Licence Sciences fondamentales et Applications 1ère année - 2023/24

Remise à niveau en Analyse

Feuille 7

Exercice 1. Ecrire sous la forme "$a + ib$" les nombres complexes suivants :

(i) $(3 + 2i)(1 - i)$, $(1 + i)^2 + i^3(2 + i)$, $(5 - i)(2 + i) - 5i$, $i^5 + i^6$.

(ii) $\dfrac{1}{i}$, $\dfrac{2}{1 - i}$, $\dfrac{2 - 2i}{2 - i}$, $\dfrac{3 + i}{2 + 3i}$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

(i) $2i + iz = z - 1$

(ii) $1 - 2iz = (i - 1)(z - i)$

(iii) $(z + 1)(z - i) = z^2 - 3$

(iv) $z + \overline{z} - 4 = 0$

(v) $z - \overline{z} + 5 = 0$

Exercice 3. Soit le nombre complexe $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants :

(i) $Z_1 = (z + 1)(\overline{z} - 2)$.

(ii) $Z_2 = (iz - 1)(\overline{z} - 1)$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(i) $z^2 + iz - 1 = 0$

(ii) $z^2 + 2z + 2 = 0$

(iii) $z^2 + z + 1 = 0$

(iv) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

Exercice 5.

(i) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$.

(ii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1+i)z + 1 = 0$.

(iii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + iz + i = 0$.

Exercice 6. Ecrire la forme trigonométrique des nombres complexes : $2 + 2i$, $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.

Exercice 7. Soit $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$.

(i) Ecrire z sous la forme "$a + ib$".

(ii) Ecrire z sous forme trigonométrique.

(iii) En déduire la valeur de $\cos(5\pi/12)$ et de $\sin(5\pi/12)$.

Exercice 8. Dans le plan complexe, soient les points A, B, et C d'affixes $1+i$, $2-i$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + (\dfrac{3}{2} - \sqrt{3})i$. Montrer que le triangle ABC est isocèle non équilatéral.

Exercice 9. Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes : $(1+i)^{30}$, $(1+i\sqrt{3})^{20}$.

Exercice 10.

(i) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

(ii) Calculer $(2+i)^4$. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = -7 + 24i$.

Exercice 11.

(i) Soit le nombre complexe $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^3.

(ii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

(iii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 1$.