$v_{\mathfrak{p}_{13}}(\varepsilon^2 - 1) = v_{\mathfrak{p}_7}(\varepsilon^2 - 1) = 1.$$

Ainsi, $\iota_7(\mathcal{E}_S) = \iota_7(\langle\varepsilon^2\rangle)$ est un facteur direct de $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}$, lui-même contenant $\widetilde{\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}}$ comme facteur direct : $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7} = \widetilde{\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}} \oplus \mathbb{Z}_7$, avec $\widetilde{\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}} \simeq \mathbb{Z}_7{}^3$. De

$$\widetilde{\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}}/\iota_7(\mathcal{E}_S) \cap \widetilde{\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}} \hookrightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}/\iota_7(\mathcal{E}_S),$$

il vient

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_7}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}}}{\iota_7(\mathcal{E}_S) \cap \widetilde{\mathcal{U}_{\mathfrak{p}_7}}}\right) = \{1\}.$$

En conclusion, le $\Lambda(\widetilde{\mathrm{G}_S})$-module $\mathcal{X} := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\widetilde{\mathrm{K}_S})^{ab}$ est libre de rang 2 :

$$\mathcal{X} \simeq \mathbb{Z}_7[[\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_7]] \oplus \mathbb{Z}_7[[\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_7]].$$

7. Le cas de la ramification restreinte

7.1. Ramification déployée. — Fixons Σ un ensemble fini de places de K. Commençons par définir la notion de ramification maximale et totalement déployée.

Définition 7.1. — Soient $S \subset \Sigma$ et $\overline{S} = \Sigma \backslash S$. La ramification dans l'extension $\mathrm{K}_\Sigma^{ab}/\mathrm{K}$ est dite maximale et totalement déployée en S si

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma^{ab}/\mathrm{K}_{\overline{S}}^{ab}) = \bigoplus_{v \in S} I_v,$$

où I_v est le pro-p-groupe d'inertie dans $\mathrm{K}_v^{ab}/\mathrm{K}_v$.

Remarque 7.2. — On rappelle que le symbole de réciprocité donne un isomorphisme entre I_v et $\mathcal{U}_v$.

Proposition 7.3. — *Soient $S \subset \Sigma$ et $\overline{S} = \Sigma \backslash S$. La ramification dans l'extension $\mathrm{K}_\Sigma^{ab}/\mathrm{K}$ est maximale et totalement déployée en S si et seulement si*

$$\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S) = \{1\},$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\mathcal{E}_S \subset \mathcal{E}_{\overline{S}}.$$

Cela arrive dans les deux situations extrêmes suivantes :

(i) $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_{\overline{S}}$.

(ii) $S' = S \cap S_p$ *n'est pas vide et le morphisme de localisation* $\iota_{S'} : \mathcal{E} \to \prod_{v \in S'} \mathcal{U}_v$ *est injectif.*

Démonstration. — Le noyau du morphisme de restriction $\mathrm{G}_\Sigma^{ab} \twoheadrightarrow G_{\overline{S}}^{ab}$ est engendré par les groupes d'inertie des places de S.

Nous avons alors le diagramme commutatif suivant qui se déduit de la théorie du corps de classes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K})^{ab} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K})^{ab} \\ & & & & \wr\| & & \wr\| \\ 1 \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{K}^\times\mathcal{U}_S}{\mathcal{K}^\times\mathcal{U}_\Sigma} & \longrightarrow & & \dfrac{\mathcal{J}_\mathcal{K}}{\mathcal{K}^\times\mathcal{U}_\Sigma} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{J}_\mathcal{K}}{\mathcal{K}^\times\mathcal{U}_S} \longrightarrow 1. \end{array}$$

Notons ensuite l'isomorphisme

$$\frac{\mathcal{K}^\times\mathcal{U}_S}{\mathcal{K}^\times\mathcal{U}_\Sigma} \simeq \frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)},$$

d'où la première partie de la proposition.
Pour (ii), il suffit de noter que $\mathcal{E}_S \subset \mathcal{E}_{S'} = \{1\}$. □

