PLONGEMENTS LOCAUX ET EXTENSIONS DE CORPS DE NOMBRES

par

Christian Maire

Résumé. — Dans ce travail, nous nous intéressons au plongement ι_S^T des T-unités d'un corps de nombres K dans une partie de ses complétés p-adiques construite sur l'ensemble S. Nous montrons que l'injectivité de ι_S^T permet d'obtenir des informations sur la structure du groupe de Galois de certaines extensions de K où la ramification est liée à S et la décomposition à T. Nous étudions également le comportement asymptotique du noyau de ι_S^T le long d'une extension p-adique analytique sans p-torsion.

Introduction

Fixons un nombre premier p. Soit K un corps de nombres (quand $p=2$, nous supposons le corps K totalement imaginaire) et soient S et T deux ensembles finis disjoints de places finies de K. Notons par S_p l'ensemble des places de K au-dessus de p.

Si v désigne une place finie quelconque de K, notons $\mathscr{U}_v := \varprojlim_n \mathrm{U}_v/\mathrm{U}_v^{p^n}$ le complété p-adique de l'anneau des entiers U_v du complété K_v de K en v. Rappelons que si v divise p, $\mathscr{U}_v \simeq \mu_{p^\infty}(\mathrm{K}_v) \times \mathbb{Z}_p^{[\mathrm{K}_v:\mathbb{Q}_p]+1}$ sinon, pour une place finie v, $\mathscr{U}_v = \mu_{p^\infty}(\mathrm{K}_v)$. Si v est infinie et p impair ou bien si v est infinie et

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R23, 11R37.
Mots clefs. — Pro-p-extensions à ramification restreinte, plongements locaux, extensions galoisiennes p-adiques analytiques.

Je tiens à remercier Georges Gras pours les échanges autour de ce travail. Mes remerciements également à Thong Nguyen Quang Do et à Vincent Fleckinger pour les discussions sur les déterminants dans les corps gauches, à Kossivi Adjamakbo pour l'envoi de sa thèse d'état et au rapporteur pour ses nombreuses remarques.

K est totalement imaginaire, il vient $\mathscr{U}_v = \{1\}$. Une place v de K est dite modérée si $v \notin S_p$ et si $\mathscr{U}_v$ n'est pas trivial.

Pour toute la suite, nous supposons que S ne contient que des places v pour lesquelles $\mathscr{U}_v$ n'est pas trivial.

Après s'être fixé une clôture algébrique de K_v, notons par $\overline{\mathrm{K}_v}$ la pro-p-extension maximale de K_v et posons $G_v = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}_v}/\mathrm{K}_v)$ le pro-p-groupe de Galois absolu de K_v puis I_v le pro-p-groupe d'inertie de $\overline{\mathrm{K}_v}/\mathrm{K}_v$.

Soit

$$\iota_S^T : \mathscr{E}_{\mathrm{K}}^T \to \prod_{v \in S} \mathscr{U}_v,$$

le plongement local en les places de S de $\mathscr{E}_{\mathrm{K}}^T = \mathbb{Z}_p \otimes E_{\mathrm{K}}^T$, le complété p-adique du groupe des T-unités E_{K}^T de K. Posons

$$\mathscr{E}_S^T = \ker(\iota_S^T)$$

le noyau du morphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules ι_S^T. Le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathscr{E}_S^T$ est de type fini et sans torsion dès que S contient au moins une place au-dessus de p. Posons

$$\mathrm{r}_S^T = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_S^T.$$

Le noyau $\mathscr{E}_S^T$ a été étudié par de nombreux auteurs. On renvoie à [7], à [22] ou encore à [10] pour un panorama précis des résultats connus et attendus. À noter que quand S contient S_p et que $T = \emptyset$, on se trouve dans le cadre de la conjecture de Leopoldt et, conjecturalement, $\mathrm{r}_S^T = \mathrm{r}_S = 0$.

Lemme 0.1. — *Soit $S_1 = S \cap S_p$. Alors*

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_S^T = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_{S_1}^T.$$

En effet, cela provient de la finitude de $\mathscr{E}_{S_1}^T / \mathscr{E}_S^T$.

Si F/K est une extension de degré fini, nous notons par abus

$$S = S(\mathrm{F}) = \{w \text{ place de } \mathrm{F}, w|v, v \in S\},$$

puis $\mathscr{E}_{\mathrm{F},S}^T = \ker(\iota_{\mathrm{F},S}^T)$; $\mathrm{r}_{\mathrm{F},S}^T = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_{\mathrm{F},S}^T$. En particulier, si $\mathrm{F} \subset \mathrm{L}$, alors $\mathscr{E}_{\mathrm{F},S}^T \subset \mathscr{E}_{\mathrm{L},S}^T$ et $\mathrm{r}_{\mathrm{F},S}^T \leq \mathrm{r}_{\mathrm{L},S}^T$.

Soit K_S^T la pro-p-extension maximale de K, non-ramifiée en dehors de S et T-décomposée (dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$, les places en dehors de S sont non-ramifiées, les places de T ainsi que les places à l'infini, sont totalement décomposées) ; $G_S^T = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K})$. La théorie du corps de classes fournit l'égalité suivante :

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} G_S^{T,ab} = 1 + \mathrm{r}_S^T + \sum_{v \in S \cap S_p} [\mathrm{K}_v : \mathbb{Q}_p] - (r_1 + r_2 + |T|), \tag{1}$$

où (r_1, r_2) est la signature du corps K (voir par exemple [7], chapitre III §1).

Dans une première partie de ce travail, nous montrons que la trivialité de r_S^T le long de $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$ donne des informations sur la structure de certaines pro-p-extensions contenant K_S^T. Avant d'énoncer le résultat principal, introduisons quelques notations. Soient Σ et $\mathcal{T}$ sont deux ensembles finis et disjoints de places de K tels que $S \subset \Sigma$, $\mathcal{T} \subset T$. Posons :

$$R = \Sigma \cap T, \quad \overline{S} = \Sigma - (R \cup S), \quad \overline{T} = T - (R \cup \mathcal{T}).$$

Nous montrons :

Théorème 0.2. — *Soient Σ un ensemble fini de places de* K *contenant S et soit $\mathcal{T}$ un sous-ensemble de places de T avec $\mathcal{T} \cap \Sigma = \emptyset$. Supposons que*

(i) pour $v \in \overline{S}$, le degré résiduel de v dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$ est infini ;

(ii) pour tout corps de nombres K_n contenu dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$, $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T = \{1\}$.

Alors

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma^{\mathcal{T}}/\mathrm{K}_S^T) \simeq \left(\ast_{v\in \overline{S}(\mathrm{K}_S^T)} I_v\right) \ast \left(\ast_{v\in \overline{T}(\mathrm{K}_S^T)} \mathrm{F}_v\right) \ast \left(\ast_{v\in R(\mathrm{K}_S^T)} G_v\right),$$

où G_v est le pro-p-groupe de Galois absolu de K_v, où I_v est le pro-p-sous-groupe d'inertie de G_v et où F_v est naturellement isomorphe au pro-p-groupe de Galois de l'extension non-ramifiée maximale de K_v, ce dernier étant engendré par le Frobenius σ_v en v.

Remarque 0.3. — Nous renvoyons à [16], chapitre IV, pour la notion de pro-p-produit libre $\ast$.

Ce résultat peut être vu comme une extension de l'analogue pour les corps de nombres du théorème d'existence de Riemann (voir par exemple [16], chapitre X) :

***Théorème 0.4* (Neumann, [18])**. — *Soit T un ensemble de places modérées de* K. *Alors on a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow \ast_{v\in T(\mathrm{K}_{S_p})} I_v \longrightarrow G_{S_p\cup T} \to G_{S_p} \longrightarrow 1,$$

où ici $I_v \simeq \mathbb{Z}_p$ est le pro-p-sous-groupe d'inertie de G_v.

