Université de Franche-Comté / 2023-2024 Mathématiques
CMI Info 2ème année

Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes et déterminer celles qui sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 12 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$.

Exercice 3. A quelles conditions les matrices suivantes sont-elle inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.
1) A quelles conditions les matrices suivantes sont-elle inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

2) Donner une généralisation.

Exercice 5. Soit la famille $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.
A quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$, la famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6.
Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Calculer les inverses des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. Discuter suivant les deux réels a et α la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = \alpha \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$