7.2. Sur la condition du théorème 0.1 portant sur la torsion. — Le théorème 0.1 indique que l'étude de la liberté des $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathcal{X}$ peut se réduire à l'étude de la $\mathbb{Z}_p$-torsion du morphisme $\varphi : \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_\Sigma^{ab} \to \mathrm{G}_S^{ab}$. Grâce à la théorie du corps de classes, il vient immédiatement :

Proposition 7.4. — *Soit $\overline{S} = \Sigma\backslash S$. Le noyau du morphisme $\varphi : \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_\Sigma^{ab} \to \mathrm{G}_S^{ab}$ est isomorphe à*

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}.$$

On voit que la trivialité de ce noyau est intimement lié au noyau du morphisme ι_S :

Corollaire 7.5. — *Soit $\overline{S} = \Sigma\backslash S$. Supposons le morphisme ι_S injectif. Le noyau du morphisme de restriction $\mathrm{G}_\Sigma^{ab} \twoheadrightarrow \mathrm{G}_S^{ab}$ est sans torsion si et seulement si pour $v \in \overline{S}$, $\mathcal{U}_v$ est sans torsion. Ceci implique en particulier $\overline{S} \subset S_p$.*

Démonstration. — En effet, dans ce cas, le noyau recherché vaut exactement

$$\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}.$$

Comme par hypothèse $\mathcal{E}_S = \{1\}$, on a immédiatement le résultat voulu. □

On en arrive au

Théorème 7.6. — *Soit $\overline{S} = \Sigma\backslash S$. Supposons le morphisme $\iota_{\overline{S}}$ injectif et que S ne contient aucune place divisant p : $S \cap S_p = \emptyset$.*

La condition $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\dfrac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}=\{1\}$ *(ou encore le noyau du morphisme* $\mathrm{G}_\Sigma^{ab}\twoheadrightarrow\mathrm{G}_S^{ab}$ *est sans torsion) équivaut aux deux points suivants :*

(i) dans l'extension $\mathrm{K}_S^{ab}/\mathrm{K}$*, la ramification en* S *est maximale et totalement déployée ;*

(ii) dans l'extension $\mathrm{K}_{\overline{S}}^{ab}/\mathrm{K}$*, la partie de torsion est non-ramifiée.*

En particulier, ces conditions impliquent $\overline{S}\subset S_p$*.*

Démonstration. — Supposons donc trivial $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\dfrac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}$.
Par le choix de S, le quotient $\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E})/\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)$ est de torsion, il s'injecte dans $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\dfrac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}$ qui est trivial par hypothèse. Il vient $\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E})=\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)$, ce qui, sous la condition que le morphisme $\iota_{\overline{S}}$ est injectif, implique $\mathcal{E}=\mathcal{E}_S$. Avec la proposition 7.3, on obtient le premier point. Ainsi

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E})}=\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}=\{1\}.$$

Comme $\dfrac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E})}$ correspond à la ramification dans $\mathrm{K}_{\overline{S}}^{ab}/\mathrm{K}$, on obtient bien le second point.
La réciproque se déduit immédiatement de la suite exacte courte :

$$1\longrightarrow\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E})/\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)\longrightarrow\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}\longrightarrow\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E})}.$$

Le dernier point est une conséquence du corollaire 7.5. Soient $\overline{S}_1=\overline{S}\cap S_p$ et $\overline{S}_0=\overline{S}\backslash\overline{S}_1$. Comme $\iota_{\overline{S}}$ est injectif, il en est de même pour $\iota_{\overline{S}_1}$. Maintenant, dans l'extension $\mathrm{K}_{\overline{S}}^{ab}/\mathrm{K}$, la torsion est non-ramifiée si et seulement si le morphisme $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_{\overline{S}}^{ab}\to\mathrm{G}_{\emptyset}^{ab}$ est injectif. Or comme le morphisme $\mathrm{G}_{\overline{S}}^{ab}\to\mathrm{G}_{\emptyset}^{ab}$ se factorise à travers $\mathrm{G}_{\overline{S}}^{ab}\to\mathrm{G}_{\overline{S}_1}^{ab}\to\mathrm{G}_{\emptyset}^{ab}$, il est nécessaire que le noyau du morphisme $\mathrm{G}_{\overline{S}}^{ab}\to\mathrm{G}_{\overline{S}_1}^{ab}$ soit sans torsion. Ainsi, d'après le corollaire 7.5, il est nécessaire que $\overline{S}_0\subset S_p$, c'est-à-dire $\overline{S}_0=\emptyset$. Ainsi $\overline{S}\subset S_p$. □

