Université de Franche-Comté / 2023-2024 Mathématiques
CMI Info 2ème année

Calcul matriciel

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ 2y+z & = & 1 \\ x-y+3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ x-y-2z & = & 1 \\ x+3y+6z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Lorsque c'est possible, effectuer les calculs AB, BA, A^2 et B^2.

(ii) Calculer A^t, AA^t et A^tA.

Exercice 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Existe-t-il des matrices B telles que $BA = I_n$, n à déterminer ? Si oui, calculer AB.

Exercice 4. Donner deux matrices carrées A et B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB \neq BA$.

Exercice 5. Déterminer toutes les matrices A de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$. Pour ces matrices, déterminer A^n pour tout entier $n \geq 0$. Déterminer une telle matrice A lorsqu'elle est inversible.

Exercice 6. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer les puissances de M. Pour cela on note, pour $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} a_n & x_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$.

(i) Déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n pour tout entier $n \geq 1$.

(ii) Montrer que $x_{n+1} = 1 + 2x_n$ pour tout entier n.

(iii) On note $y_n = x_n + 1$. Déterminer l'expression de y_{n+1} en fonction de y_n.

(iv) En déduire l'expression de y_n puis de x_n en fonction de n, et enfin l'expression de M^n.

Exercice 7. Calculer la puissance n-ème des matrices suivantes ($n \geq 1$) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que $A^3 - 6A + 4I_4 = 0$.

(ii) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 9. Soit la matrice à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Montrer l'existence de deux réels x et y tels que $A^2 + xA + yI_2 = 0$. Montrer que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. En déduire A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 10.
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(ii) Calculer $P^{-1}AP$.

(iii) En déduire A^n, $n \geq 1$. Quel sens peut-on donner à A^n pour $n \leq 0$?

Exercice 11. Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

(i) Donner un exemple d'une telle matrice.

(ii) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

(iii) Exprimer A^n, $n \geq 0$ en fonction de A.

(iv) Exprimer A^{-n}, $n \geq 0$, en fonction de A.

Exercice 12.

(i) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I_3)^n$, $n \geq 1$; en déduire A^n.

(ii) Soit le système récurrent $(n \geq 0)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n \\ y_{n+1} & = & y_n - x_n \\ z_{n+1} & = & z_n - y_n \end{array} \right.$$

Ecrire ce système sous forme matricielle puis exprimer (x_n, y_n, z_n) en fonction de (x_0, y_0, z_0).

Exercice 13. On note par $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{A}_n$ celui des matrices anti-symétriques.

(i) Déterminer les dimensions de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathcal{S}_n$ et de $\mathcal{A}_n$.

(ii) Montrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Exercice 14.
On note par $\mathcal{O}_2$ l'ensemble des matrices A de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^tA = I$. Les matrices de $\mathcal{O}_2$ sont appelées *matrices orthogonales*.

(i) Montrer que $\mathcal{O}_2$ n'est pas vide.

(ii) Montrer que toute matrice de $\mathcal{O}_2$ est inversible, et que l'ensemble $\mathcal{O}_2$ est stable par multiplication.

(iii) Déterminer toutes les matrices orthogonales de $\mathcal{O}_2$.

(iv) Montrer qu'une matrice orthogonale est soit une matrice de rotation soit le produit d'une matrice de rotation par une matrice d'une symétrie orthogonale.