Dans une seconde partie de ce travail, nous étudions le $\mathbb{Z}_p$-rang $\mathrm{r}_{n,S}^T$ du groupe $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T$ le long d'une sous-extension galoisienne L/K de $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$.

Soit L/K une pro-p-extension de K, non-ramifiée en dehors de S et T-décomposée, de groupe de Galois G. Supposons le groupe G p-adique analytique. Soit G_0 un sous-groupe ouvert uniforme de G. Soit $(\mathrm{G}_n)_n$ la suite p-centrale descendante de G_0 :

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{G}_{n+1} = \mathrm{G}_n^p[\mathrm{G}_0, \mathrm{G}_n].$$

Posons, pour $n \geq 0$, $\mathrm{K}_n = \mathrm{L}^{\mathrm{G}_n}$.

Nous obtenons des informations sur le groupe $\mathscr{E}^T_{\mathrm{K}_n,S}$ en passant par l'étude des coinvariants d'un $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$-module $\mathscr{X}$.

Théorème 0.5. — *Soit* L/K *une pro-p-extension, nilpotente, p-adique analytique sans p-torsion de dimension* $d > 0$, *contenue dans* $\mathrm{K}^T_S/\mathrm{K}$. *Soit* $\mathrm{r}^T_{n,S} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{E}^T_{\mathrm{K}_n,S}$. *Alors, lorsque* K_n *varie le long de* L/K,

$$\mathrm{r}^T_{n,S} \leq \mathrm{r}^T_S \cdot [\mathrm{G} : \mathrm{G}_0]p^{dn} + \mathcal{O}(p^{(d-1)n}),$$

où $\mathrm{r}^T_S = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{E}^T_{\mathrm{K},S}$.

Dans le paragraphe 1, nous commençons par donner quelques rappels. Dans le second paragraphe, nous donnons la preuve du théorème 0.2, résultat que nous illustrons dans un troisième paragraphe. Dans le dernier paragraphe, nous montrons le théorème 0.5 et terminons par quelques remarques.

Notations. Si M désigne un $\mathbb{Z}_p$-module, nous notons par $\dim_{\mathbb{F}_p} M$ la dimension sur $\mathbb{F}_p$ de $\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$, par $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} M$ la dimension sur $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$, par $M[p]$ le sous-groupe de M constitué des éléments tués par p et par M/p le quotient M/pM.

Si G désigne un pro-p-groupe et M un $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$-module compact, nous notons par $H_*(\mathrm{G}, M)$ l'homologie (des groupes profinis) de G à valeurs dans M. On rappelle que quand G est p-adique analytique, les groupes $H_*(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p)$ sont de type fini.
Lorsque $H_1(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p)$ et $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p)$ sont finis, on désigne par $d(\mathrm{G}) := \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{G}^{ab}/p = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p)$ le nombre minimal de générateurs de G et par $r(\mathrm{G}) := \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\mathrm{G}, \mathbb{F}_p)$ le nombre minimal de relations de G. La quantité $d(\mathrm{G})$ est également appelée p-rang de G.

1. Quelques rappels

1.1. Sur les groupes p-adiques analytiques sans p-torsion. — [d'après Lazard [12], Dixon, Du Sautoy, Mann, Segal [5] ...]
Soit G un pro-p-groupe p-adique analytique de dimension d. Le groupe G contient un sous-groupe ouvert H uniforme : H est sans torsion et $[H, H] \subset H^p$ (pour $p = 2$, $[H, H] \subset H^4$). En particulier, le groupe H est de dimension cohomologique d et $\dim_{\mathbb{F}_p} H^{ab}/p = d$. Si $(H_n)_n$ désigne la suite p-centrale descendante de H, alors $[H : H_n] = p^{dn}$.

Commençons par rappeler le comportement du rang et du nombre de relations des sous-groupes ouverts de G.

Proposition 1.1. — *Soit* G *un pro-p-groupe p-adique analytique et soit* $(\mathrm{G}_n)_n$ *une suite de sous-groupes ouverts de* G. *Alors, la suite des p-rangs* $d(\mathrm{G}_n)$ *et la suite des relations* $r(\mathrm{G}_n)$ *sont bornées.*

Démonstration. — Ce résultat est bien connu pour la suite des p-rangs $d(\mathrm{G}_n)$. Pour la suite des relations, voir [5], chapitre 4, exercice 11. □

Corollaire 1.2. — *Soit* G *un pro-p-groupe p-adique analytique et soit* $(\mathrm{G}_n)_n$ *une suite de sous-groupes ouverts de* G. *Alors la suite* $(\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_2(\mathrm{G}_n,\mathbb{Z}_p))_n$ *est bornée.*

Démonstration. — Il suffit de noter que $H_2(\mathrm{G}_n,\mathbb{Z}_p)/p \hookrightarrow H_2(\mathrm{G}_n,\mathbb{F}_p)$, puis d'utiliser la proposition 1.1. □

Notons $\Lambda(\mathrm{G}) = \varprojlim_{U\subset_o \mathrm{G}} \mathbb{Z}_p[\mathrm{G}/U]$ l'algèbre complète. Alors $\Lambda(\mathrm{G})$ est un anneau local, d'idéal maximal (I_G,p), où I_G est l'idéal d'augmentation de $\Lambda(\mathrm{G})$, de corps résiduel $\mathbb{F}_p$ et de dimension projective $1+cd(\mathrm{G})$ (voir par exemple [3]). Le groupe G étant p-adique analytique, l'anneau $\Lambda(\mathrm{G})$ est noetherien. Si de plus G est sans p-torsion, $\Lambda(\mathrm{G})$ est sans diviseur de zéro [12] [17]. Dans ce dernier cas, l'anneau $\Lambda(\mathrm{G})$ admet un corps des fractions $Q(\mathrm{G})$ [13].
Si M est $\Lambda(\mathrm{G})$-module compact de type fini, on définit alors par $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(M) = \dim_{Q(\mathrm{G})}\left(Q(\mathrm{G})\otimes_{\Lambda(G)} M\right)$ le rang du module M.

Typiquement voici la situation que l'on va considérer par la suite. Soit $\mathscr{G}$ un pro-p-groupe de présentation finie. Soit $\mathscr{H}$ un sous-groupe de $\mathscr{G}$, distingué et fermé. Soit $\mathrm{G} = \mathscr{G}/\mathscr{H}$ le quotient et soit $\mathscr{X} = \mathscr{H}^{ab}$. Alors $\mathscr{X}$, et plus généralement les groupes d'homologie $H_i(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)$, sont des $\Lambda(\mathrm{G})$-modules.
Le résultat suivant que l'on peut trouver dans un travail de Nguyen Quang Do, nous donne des informations sur le rang $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X})$ de $\mathscr{X}$:

Théorème 1.3 **(Nguyen Quang Do, [19] proposition 1.1 et théorème 1.4)**
Soit $\mathscr{G}$ *un pro-p-groupe de dimension cohomologique au plus* 2 *(et de présentation finie). Soit* $\mathscr{H}$ *un sous-groupe fermé distingué de* $\mathscr{G}$ *tel que le quotient* $\mathrm{G} = \mathscr{G}/\mathscr{H}$ *est p-adique analytique sans p-torsion. Posons* $\mathscr{X} = \mathscr{H}^{ab}$. *Alors* $\mathscr{X}$ *et* $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)$ *sont des* $\Lambda(\mathrm{G})$*-modules de type fini et*

$$\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X}) = -\chi(\mathscr{G}) + \delta_{\mathrm{G},1} + \mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)),$$

où $\chi(\mathscr{G}) = \sum_{i\geq 0}\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\mathrm{G},\mathbb{F}_p)$ *est la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe* $\mathscr{G}$ *et où* $\delta_{\mathrm{G},1} = 1$ *si* G *est trivial,* 0 *sinon.*