7.3. Un résultat de Schmidt. — Commençons par rappeler le résultat suivant :

Théorème 7.7 **(Schmidt [26])**. — *Soit* $p>2$*. Soient* S_0 *(non vide pour simplifier) et* W *deux ensembles finis de places de* K*. Il existe une infinité d'ensembles finis* S *de places de* K *avec* $S_0\subset S$ *et* $S\cap W=\emptyset$*, pour lesquels* $\mathrm{G}_S=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K})$ *est de dimension cohomologique au plus 2 et* $\chi(\mathrm{G}_S)=r_1+r_2-\delta_S$*, où* $\delta_S=\sum_{v\in S\cap S_p}[\mathrm{K}_v:\mathbb{Q}_p]$ *est le poids de* S*.*

Remarque 7.8. — Pour $p = 2$, voir un récent travail de Labute et Mináč [15].

Proposition 7.9. — *Supposons G_S de dimension cohomologique égale à 2 avec $\chi(\mathrm{G}_S) = r_1 + r_2 - \delta_S$. Alors si $r_1 + r_2 \neq \delta_S$, le groupe G_S n'est pas p-adique analytique.*

Démonstration. — Il suffit de noter qu'un pro-p-groupe p-adique analytique de dimension cohomologique finie a une caractéristique d'Euler-Poincaré triviale. □

Lorsque $\delta_S = r_1 + r_2$, on peut utiliser l'inégalité de Golod et Shafarevich (voir par exemple [16], [28]), pour obtenir immédiatement :

Corollaire 7.10. — *Soit S tel que $\chi_2(\mathrm{G}_S) = 0$.*
Alors si $d_p G_S^{ab} > 2$, le groupe G_S n'est pas p-adique analytique.

Notons que quand S contient S_p, G_S est de dimension cohomologique au plus 2 (pour $p = 2$, s'assurer que K totalement imaginaire). Ainsi si G_S est p-adique analytique, alors $r_2 = 0$ et ou bien $G_S \simeq \mathbb{Z}_p$, ou bien $d_p G_S^{ab} = 2$.

7.4. De retour au cas où $\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}_p$**.** — Soit S un ensemble de places contenant des places au-dessus de p. Supposons injectif le morphisme $\iota_S : \mathcal{E} \to \prod_{v \in S} \mathcal{U}_v$. Comme rappelé au paragraphe 4.1.2.2, cette condition garantit la trivialité du multiplicateur de Schur de G_S.
Supposons également $\sum_{v \in S \cap S_p} [K_v : \mathbb{Q}_p] > r_1 + r_2 - 1$. L'extension K_S/K contient alors une $\mathbb{Z}_p$-extension L/K. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K}) \simeq \mathbb{Z}_p$.
D'après le résultat de Schmidt énoncé au début de cette section, quitte à grossir S en ajoutant des places étrangères à p, on peut supposer G_S de dimension cohomologique au plus 2 avec $\chi(\mathrm{G}_S) = r_1 + r_2 - \delta_S$. Posons $\Sigma = S \cup S_p$.
La trivialité du multiplicateur de Schur de G_S implique la trivialité de celui de $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{L})$.
Comme ι_S est injectif, il en est de même pour ι_Σ : les couples $(\mathrm{G}_S, \mathcal{H})$ et $(\mathrm{G}_\Sigma, \mathcal{H}')$ satisfont la condition $(\mathcal{L})$. Les conditions de la section 4 sont réunies.

Soient $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{L})$, $\mathcal{H}' = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{L})$, $\mathcal{H}'' = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S)$ et soient les $\Lambda(\mathrm{G})$-modules : $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab}$, $\mathcal{X}' = \mathcal{H}'^{ab}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{H}''/[\mathcal{H}'', \mathcal{H}']$. Il vient alors

Corollaire 7.11. —
(i) $\rho_{\mathcal{X}} = \delta_S - (r_1 + r_2)$,
(ii) $\rho_{\mathcal{X}'} = r_2$,
(iii) $\rho_{\mathcal{Y}} = r_1 + 2r_2 - \delta_S = [\mathrm{K} : \mathbb{Q}] - \delta_S$.

On rappelle que $\delta_S = \sum_{v\in S\cap S_p}[\mathrm{K}_v : \mathbb{Q}_p]$ est le poids de S.

Exemple 7.12. — Prenons $\mathrm{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un corps quadratique imaginaire dans lequel p est décomposé. Fixons un premier $\mathfrak{p}$ de K divisant p. Soit K/K_0 une extension quelconque et soit $S = \{\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_\mathrm{K},\ \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$. Alors, sous la conjecture de Schanuel (en fait inconditionnelle si K/K_0 est abélienne), le morphisme ι_S est injectif. Si $\mathrm{K} = \mathrm{K}_0$, on est assuré que $cd(\mathrm{G}_S) \leq 2$, sinon, il faut grossir S avec des places modérées. On obtient finalement $\rho_\mathcal{X} = 0$ et $\rho'_\mathcal{X} = \rho_\mathcal{Y} = r_2 = [\mathrm{K} : \mathbb{Q}]/2$.

7.5. Une situation arithmétique non-analytique. — On se place toujours sous la conjecture de Leopoldt. Soit S un ensemble fini de places de K. Soit Σ un second ensemble de places de K contenant $S \cup S_p$. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{G}_S = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K})$, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K})$, $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S)$ et $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{ab}$. Supposons que $cd(\mathrm{G}_S) \leq 2$.
Sous la conjecture de Leopoldt le couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ vérifie la condition $(\mathcal{L})$.
Comme nous l'avons déja vu le noyau du morphisme $\varphi : \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_\Sigma^{ab} \to \mathrm{G}_S^{ab}$ est isomorphe à

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)},$$

où $\overline{S} = \Sigma\backslash S$. Si ce noyau est trivial et si $cd(\mathrm{G}_S) \leq 2$, le $\Lambda(\mathrm{G}_S)$-module $\mathcal{X}$ est libre de rang $\rho_\mathcal{X}$ égal à $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_\Sigma^{ab} - 1 + \chi(\mathrm{G}_S)$ c'est-à-dire à $r_2 + \chi(\mathrm{G}_S)$.
Supposons maintenant $S \cap S_p = \emptyset$. La conjecture de Fontaine-Mazur indique que G_S ne doit jamais être p-adique analytique sans p-torsion. C'est à ce niveau que l'on voit donc une des conséquences du récent travail de Labute : puisque G_S peut être de dimension cohomologique au plus 2, le rang de $\mathcal{X}$ peut avoir un sens.
Pour illustrer ceci, on peut alors citer comme exemples ceux de [18] tous immédiats car le corps de base K est $\mathbb{Q}$ ou un corps quadratique imaginaire.
Donnons un exemple où la ramification sauvage n'est pas totale.
Soit $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d > 0$ sans facteur carré. Soit $p > 3$ un premier décomposé dans $\mathrm{K}/\mathbb{Q}$ et soit $\mathfrak{p}$ l'un des deux premiers de K au-dessus de p. Soit $S = \{\mathfrak{p}\} \cup S_0$, où S_0 est un ensemble fini de places de K toutes étrangères à p et tel que $cd(\mathrm{G}_S) \leq 2$: ceci est possible grâce au travail de Schmidt. On peut même s'assurer que dans ce cas $\chi(\mathrm{G}_S) = 0$. Enfin posons $\Sigma = S_p \cup S$.