Lorsque $\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}_p$, l'étude de la structure des $\mathbb{Z}_p[[T]]$-modules de type fini permet de donner un comportement asymptotique du $\mathbb{Z}_p$-rang des quotients $\mathscr{X}/\omega_n$, où $\omega_{=}(1+T)^{p^n}-1$. Pour le cas général, nous avons le résultat suivant de Harris :

Théorème 1.4 **(Harris [8], [9])**. — *Soit* G *un pro-p-groupe p-adique analytique sans p-torsion, de dimension d. Soit* $\mathscr{X}$ *un* $\Lambda(\mathrm{G})$*-module de type fini et de rang* $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X})$*. Soit* G_n *la suite p-centrale descendante associée à un sous-groupe ouvert uniforme* G_0 *de* G *(voir l'introduction). Alors*

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{X}_{\mathrm{G}_n} = [\mathrm{G}:\mathrm{G}_n]\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X}) + \mathcal{O}(p^{(d-1)n}).$$

1.2. Sur le groupe $H_2(\mathrm{G}_S^T,\mathbb{Z}_p)$. — [[19], [14]] Introduisons la notion de poids d'un ensemble S.

Définition 1.5. — Soit S un ensemble fini de places de K. On définit le poids de S en p par la quantité

$$\delta_S = \sum_{v\in S\cap S_p}[\mathrm{K}_v:\mathbb{Q}_p].$$

Rappelons que K_S^T désigne la pro-p-extension maximale de K non-ramifiée en dehors de S et totalement décomposée en T ; $G_S^T = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K})$. Si $T=\emptyset$, on pose $G_S := G_S^{\emptyset}$. Le multiplicateur de Schur $H_2(\mathrm{G}_S^T,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ du groupe G_S^T est intimement lié au morphisme ι_S^T, puisque quand $T=\emptyset$ et que S contient S_p, la conjecture de Leopoldt équivaut à la trivialité de $H_2(\mathrm{G}_S,\mathbb{Z}_p)$ (voir par exemple [19]). Pour le cas général, nous avons :

Proposition 1.6. —
(i) Si $\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{G}_S^{T,ab}[p] = \dim_{\mathbb{F}_p}H_2(G_S^T,\mathbb{F}_p)$*, alors* $H_2(G_S^T,\mathbb{Z}_p)=0$.
(ii) La trivialité de $\mathscr{E}_S^T$ *implique la trivialité de* $H_2(\mathrm{G}_S^T,\mathbb{Z}_p)$.
(iii) Supposons G_S^T *de dimension cohomologique* $cd(G_S^T)$ *au plus* 2 *et que* $\mathscr{E}_S^T=\{1\}$*. Soit* K_n/K *une sous-extension finie de* $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$*. Alors* $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T=\{1\} \iff H_2(G_{\mathrm{K}_n,S}^T,\mathbb{Z}_p)=0$.
(iv) Si $1-\dim_{\mathbb{F}_p}H_1(G_S^T,\mathbb{F}_p)+\dim_{\mathbb{F}_p}H_2(\mathrm{G}_S^T,\mathbb{F}_p) = -\delta_S+(r_1+r_2+|T|)$*, alors* $\mathrm{r}_S^T = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}H_2(\mathrm{G}_S^T,\mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. — Pour le point (i), il faut noter que la suite exacte de G_S^T-modules

$$1\longrightarrow\mathbb{Z}_p\longrightarrow\mathbb{Z}_p\longrightarrow\mathbb{F}_p\longrightarrow 1,$$

donne imédiatement

$$1\longrightarrow H_2(\mathrm{G}_S^T,\mathbb{Z}_p)/p\longrightarrow H_2(\mathrm{G}_S^T,\mathbb{F}_p)\longrightarrow G_S^{T,ab}[p]\longrightarrow 1,$$

et le résultat en découle.
Pour (ii), la suite exacte précédente permet d'obtenir

$$\dim_{\mathbb{F}_p}H_2(G_S^T,\mathbb{Z}_p) = \chi_2(G_S^T)+\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}G_S^{T,ab}-1, \qquad (2)$$

où $\chi_2(G_S^T) = 1 - \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G_S^T, \mathbb{F}_p) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\mathrm{G}_S^T, \mathbb{F}_p)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de G_S^T tronquée à l'ordre 2. On ne connaît pas la valeur exacte de $\chi_2(G_S^T)$, mais simplement une majoration (cf. [7], Appendice) qui pour S non vide s'écrit :

$$\chi_2(G_S^T) \leq -\delta_S + (r_1 + r_2 + |T|), \tag{3}$$

ce qui, avec l'identité (voir 1)

$$\dim \mathbb{Q}_p \otimes G_S^{T,ab} = \delta_S - (r_1 + r_2 - 1 + |T|) + \dim \mathbb{Q}_p \otimes \mathscr{E}_S^T,$$

où (r_1, r_2) désigne la signature du corps K, nous permet d'obtenir

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\mathrm{G}_S^T, \mathbb{Z}_p) \leq \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_{\mathrm{K},S}^T.$$

Maintenant, si $S = \emptyset$ alors $\mathscr{E}^T = \mathscr{E}_S^T$. Ainsi si $\mathscr{E}_S^T$ est trivial, le corps K ne contient pas de racine primitive p-ème de l'unité et l'inégalité (3) reste toujours valable (voir encore [7], Appendice).
Le point (iii) est exactement le lemme 3.1 de [14].
Le point (iv) se déduit de l'égalité (2).

□

1.3. Un résultat de Schmidt. — Le résultat de Schmidt présenté dans cette partie joue un rôle déterminant dans la preuve du théorème 0.5.
Supposons $p > 2$ ou bien K totalement imaginaire. Quand S contient S_p, il est bien connu que la cohomologie galoisienne du groupe G_S s'identifie à la cohomologie étale de $Spec(\mathcal{O}_\mathrm{K} - S)$ (voir [15]). Les récents travaux de Schmidt [20] montrent que ce résultat reste valable pour S ne contenant pas nécessairement S_p mais dès lors que S est suffisament gros. En particulier, lorsque c'est le cas, il vient $cd(G_S) \leq 2$ (au moins quand S n'est pas vide). De plus, cet isomorphisme permet de donner une estimation exacte de la caractéristique d'Euler-Poincaré de G_S.

Théorème 1.7 **(Schmidt [20], théorème 1.1 (iv) et proposition 3.3)** *Supposons $p > 2$ ou bien* K *totalement imaginaire. Soient S et T deux ensembles finis de places de* K*. Alors il existe un ensemble fini S' de places de* K *tel que*

(i) $S' \cap S_p = S \cap S_p$ *et* $S \subset S'$;
(ii) $S' \cap T = \emptyset$;
(iii) $cd(G_{S'}^T) \leq 2$;
(iv) $\chi(\mathrm{G}_{S'}^T) = \chi_2(\mathrm{G}_{S'}^T) = r_1 + r_2 + |T| - \delta_{S'}$.

En conclusion, ce résultat montre qu'étant donné S, on peut grossir S en S' avec uniquement des places étrangères à p tel que $cd(G_{S'}^T) \leq 2$ et $\chi_2(\mathrm{G}_{S'}^T) = r_1 + r_2 + |T| - \delta_S$ (on peut noter qu'ici $\delta_S = \delta_{S'}$). Dans cette situation, d'après le lemme 0.1, on a encore $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_S^T = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_{S'}^T$.