Corollaire 7.13. — *Le module* $\mathcal{X} := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S)^{ab}$ *est* $\Lambda(\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}))$*-libre de rang 1. (À noter que* G_S *n'est pas analytique dès que* S_0 *contient au moins trois premiers.)*

Démonstration. — Ici il n'y a pas d'unité et donc

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\frac{\prod_{v\in\overline{S}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S}}(\mathcal{E}_S)}=\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}=\{1\}.$$

Le module $\mathcal{X}$ est libre et $\rho_{\mathcal{X}}=r_2=1$. □

7.6. Ramification sauvage partielle, ramification sauvage totale ; modules et sous-modules. — Terminons par une situation illustrant la section 4 et mélangeant ramification sauvage totale et ramification sauvage partielle.

Soit S_0 un ensemble fini (non vide) de places de K, $S_0\cap S_p=\emptyset$, tel que S_0 satisfait le théorème de Schmidt : $cd(\mathrm{G}_{S_0})=2$ et $\chi(\mathrm{G}_{S_0})=r_1+r_2$.
Choisissons S_1 un sous-ensemble de places de K contenu dans S_p tel que le morphisme $\iota_{S_1}:\mathcal{E}\to\prod_{v\in S_1}\mathcal{U}_v$ est injectif. Soit $S=S_0\cup S_1$. Finalement, soit $\Sigma=S\cup S_p$. Posons $\overline{S_0}=\Sigma\backslash S_0$ et $\widehat{S_0}=S\backslash S_0$.
On a la tour de pro-p-extensions

$$\mathrm{K}-\mathrm{K}_{S_0}-\mathrm{K}_S-\mathrm{K}_\Sigma.$$

Supposons que le morphisme ι_S reste injectif le long de $\mathrm{K}_{S_0}/\mathrm{K}$. Alors cette condition (très forte) implique la trivialité du multiplicateur de Schur du groupe $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_{S_0})$.
Les couples $(\mathrm{G}_\Sigma,\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_{S_0}))$ et $(\mathrm{G}_S,\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_{S_0}))$ vérifient la condition $(\mathcal{L})$.

Soient alors $\mathcal{H}=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_{S_0})$, $\mathcal{X}=\mathcal{H}^{ab}$, $\mathcal{H}'=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_{S_0})$, $\mathcal{X}'=\mathcal{H}'^{ab}$, $\mathcal{H}''=\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S)$, $\mathcal{Y}=\mathcal{H}''/[\mathcal{H}'',\mathcal{H}']$.

Pour que les conditions de la section 4 soient réunies, il nous manque $cd(G_S)\leq 2$. Cette condition est forte, mais celle-ci peut être satisfaite dès lors que l'on grossit S avec des places modérées. Malheureusement, à cause du corollaire 7.5, de la proposition 2.4 et du paragraphe 4.1.2.4, une telle manoeuvre empêche le module $\mathcal{X}'$ d'être $\Lambda(\mathrm{G}_{S_0})$-libre (au moins quand $\mathrm{K}=\mathbb{Q}$ ou quand K est un corps quadratique imaginaire). Malgrè tout, nous allons donner un exemple satisfaisant les conditions de la section 4. En résumé :

Proposition 7.14. — *Supposons que le morphisme ι_S reste injectif le long de $\mathrm{K}_{S_0}/\mathrm{K}$ et que $cd(\mathrm{G}_S)\leq 2$. Alors*

(i) Si $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\dfrac{\prod_{v\in\overline{S_0}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\overline{S_0}}(\mathcal{E}_{S_0})}=\{1\}$, les $\Lambda(\mathrm{G}_{S_0})$-modules $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{Y}$ sont libres. Le rang de $\mathcal{X}'$ vaut $\rho_{\mathcal{X}'}=[\mathrm{K}:\mathbb{Q}]$ et celui de $\mathcal{Y}$ est plus petit que cette dernière quantité.

(ii) Si $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\dfrac{\prod_{v\in\widehat{S_0}}\mathcal{U}_v}{\iota_{\widehat{S_0}}(\mathcal{E}_S)}=\{1\}$, le module $\mathcal{X}$ est $\Lambda(\mathrm{G}_{S_0})$-libre et $\rho_{\mathcal{X}}=\delta_S$.