Corollaire 1.8. — *Soit S un ensemble fini de places de* K. *Il existe un sous-ensemble fini S' de places de* K *tel que*

(i) $S \subset S'$, $S' \cap T = \emptyset$, *et* $S' \cap S_p = S \cap S_p$,

(ii) $cd(G_{S'}^T) \leq 2$,

(iii) $\chi(G_{S'}^T) = r_1 + r_2 + |T| - \delta_S = r_1 + r_2 + |T| - \delta_{S'}$,

(iv) $\mathrm{r}_S^T = r_{S'}^T = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_2(\mathrm{G}_{S'}^T, \mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. — Se déduit de la proposition 1.6, du lemme 0.1 et du théorème 1.7. □

Remarque 1.9. — Récemment, Labute et Minac ont montré que pour $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$ et $p = 2$, étant donné un ensemble fini (non vide) de places S de $\mathbb{Q}$, étrangères à 2, on peut trouver S' contenant S (également premier à 2) tel que $cd(G_S) = 2$. Dans ce cas, d'après la proposition 1.6, les groupes $H_2(G_{S'}, \mathbb{Z}_p)$ et $H_2(G_S, \mathbb{Z}_p)$ sont tous les deux triviaux.

2. La preuve du théorème 0.2

Commençons par rappeler le lemme bien connu suivant :

Lemme 2.1. —
Soit $\mathscr{G} \twoheadrightarrow \mathrm{G}$ *un morphisme de pro-p-groupes tel que :*

(i) $\mathscr{G}^{ab} \simeq \mathrm{G}^{ab}$;

(ii) $H_2(\mathrm{G}, \mathbb{Z}_p) = 0$.

Alors $\mathscr{G} \simeq \mathrm{G}$.

Démonstration. — Partons de la suite exacte $1 \longrightarrow R \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$. Alors les conditions (i) et (ii) impliquent que R_{G}^{ab} est trivial ce qui, grâce au lemme de Nakyama, implique que R est trivial. □

Nous pouvons commencer la preuve du théorème 0.2.
Soit $(\mathrm{K}_n)_n$ une suite croissante de sous-extensions finies de $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$ telle que $\bigcup_n \mathrm{K}_n = \mathrm{K}_S^T$.
Fixons un corps K_n. Notons $\mathrm{K}_{n,S}^{T,ab}$ (respectivement $\mathrm{K}_{n,\Sigma}^{\mathcal{T},ab}$) la pro-$p$-extension abélienne maximale de K_n non-ramifiée en dehors de S (resp. Σ) et totalement décomposée en T (resp. en $\mathcal{T}$).
Si w désigne une place de K_n, soit $\mathscr{K}_{n,w}^{\times} := \varprojlim_n \mathrm{K}_{n,w}^{\times}/{\mathrm{K}_{n,w}^{\times}}^{p^n}$ le compactifié p-adique de $\mathrm{K}_{n,w}^{\times}$.

Soit $\mathscr{J}_n$ le p-adifié du groupe des idèles de K_n (c'est le produit des $\mathscr{K}_{n,w}$ restreint aux $\mathscr{U}_{n,w}$), et soit $\mathscr{K}_n^\times := \varprojlim_n \mathrm{K}_n^\times/\mathrm{K}_n^{\times p^n}$ le compactifié p-adique de $\mathrm{K}_n^\times$.

On a, grâce à la théorie globale du corps de classes, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{\prod_{w\in\mathcal{T}(\mathrm{K}_n)}\mathscr{K}_w^\times\prod_{w\notin\mathcal{T}(\mathrm{K}_n)\cup\Sigma(\mathrm{K}_n)}\mathscr{U}_w}{\mathscr{E}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{K}_n,\Sigma}} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \dfrac{\mathscr{J}_n}{\mathscr{K}_n^\times} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{n,\Sigma}^{\mathcal{T},ab}/\mathrm{K}_n) \arrow[d, two heads] \\
\dfrac{\prod_{w\in T(\mathrm{K}_n)}\mathscr{K}_w^\times\prod_{w\notin T(\mathrm{K}_n)\cup S(\mathrm{K}_n)}\mathscr{U}_w}{\mathscr{E}^{T}_{\mathrm{K}_n,S}} \arrow[r, hook] & \dfrac{\mathscr{J}_n}{\mathscr{K}_n^\times} \arrow[r, two heads] & \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{n,S}^{T,ab}/\mathrm{K}_n)
\end{tikzcd}$$

qui permet d'obtenir l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{n,\Sigma}^{\mathcal{T},ab}/\mathrm{K}_{n,S}^{T,ab}) \simeq \frac{\prod_{w\in\overline{S}(\mathrm{K}_n)}\mathscr{U}_w\prod_{w\in\overline{T}(\mathrm{K}_n)}<\pi_w>\prod_{w\in R(\mathrm{K}_n)}\mathscr{K}_w^\times}{\mathscr{E}^{T}_{\mathrm{K}_n,S}},$$

π_w étant une uniformisante de $\mathscr{K}_{n,v}$.

Ainsi, sous la condition $\mathscr{E}^T_{\mathrm{K}_n,S}=\{1\}$, on a, grâce à la théorie locale du corps de classes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{n,\Sigma}^{\mathcal{T},ab}/\mathrm{K}_{n,S}^{T,ab}) &\simeq \left(\prod_{w\in\overline{S}(\mathrm{K}_n)}\mathscr{U}_w\right)\left(\prod_{w\in\overline{T}(\mathrm{K}_n)}<\pi_w>\right)\left(\prod_{w\in R(\mathrm{K}_n)}\mathscr{K}_w^\times\right)\\
&\simeq \left(\prod_{v\in\overline{S}}\prod_{w|v}I_{n,w}/\left([G_{n,w},G_{n,w}]\cap I_{n,w}\right)\right)\\
&\quad\left(\prod_{v\in\overline{T}}\prod_{w|v}<\sigma_w>\right)\left(\prod_{v\in R}\prod_{w|v}G_{n,w}^{ab}\right),
\end{aligned}$$

où $G_{n,w}=\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}_{n,w}}/\mathrm{K}_{n,w})$ est le pro-p-groupe de Galois absolu de $\mathrm{K}_{n,w}$, où $I_{n,w}$ est le sous-groupe d'inertie de $G_{n,w}$ et où σ_w est le Frobenius en w.

Pour $w\in\overline{S}$, comme $G_{n,w}/I_{n,w}$ est pro-cyclique, il vient

$$I_{n,w}/\left([G_{n,w},G_{n,w}]\cap I_{n,w}\right)\simeq I_{n,w}/[G_{n,w},I_{n,w}]=\left(I_{n,w}^{ab}\right)_{G_{n,w}^{nr}},$$

où $G_{n,w}^{nr}$ est le groupe de Galois de la pro-p-extension maximale et non-ramifiée de $\mathrm{K}_{n,w}$.

Faisons le choix d'une place $w|v$ le long de $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$.

• Si $v\in\overline{T}$, v est totalement décomposée dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$. Ainsi $\sigma_w=\sigma_v$.

• Si $v\in R$, v est également totalement décomposée dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$ et ainsi $G_{n,w}=G_v$.