(ii) Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont libres, il en est de même pour $\mathcal{Y}$ et $\rho_{\mathcal{Y}}=[\mathrm{K}:\mathbb{Q}]-\delta_S$.

Exemple 7.15. — On va s'appuyer sur des calculs de Vogel [30]. Prenons $\mathrm{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-359})$ et $p=3$. Soient $S_0=\{7,19,61,163\}$, $S_1=\{\mathfrak{p}\}$, où $\mathfrak{p}$ est l'un des deux premiers de K au-dessus de 3.
Soit $S=S_0\cup S_1$ et soit $\Sigma=S\cup S_p=S_0\cup\{\mathfrak{p}\}\cup\{\mathfrak{p}'\}$, où $p\mathcal{O}_{\mathrm{K}}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$.

Dans son travail Vogel montre que le groupe G_{S_0} est de dimension cohomologique 2 et que $\chi(\mathrm{G}_{S_0})=1$.
Sous la conjecture de Schanuel (cf section 4.1.2.2), le morphisme ι_{S_1} est injectif le long de $\mathrm{K}_{S_0}/\mathrm{K}$. Ainsi le couple $(\mathrm{G}_S,\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_{S_0}))$ vérifie la condition $(\mathcal{L})$. Il en est de même pour le couple $(\mathrm{G}_\Sigma,\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_{S_0}))$.

Il faut maintenant s'assurer que G_S est bien de dimension cohomologique au plus 2.
Soit L/K l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de $\mathrm{K}_{S_1}/\mathrm{K}$: l'invariant μ du $\Lambda(\mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K}))$-module $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_1}/\mathrm{L})^{ab}$ étant trivial ([27], [5]), le groupe $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_1}/\mathrm{L})$ est libre (ici, se rappeler que $H^2(\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_1}/\mathrm{L}),\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)=0$ car par exemple $H^2(\mathrm{G}_{S_1},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)=0$). Alors

$$cd(\mathrm{G}_{S_1})\leq cd(\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_1}/\mathrm{K}_\infty)+cd(\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}))=2.$$

On peut tenter d'appliquer cette stratégie au groupe G_S. Dans ce cas, il suffit de s'assurer que l'invariant μ' du $\Lambda(\mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K}))$-module $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{L})^{ab}$ est trivial. Pour cela, il suffit de s'assurer que les places $S_0=S\backslash S_1$ ne sont pas totalement décomposées dans L/K. C'est une conséquence de la théorie du corps de classes : la pro-p-extension abélienne maximale de K, non-ramifiée en dehors de S_1 et dans laquelle au moins une place de S_0 y est totalement décomposée, est finie.
En conclusion le groupe G_S est de dimension cohomologique au plus 2.
Nous pouvons appliquer la proposition 7.14.
Ici $S_0=\{7,19,61,163\}$, $\Sigma=S_0\cup S_p$, $\overline{S_0}=S_p$, $\widehat{S_0}=\{\mathfrak{p}'\}$. Comme K ne contient pas d'unité, il est immédiat que les $\Lambda(\mathrm{G}_{S_0})$-modules $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont libres. Il en est de même pour $\mathcal{Y}$. Il vient pour finir $\rho_{\mathcal{X}'}=2$, $\rho_{\mathcal{X}}=\rho_{\mathcal{Y}}=1$.

Références

[1] C. Batut, K. Belabas, H. Cohen, M. Olivier, *User's guide to PARI-GP*, A2X, Université Bordeaux I, 1999.

[2] A. Brumer, *Pseudocompact Algebras, Profinite Groups and Class Formations*, J. Algebra **4** (1966), 442-470.

[3] J.-M. Fontaine, B. Mazur, *Geometric Galois Representations*, Elliptic Curves, Modular Forms and Fermat's Last Theorem, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.

[4] J.D. Dixon, M.P.F. Du Sautoy, A. Mann, D. Segal, Analytic pro-p-groups, Cambridge studies in advanced mathematics 61, Cambridge University Press, 1999.