• Reste le cas où $v\in\overline{S}$. L'extension $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$ est non-ramifiée en $v\in\overline{S}$, alors pour tout entier n, pour toute place $v\in\overline{S}$, $I_{n,w}=I_v$. Faisons ensuite tendre

K_n vers K_S^T. Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} \left(I_{n,v}^{ab}\right)_{G_{n,w}^{nr}} \simeq I_v^{ab}/\bigcap_n \left(I_{G_{n,w}^{nr}} I_v^{ab}\right),$$

$I_{G_{n,w}^{nr}}$ étant l'idéal d'augmentation de l'algèbre complète $\mathbb{Z}_p[[G_{n,w}^{nr}]]$. Comme par hypothèse, pour $v \in \overline{S}$, le degré résiduel de v dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$ est infini, il vient $\mathrm{K}_v^{nr} = (\mathrm{K}_S^T)_w$ et par conséquent

$$\{1\} = \bigcap_n G_{n,w}^{nr} \subset G_v^{nr}.$$

Le pro-p-groupe I_v^{ab} est un $\mathbb{Z}_p[[G_v^{nr}]]$-module compact de type fini. Il vient alors

$$\bigcap_n \left(I_{G_{n,w}^{nr}} I_v^{ab}\right) = \{1\}$$

et ainsi

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} \left(I_v^{ab}\right)_{G_{n,w}^{nr}} \simeq I_v^{ab}.$$

Au total

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma^{\mathcal{T}}/\mathrm{K}_S^T)^{ab} & \simeq & \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \mathrm{K}_n}} \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{n,\Sigma}^{\mathcal{T},ab}/\mathrm{K}_{n,S}^{T,ab}) \\
& \simeq & \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \mathrm{K}_n}} \left(\prod\limits_{w\in\overline{S}(\mathrm{K}_n)} \left(I_v^{ab}\right)_{G_{n,w}^{nr}} \prod\limits_{w\in\overline{T}(\mathrm{K}_n)} <\sigma_w> \prod\limits_{w\in R(\mathrm{K}_n)} G_{n,w}^{ab}\right) \\
& \simeq & \left(\left(*_{w\in\overline{S}(\mathrm{K}_S^T)} I_w\right) * \left(*_{w\in\overline{T}(\mathrm{K}_S^T)} <\sigma_w>\right) * \left(*_{w\in R(\mathrm{K}_S^T)} G_w\right)\right)^{ab},
\end{array}$$

où $I_w = I_v$, $\sigma_w = \sigma_v$ et $G_w = G_v$.
Notons ensuite que $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,\Sigma}^{\mathcal{T}} \subset \mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^{T} = \{1\}$. Les groupes $H_2(\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma^{\mathcal{T}}/\mathrm{K}_n), \mathbb{Z}_p)$ sont triviaux (cf. proposition 1.6) et à la limite, $H_2(\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma^{\mathcal{T}}/\mathrm{K}_S^T), \mathbb{Z}_p)$ est trivial.
Pour finir, la suite exacte

$$R \hookrightarrow \left(*_{w\in\overline{S}(\mathrm{K}_S^T)} I_w\right) * \left(*_{w\in\overline{T}(\mathrm{K}_S^T)} <\sigma_w>\right) * \left(*_{w\in R(\mathrm{K}_S^T)} G_w\right) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma^{\mathcal{T}}/\mathrm{K}_S^T),$$

et le lemme 2.1 montrent que $R = 0$. Le théorème 0.2 en découle.

3. Quelques exemples

Voici une première méthode pour vérifier que la condition (ii) du théorème 0.2 est réalisée. Supposons le groupe G_S^T de dimension cohomologique finie (voir par exemple §1.3). Le pro-p-groupe G_S^T est donc sans torsion. Si une place v, $v \notin S$, est inerte dans l'abélianisé de G_S^T, alors nécessairement le groupe de décomposition de v dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$ est maximal (isomorphe à $\mathbb{Z}_p$). Cette stratégie a été développée par Schmidt dans [20]. Il y a aussi une seconde méthode pour la condition (ii) : elle consiste à la tester au niveau abélien via la théorie du corps de classes.

Proposition 3.1. — *Pour $v \notin S \cup T$, le groupe d'inertie de v dans $\mathrm{K}_S^{T,ab}/\mathrm{K}$ est infini si et seulement si $\mathscr{E}_S^{T\cup\{v\}} = \mathscr{E}_S^T$.*

Démonstration. — C'est une simple conséquence de la théorie du corps de classes. Le groupe d'inertie de la place v est infini dans $\mathrm{K}_S^{T,ab}/\mathrm{K}$ si et seulement si le $\mathbb{Z}_p$-rang de $G_S^{T,ab}$ est strictement plus grand que le $\mathbb{Z}_p$-rang de $G_S^{T\cup\{v\},ab}$, ce qui équivaut à $\mathscr{E}_S^{T\cup\{v\}} = \mathscr{E}_S^T$. □

La condition (i) du théorème 0.2 est plus difficile à tester à l'exception du cas où G_S^T est libre.

Proposition 3.2. — *Supposons le groupe G_S^T pro-p-libre (non trivial) et supposons $\mathscr{E}_S^T = \{1\}$. Alors le long de $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$, $\mathscr{E}_{S,\mathrm{K}_n}^T = \{1\}$.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{G}_n = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}_n)$. Le groupe G_S^T étant pro-p-libre, le long de $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$, le $\mathbb{Z}_p$-rang de G_n^{ab} vaut alors exactement

$$(\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{G}_n^{ab} - 1) = [G_S^T : \mathrm{G}_n](\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} G_S^{T,ab} - 1),$$

ce qui implique

$$[G_S^T : \mathrm{G}_n]\left(\delta_S - (r_1 + r_2 + |T|)\right) + \mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S}^T = [G_S^T : \mathrm{G}_n]\left(\delta_S - (r_1 + r_2 + |T|)\right),$$

et ainsi $\mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S}^T = 0$. Comme G_S^T est libre, le quotient $G_S^{T,ab}$ est $\mathbb{Z}_p$-libre de rang non trivial, nécessairement S contient au moins une place divisant p et ainsi $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T$ est sans p-torsion. Par conséquent, $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T = \{1\}$. □

3.0.1. Le cas classique. — On se fixe K un corps de nombres. On pose $S = S_p$, $\Sigma = S_p \cup \{v_1, \cdots, v_r\}$, $T = \mathcal{T} = \emptyset$; $R = \overline{S} = \emptyset$. Alors, sous la conjecture de Leopoldt, le long de K_S/K, $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S} = \{1\}$. D'un autre côté, $\mathscr{E}_S^{\{v_i\}} = \{1\}$ (voir par exemple [7], III § 3). Les hypothèses du théorème 0.2 sont satisfaites et $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S) \simeq \ast_{w\in\overline{S}(\mathrm{K}_S)} I_w$.

3.0.2. De la non-ramification à la décomposition totale. — Soit K un corps quadratique imaginaire ayant un p-groupe des classes trivial ($p > 3$). Soit $\mathfrak{q}$ un premier de K premier à p. Posons $\Sigma = S = S_p$, $T = \{\mathfrak{q}\}$ et $\mathcal{T} = \emptyset$; $R = \overline{S} = \emptyset$. Le complété p-adique des T-unités est engendré par une $\mathfrak{q}$-unité ε, $v_{\mathfrak{q}}(\varepsilon) = 1$. Supposons

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\left(\frac{\prod_{v\in S}\mathscr{U}_v}{\iota_S(\varepsilon)}\right) = \{1\}.$$

Alors par la théorie du corps de classes $G_S^{T,ab} \simeq \mathbb{Z}_p$; le groupe G_S^T, isomorphe à $\mathbb{Z}_p$, est pro-p-libre et par conséquent, le long de $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$, $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T = \{1\}$. Le théorème 0.2 s'applique :

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_S^T) \simeq \ast_{v\in T(\mathrm{K}_S^T)} < \sigma_v >.$$

Typiquement, prenons $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $p > 3$. Alors le théorème 0.2 s'applique pour $\mathfrak{q} = \ell$ vérifiant : $\left(\dfrac{-1}{\ell}\right) = -1$ et $v_p(\ell - 1) = 1$.