[5] R. Gillard, *Fonctions L p-adiques des corps quadratiques imaginaires et de leurs extensions abéliennes*, CRELLE **358** (1985), 76-91.

[6] G. Gras, Class Field Theory, SMM, Springer 2003.

[7] R. Greenberg, *On the structure of certain Galois groups*, Inventiones math. **47** (1978), 85-99.

[8] K. Haberland, Galois Cohomology of Algebraic Number Fields, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[9] F. Hajir and C. Maire, *Extensions of number fields with wild ramification of bounded depth*, Int. Math. Res. Not. **13** (2002), 667-696.

[10] M. Harris, *p-adic representations arising from descent on abelian varieties*, Composition Math. **39** (1979), 177-245.

[11] S. Howson, *Euler characteristics as invariants of Iwasawa modules*, Proc. London Math. Soc. **85** (2002), 634-658.

[12] J.-F. Jaulent et O. Sauzet, *Pro-ℓ-extensions de corps de nombres $\mathfrak{l}$-rationnels*, J. Number Theory **65** (1997), 240-267.

[13] H. Koch, Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, VEB, Berlin, 1970.

[14] J. Labute, *Mild pro-p-groups and Galois groups of p-extensions of $\mathbb{Q}$*, Crelle **596** (2006), 155-182.

[15] J. Labute and J. Mináč, *Mild pro-2-group and 2-extensions with restricted ramification*, preprint 2009.

[16] M. Lazard, *Groupes analytiques p-adiques*, IHES Publ. Math. **26** (1965).

[17] L. Lesieur, R. Croisot, *Sur les anneaux premiers noethériens à gauche*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. **76** (1959), 161-183.

[18] C. Maire, *Cohomology of Number Fields and Analytic pro-p-groups*, preprint 2007.

[19] C. Maire, *Sur la dimension cohomologique des pro-p-extensions des corps de nombres*, J. Th. des Nombres de Bordeaux **17** fasc. 2 (2005), 575-606.

[20] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, Cohomology of Number Fields, GMW 323, Springer, 2008.

[21] A. Neumann, *Completed group Algebras without zero divisors*, Arch. Math. **51** (1988), 496-499.

[22] T. Nguyen Quang Do, *Formations de classes et modules d'Iwasawa*, Number theory, Noordwijkerhout 1983, 167–185, Lecture Notes in Math., 1068, Springer, Berlin, 1984.

[23] L. Salle, *Tamely ramified pro-2-extensions over cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extensions*, Osaka Journal of Math., à paraître.

[24] L. Salle, *Pro-p-extensions à ramification restreinte*, Journal Théorie des Nombres de Bordeaux **20** numéro 2 (2008), 485-523.

[25] L. Salle, *Mild pro-p-groups as Galois groups over global fields*, International Journal of Number Theory **5** (2009), 779-795.

[26] A. Schmidt, *On pro-p fundamental groups of marked arithmetic curves*, Documenta Mathematica **12** (2007), 441-471.

[27] L. Schneps, *On the μ-invariant of p-adic L-functions attached to elliptic curves with complex multiplication*, Journ. of Number Theory **25** (1987), 20-33.

[28] J.-P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lectures Notes in Mathematics 5, Springer-Verlag, 1994.

[29] O. Venjakob, *On the Iwasawa Theory of p-adic Lie Extensions*, Compositio Math. **138** (2003), 1-54.

[30] D. Vogel, *Circular sets of prime of imaginary quadratic fields*, preprint 2006.

[31] K. Wingberg, *Galois groups of local and global type*, Crelle **517** (1999), 223-239.

---

6 septembre 2009

CHRISTIAN MAIRE(*), Laboratoire de Mathématiques, UFR Sciences et Techniques, 16 route de Gray, 25030 Besançon • *E-mail :* `christian.maire@univ-fcomte`

(*)Recherche partiellement financée par l'Agence Nationale de la Recherche. Projet "Algorithmique des fonctions L" (ANR-07-BLAN-0248)