3.0.3. De la ramification à la totale décomposition. — On reprend la situation de la section précédente avec $S = S_p$, $\Sigma = S \cup \{\mathfrak{q}\}$, $\mathfrak{q} \notin S$, $\mathcal{T} = \emptyset$, $T = \{\mathfrak{q}\}$. Alors $R = \Sigma \cap T = \{\mathfrak{q}\}$ et $\overline{S} = \emptyset$. Sous les conditions de la section 3.0.2, on obtient alors

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S^T) \simeq \ast_{v\in R(\mathrm{K}_S^T)} G_v,$$

où ici $\mathrm{G}_v \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$.

3.0.4. De la ramification à la non-ramification. — Soit K un corps quadratique imaginaire. Soit $p > 3$ un nombre premier tel que le p-groupe des classes de K est trivial. Supposons le premier p décomposé dans $\mathrm{K}/\mathbb{Q}$ et soit $\mathfrak{p}$ un premier de K au-dessus de p. On pose $\mathcal{T} = T = \emptyset$, $S = \{\mathfrak{p}\}$, $\Sigma = S \cup \{v_1, \cdots, v_r\}$, $\overline{S} = \{v_1, \cdots, v_r\}$, $R = \emptyset$.
Le groupe G_S est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ et est donc libre : le long de K_S/K, $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S} = \{1\}$.
Comme $\mathscr{E}^{\{v_i\}}$ est de rang 1, il vient $\mathscr{E}_S^{\{v_i\}} = \{1\}$. Ainsi, grâce à la proposition 3.1, les hypothèses du théorème 0.2 sont satisfaites et par conséquent :

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}_S) \simeq \ast_{v\in\overline{S}(\mathrm{K}_S)} I_v.$$

À noter ici que si v ne divise pas p, $I_v \simeq \mathbb{Z}_p$. Sinon, I_v est un pro-p-groupe libre et $I_v^{ab} \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$, où $\mathbb{Z}_p[[T]]$ est l'algèbre d'Iwasawa abélienne associée au groupe de Galois sur $\mathbb{Q}_p$ de la pro-p-extension non-ramifiée maximale de $\mathbb{Q}_p$.

4. Sur l'étude asymptotique de $\mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T$

4.1. Sur l'estimation de $H_2(\mathscr{H}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. — Soit $\mathscr{G}$ un pro-p-groupe de type fini et soit $\mathscr{H}$ un sous-groupe fermé et distingué de $\mathscr{G}$. Posons $\mathrm{G} = \mathscr{G}/\mathscr{H}$. En vu d'utiliser le théorème 1.3, on cherche à avoir des informations sur le rang $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H}, \mathbb{Z}_p))$ du $\Lambda(\mathrm{G})$-module $H_2(\mathscr{H}, \mathbb{Z}_p)$. Commençons par donner le résultat clé dû à Nguyen Quang Do :

***Proposition 4.1* (Nguyen Quang Do, [19] proposition 1.7)**

Supposons $\mathscr{G}$ de dimension cohomologique au plus 2 (et de présentation finie). On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p) \arrow[r, hook] & \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^r \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^d \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi_1"] & H_0(\mathscr{H}, I_{\mathscr{G}}) \arrow[d] \\
H_2(\mathscr{G},\mathbb{Z}_p) \arrow[r, hook] & \mathbb{Z}_p^r \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Z}_p^d \arrow[r, two heads] & I_{\mathscr{G}}/I_{\mathscr{G}}^2
\end{tikzcd}$$

où $I_{\mathscr{G}}$ est l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{Z}_p[[\mathscr{G}]]$, $r = r(\mathscr{G}) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\mathscr{G},\mathbb{F}_p)$ et $d = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\mathscr{G},\mathbb{F}_p)$, et où les morphismes ϕ et ϕ_1 sont simplement les morphismes de réduction modulo l'idéal d'augmentation I_{G}.

Ce résultat nous permet d'obtenir immédiatement la proposition suivante :

Proposition 4.2. — *Soit $\mathscr{G}$ un pro-p-groupe de dimension cohomologique au plus 2 (et de présentation finie) et soit la suite exacte de pro-p-groupes*

$$1 \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1.$$

Supposons G p-adique analytique sans p-torsion.

(i) Alors $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p) = 0$ si et seulement si $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)) = 0$;
(ii) Si $\mathrm{Im}(\psi) \neq 0$, il vient $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)) \leq r-1$, où $r = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\mathscr{G},\mathbb{F}_p)$.

Démonstration. — La preuve se déduit de la proposition 4.1.
Le point i) provient du fait que $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)$ est sans $\Lambda(\mathrm{G})$-torsion.
Pour le point ii), il faut noter que la matrice de ψ_1 à coefficients dans $\Lambda(\mathrm{G})$, de taille $r \times d$, est non-nulle. Ainsi, $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\ker(\psi_1)) \leq r-1$. □

Corollaire 4.3. — *Sous les conditions de la proposition 4.2, si $\mathscr{G}$ est tel que $\mathrm{Tor}(\mathscr{G}^{ab}) \neq 1$ et tel que $r(\mathscr{G}) = 1$, alors $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p) = 0$.*

Démonstration. — En effet, d'après la proposition 4.1,

$$\mathscr{G}^{ab} \simeq I_{\mathscr{G}}/I_{\mathscr{G}}^2 \simeq \mathbb{Z}_p^d/\mathrm{Im}(\psi).$$

Comme $\mathrm{Tor}(\mathscr{G}^{ab})$ n'est pas trivial, il vient immédiatement $\mathrm{Im}(\psi) \neq 0$ et on conclut avec la proposition 4.2. □

Pour le cas général, nous montrons dans la section suivante le

Théorème 4.4. — *Soit $\mathscr{G}$ un pro-p-groupe de dimension cohomologique au plus 2 (et de présentation finie) et soit la suite exacte de pro-p-groupes*

$$1 \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1.$$

Supposons G p-adique analytique nilpotent et sans p-torsion. Alors

$$\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)) \leq \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_2(\mathscr{G},\mathbb{Z}_p).$$

4.2. La preuve du théorème 4.4. — La preuve du théorème 4.4 que nous proposons repose de manière fondamentale sur l'existence d'un corps des fractions $Q(\mathrm{G})$ de l'anneau noetherien sans diviseur de zéro $\Lambda(\mathrm{G})$ et sur la théorie des déterminants pour de tels anneaux. Pour les déterminants sur les anneaux non-commutatifs, nous renvoyons par exemple à [1].

Démonstration. — Comme G un pro-p-groupe p-adique analytique sans p-torsion, l'anneau $\Lambda(\mathrm{G})$ est un domaine de Öre : intègre, noetherien à gauche et à droite. Il admet un "unique" déterminant (qui passe par le corps des fractions de cet anneau) à valeurs dans l'union de l'abélianisé du corps des fractions avec $\{0\}$: c'est le déterminant de Dieudonné [4]. Rappelons la propriété fondamentale que nous allons utiliser ici : si $A \in \mathrm{M}_n(R)$, où R est un domaine de Öre, alors $\det(R) = 0$ si et seulement si les colonnes de A sont liées sur R.

Supposons donc $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Im}(\psi) = m$. Nous allons montrer que $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathrm{Im}(\psi_1)) \geq m$ et ainsi on aura $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\ker(\psi) \geq \mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\ker(\psi_1))$.
Le problème est alors purement algébrique. On part du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]^r \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z}_p[[G]]^d \arrow[d, "\phi_1"] \\
\mathbb{Z}_p^r \arrow[r, hook, "\psi"] & \mathbb{Z}_p^d
\end{tikzcd}$$

À partir du morphisme ψ, on déduit l'existence d'une sous-matrice carrée A d'ordre m, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$, telle que la matrice $\bar{A} = A(\mathrm{mod}\ I_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{Q}_p)$. Tout repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.5. — *Soit* G *un pro-p-groupe p-adique analytique, nilpotent et sans p-torsion. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]])$ telle que $\bar{A} := A(\mathrm{mod}\ I_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{Q}_p)$. Alors $det(A)$ est non nul.*

Démonstration. — Posons

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}(I_{\mathrm{G}}) = \{x \in \Lambda(\mathrm{G}), x \notin I_{\mathrm{G}}\},$$

où I_{G} est l'idéal d'augmentation de l'algèbre complète $\Lambda(\mathrm{G})$. L'ensemble $\mathcal{C}$ contient l'élément 1 et est multiplicatif.

Définition 4.6. — On dit que l'anneau $\Lambda(\mathrm{G})$ vérifie la condition de Öre relativement à $\mathcal{C}$ si et seulement si étant donnés $a \neq 0$ (mod I_{G}) et $b \in \Lambda(\mathrm{G})$, il existe $s, t \in \Lambda(\mathrm{G})$, $t \neq 0$ (mod I_{G}), tels que $as = bt$.

Dans l'esprit d'un résultat de Goldie [6], Ardakov a montré :

***Proposition 4.7* (Ardakov [2]).** — *Soit* G *un pro-p-groupe analytique sans p-torsion. L'anneau* $\Lambda(\mathrm{G})$ *vérifie la condition de Öre relativement à* $\mathcal{C}(I_{\mathrm{G}})$ *si et seulement si* G *est nilpotent.*

Avec ce résultat, nous pouvons montrer le lemme 4.5 par récurrence sur m.
Si $m = 1$, $A = (a)$, et $\bar{A}$ est non nulle. Cela signifie que a est non nul et donc que $\det(A)$ est non-nul.
Supposons le lemme vrai pour m. Soit A une matrice carrée d'ordre $m + 1$ telle que $\bar{A} \in \mathrm{Gl}_{m+1}(\mathbb{Q}_p)$. L'opération consiste à réduire A dans $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$ en une matrice par blocs. On est assuré que sur la première ligne de la matrice A, il existe $a := a_{1,i} \in \mathcal{C} = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]] - I_{\mathrm{G}}$. Multiplions à droite la matrice A par une matrice M_0 permutant les colonnes 1 et i (le déterminant de M_0 est non-nul). Nommons par $a'_{i,j}$ les coefficients de AM_0. On utilise la proposition 4.7 : pour $i \geq 2$, il existe $s_i \in \Lambda(\mathrm{G})$, $t_i \in \mathcal{C}$ tels que $a'_{1,1}s_i = a'_{1,i}t_i$. Multiplions alors à droite la matrice AM_0 par la matrice M_1 définie par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ 0 & -t_2 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & -t_i & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -t_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Il vient $\det(M_1) = (-1)^m t_2 \cdots t_{m+1}$ et ainsi $\det(M_1) \neq 0 \pmod{I_{\mathrm{G}}}$. On obtient alors la matrice par blocs

$$AM_0M_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ * & A' \end{pmatrix}$$

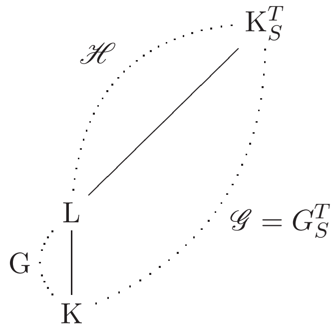
où A' est de taille $m \times m$ (on rappelle que $\bar{a} \neq 0$). Modulo I_{G}, on a aussi $\overline{AM_0M_1} = \bar{A}\bar{M}_0\bar{M}_1$, avec $\bar{M}_0\bar{M}_1$ de rang maximal. Ainsi $\bar{A}'$ est de rang m. On peut appliquer la récurrence pour la matrice $\bar{A}'$: $\det(A') \neq 0$. Le déterminant d'une matrice par blocs se calcule bien :

$$\det(A)\det(M_0)\det(M_1) = a\det(A'),$$

et ainsi $\det(A) \neq 0$. □

À partir de ce lemme, on en déduit que la matrice de ψ_1 a m-colonnes $\Lambda(\mathrm{G})$-indépendantes. Ainsi, sur le corps des fractions de $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$, $\mathrm{Im}(\psi_1)$ est de rang au moins m, ce qui montre le résultat cherché. □

4.3. La preuve du théorème 0.5. — Soit K un corps de nombres (que l'on suppose totalement imaginaire si $p = 2$). Considérons la tour de pro-p-extensions $\mathrm{K} \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{K}_S^T$, où K_S^T est la pro-p-extension maximale de K non-ramifiée en dehors de S et T-décomposée. Notons $G_S^T = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K})$, $\mathscr{H} := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S^T/\mathrm{L})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$.



Soit $\mathscr{X} := \mathscr{H}^{ab} = \mathscr{H}/[\mathscr{H},\mathscr{H}]$. Alors $\mathscr{X}$ est un $\Lambda(\mathrm{G})$-module compact de type fini : cela découle du fait que le groupe $H_2(G_S^T, \mathbb{F}_p)$ est fini. La preuve du théorème 0.5 repose alors sur l'étude du $\Lambda(\mathrm{G})$-module $\mathscr{X}$.
Rappelons quelques notations. Soit $(\mathrm{G}_n)_n$ la suite p-centrale descendante d'un sous-groupe uniforme ouvert G_0 de G :

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{G}_{n+1} = \mathrm{G}_n^p[\mathrm{G}_0, \mathrm{G}_n].$$

Posons alors $\mathrm{K}_n = \mathrm{L}^{\mathrm{G}_n}$. Soit $\mathscr{G}_n = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}_n)$.

Lemme 4.8. — *Si* G *est p-adique analytique,* $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{G}_n^{ab} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{X}_{\mathrm{G}_n} + \mathcal{O}(1)$.

Démonstration. — Pour $n \geq 0$, la suite spectrale $H^i(\mathrm{G}_n, H^j(H, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \Longrightarrow H^{i+j}(\mathscr{G}_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ permet d'obtenir la longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_2(\mathrm{G}_n, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathscr{X}_{\mathrm{G}_n} \longrightarrow \mathscr{G}_n^{ab} \twoheadrightarrow \mathrm{G}_n^{ab} .$$

Le résultat se déduit alors du corollaire 1.2. □

Nous sommes donc en mesure de montrer le théorème 0.5.

Démonstration. — Soit L/K une pro-p-extension *non-triviale*, analytique sans p-torsion et nilpotente, contenue dans $\mathrm{K}_S^T/\mathrm{K}$. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}/\mathrm{K})$. Quitte à grossir S avec des places modérées, grâce au corollaire 1.8 du théorème 1.7, on peut supposer que G_S^T est de dimension cohomologique au plus 2, que $\chi_2(\mathrm{G}_S^T) = (|T| + r_1 + r_2) - \delta_S$ et que la quantité r_S^T reste inchangée. On a aussi $\mathrm{r}_S^T = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_2(\mathrm{G}_S^T, \mathbb{Z}_p)$.
Soient $\mathscr{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S^T/\mathrm{L})$ et $\mathscr{X} = \mathscr{H}^{ab}$. Soit $\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X})$ le rang du $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{G}]]$-module $\mathscr{X}$.
On utilise le théorème 4.4 pour obtenir

$$\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H}, \mathbb{Z}_p)) \leq \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H_2(\mathrm{G}_S^T, \mathbb{Z}_p) = r_S^T$$

puis le théorème 1.3 pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X}) &= -\chi(G_S^T) + \mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)) \\ &\leq -\chi(G_S^T) + r_S^T = \delta_S - (r_1 + r_2 + |T|) + r_S^T.\end{aligned}$$

Avec le lemme 4.8 et le résultat de Harris rappelé précédemment (théorème 1.4), on a pour finir

$$\begin{aligned}\mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S}^T &= \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{G}_n^{ab} - (\delta_S - (r_1+r_2+|T|))\,[\mathrm{G}:\mathrm{G}_n] - 1 \\ &= \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{X}_{\mathrm{G}_n} - (\delta_S - (r_1+r_2+|T|))\,[\mathrm{G}:\mathrm{G}_n] + \mathcal{O}(1) \\ &= [\mathrm{G}:\mathrm{G}_n]\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X}) - (\delta_S - (r_1+r_2+|T|))\,[\mathrm{G}:\mathrm{G}_n] + \mathcal{O}\left(p^{(d-1)n}\right) \\ &\leq [\mathrm{G}:\mathrm{G}_n]\mathrm{r}_S^T + \mathcal{O}\left(p^{(d-1)n}\right) \\ &\leq [\mathrm{G}:\mathrm{G}_0]p^{dn}\mathrm{r}_S^T + \mathcal{O}\left(p^{(d-1)n}\right).\end{aligned}$$

□

4.4. Quelques remarques. —

4.4.1. Sur la conjecture faible de Leopolodt. — La conjecture faible de Leopoldt indique que le long de toute $\mathbb{Z}_p$-extension L/K, la quantité $\mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S_p}$ reste bornée. Cette conjecture équivaut à la trivialité de $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)$, où $\mathscr{H} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{S_p}/\mathrm{L})$ (voir par exemple [16]).
Dans le cadre de la section 4.3, nous avons :

Proposition 4.9. — *Supposons que le pro-p-groupe G_S^T est de dimension cohomologique au plus 2 et que $\chi_2(G_S^T) = -\delta_S + (r_1 + r_2 + |T|)$. Soit G un quotient p-adique analytique sans p-torsion de G_S^T, de dimension $d > 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes (suivant les notations de la section 4.3) :*

(i) $r_{\mathrm{K}_n,S}^T = \mathcal{O}(p^{(d-1)n})$;
(ii) $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p) = 0$.

Démonstration. — On suppose G_S^T non trivial.
Rappelons que dans la preuve du théorème 0.5, il apparaît

$$\mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S}^T = [\mathrm{G}:\mathrm{G}_n]\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(\mathscr{X}) - (\delta_S - (r_1+r_2+|T|))\,[\mathrm{G}:\mathrm{G}_n] + \mathcal{O}(p^{(d-1)n}).$$

Ainsi, grâce au théorème 1.3, on obtient alors

$$\mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S}^T = [\mathrm{G}:\mathrm{G}_0]p^{dn}\mathrm{rg}_{\Lambda(\mathrm{G})}(H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)) + \mathcal{O}(p^{(d-1)n}).$$

On conclut en notant que $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p)$ est sans Λ(G)-torsion. □

Remarque 4.10. — Quand $T = \emptyset$ et $S_p \subset S$, $H_2(\mathscr{H},\mathbb{Z}_p) = 0$ dès lors que L/K contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique (voir par exemple [19]).

4.4.2. Lien entre r_S^T *et* r_S. — Terminons par la comparaison suivante :

Proposition 4.11. — *Il vient :*

$$0 \leq \mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S}^T - \mathrm{r}_{\mathrm{K}_n,S} \leq |T|[\mathrm{G} : \mathrm{G}_0]p^{dn}.$$

Démonstration. — C'est assez immédiat. Il suffit simplement de remarquer que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S}^T / \mathscr{E}_{\mathrm{K}_n,S} \leq |T(\mathrm{K}_n)|$ puis que $|T(\mathrm{K}_n)| = |T|[\mathrm{G} : \mathrm{G}_0]p^{dn}$.

□

Références

[1] K. Adjakmagbo, *Théorie des déterminants sur un anneau non-commutatif*, Bulletin Sc. Math. **117** (1993), 401-420.

[2] K. Ardakov, *Localisation at augmentation ideals in Iwasawa algebras*, Glasgow Mathematical Journal **48** (2) (2006), 251-267.

[3] A. Brumer, *Pseudocompact Algebras, Profinite Groups and Class Formations*, J. Algebra **4** (1966), 442-470.

[4] J. Dieudonné, *Les déterminants sur un corps non commutatifs*, Bulletin de la SMF **71** (1943), 27-45.

[5] J.D. Dixon, M.P.F. Du Sautoy, A. Mann, D. Segal, Analytic pro-p-groups, Cambridge studies in advanced mathematics 61, Cambridge University Press, 1999.

[6] A.W. Goldie, *Localization in non-commutative Noetherian Rings*, Journal of Algebra **5** (1967), 89-105.

[7] G. Gras, Class Field Theory, SMM, Springer 2003.

[8] M. Harris, *p-adic representations arising from descent on abelian varieties*, Compositio Math. **39** (1979), no. 2, 177-245.

[9] M. Harris, *Correction to : "p-adic representations arising from descent on abelian varieties"*, Compositio Math. **121** (2000), no. 1, 105-108.

[10] J.-F. Jaulent, *Sur l'indépendance l-adique de nombres algébriques*, J. Number Theory **20** (1985), no. 2, 149-158.

[11] J. Labute and J. Mináč, *Mild pro-2-group and 2-extensions with restricted ramification*, preprint 2009.

[12] M. Lazard, *Groupes analytiques p-adiques*, IHES Publ. Math. **26** (1965), 389-603.

[13] L. Lesieur, R. Croisot, *Sur les anneaux premiers noethériens à gauche*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. **76** (1959), 161-183.

[14] C. Maire, *Sur la dimension cohomologique des pro-p-extensions des corps de nombres*, J. Th. des Nombres de Bordeaux **17** fasc. 2 (2005), 575-606.

[15] B. Mazur, *Notes on étale cohomology of number fields*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **6** (1973), 521–552.

[16] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, Cohomology of Number Fields, GMW 323, Springer, 2008.

[17] A. Neumann, *Completed group Algebras without zero divisors*, Arch. Math. **51** (1988), 496-499.

[18] O. Neumann, *On p-closed number fields and an analogue of Riemann's existence theorem*, Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), pp. 625-647. Academic Press, London, 1977.

[19] T. Nguyen Quang Do, *Formations de classes et modules d'Iwasawa*, Number theory, Noordwijkerhout 1983, 167–185, Lecture Notes in Math., 1068, Springer, Berlin, 1984.

[20] A. Schmidt, *On pro-p-fundamental groups of marked arithmetic curves*, J. reine u. angew. Math **640** (2010), 203-235.

[21] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Mathematics 5, Springer, 1964.

[22] M. Waldschmidt, Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups, GMW 326, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

1er juillet 2010

CHRISTIAN MAIRE[1], Laboratoire de Mathématiques, UFR Sciences et Techniques, 16 route de Gray, F-25030 Besançon • *E-mail :* `christian.maire@univ-fcomte`

---

(1)Recherche partiellement financée par l'Agence Nationale de la Recherche. Projet "Algorithmique des fonctions L" (ANR-07-BLAN-0248)